

Inhaltsverzeichnis

Anhang A – Grundlegende Matrizenrechnung –

	Seite
A.1 Begriffe	2
A.1.1 Allgemeine Definition einer Matrix.....	2
A.1.2 Spezielle Matrizen.....	3
A.1.2.1 Vektoren.....	3
A.1.2.2 Skalare.....	6
A.1.2.3 Nullmatrizen	6
A.1.2.4 Quadratische Matrix	6
A.2 Ordnungsrelationen	8
A.3 Matrixoperationen	10
A.3.1 Transponieren	10
A.3.2 Addieren und Subtrahieren	11
A.3.3 Multiplizieren	12
A.3.3.1 Multiplizieren eines Skalars mit einer Matrix	12
A.3.3.2 Multiplizieren zweier Matrizen	13
A.3.3.2.1 Produkt zweier Vektoren.....	13
A.3.3.2.1.1 Skalarprodukt (inneres Produkt).....	13
A.3.3.2.1.2 Äußeres Produkt (dyadisches Produkt)	14
A.3.3.2.2 Allgemeiner Fall.....	15
A.3.4 Determinanten	16
A.3.4.1 Determinanten von 2×2 -Matrizen	16
A.3.4.2 Determinanten von 3×3 -Matrizen mit der <i>Sarrusschen</i> Regel	17
A.3.4.3 Determinantenbildung mit dem <i>Laplaceschen</i> Entwicklungssatz.....	18
A.3.5 Invertierung.....	20
A.3.5.1 Exkurs: Rang einer Matrix.....	22
A.3.5.2 Invertierung mit Hilfe der adjungierten Matrix.....	23
A.3.5.3 Invertierung durch Pivotisieren.....	26

A.1 Begriffe

A.1.1 Allgemeine Definition einer Matrix

Unter einer $m \times n$ **Matrix** (gesprochen "m Kreuz n Matrix") versteht man ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten. Die Angabe $m \times n$ bezeichnet die Ordnung bzw. den Typ einer Matrix. Zur Kennzeichnung von Matrizen werden gewöhnlich fette Großbuchstaben verwendet:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die reelle Zahl a_{ij} bzw. $a_{i,j}$ ist das Element der i -ten Zeile und der j -ten Spalte der Matrix \mathbf{A} . Der erste Index (hier i) wird als Zeilenindex und der zweite Index (hier j) als Spaltenindex bezeichnet:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \\ \\ \uparrow \\ \text{j-te Spalte} \end{matrix}$$

B. A-1 Die Ordnung bzw. der Typ von \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 11 & 14 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

ist 3×5 , weil \mathbf{B} drei Zeilen und fünf Spalten hat. b_{32} – das Element der dritten Zeile und der zweiten Spalte – ist 11.

A.1.2 Spezielle Matrizen

A.1.2.1 Vektoren

Eine $m \times 1$ -Matrix nennt man **Spaltenvektor**:

$$\mathbf{a}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Vektoren werden mit fetten Kleinbuchstaben symbolisiert. Die a_i bezeichnet man bei Vektoren als Komponenten.

B. A-2 *Der Vektor \mathbf{b} :*

$$\mathbf{b}_{5 \times 1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist ein Spaltenvektor mit fünf Zeilen. Die Komponente b_2 ist 6.

Zeilenvektoren sind Spaltenvektoren, die mit einem Hochkomma versehen sind.¹ Sie haben die Dimension $1 \times m$:

$$\mathbf{a}'_{1 \times m} = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_m).$$

B. A-3 *Die Komponente c_3 des Zeilenvektors \mathbf{c}' :*

$$\mathbf{c}'_{1 \times 4} = (3 \quad 9 \quad 7 \quad 2)$$

nimmt den Wert 7 an.

¹ Vgl. Abschnitt A.3.1.

Als spezielle Vektoren sind der Null-, der Einheitsvektor und der Einsenvektor zu nennen:

- Beim Nullvektor sind sämtliche Komponenten null:

$$\mathbf{0}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow m - \text{mal}$$

- Ein Einheitsvektor unterscheidet sich vom Nullvektor dadurch, dass eine Komponente eins ist:

$$\mathbf{e}_i_{m \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i - \text{te Komponente}$$

- Der Einsenvektor enthält ausschließlich Einsen:

$$\mathbf{1}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow m - \text{mal}$$

B. A-4 Beispiele für die genannten speziellen Vektoren sind:

- der 3×1 -Nullvektor: $\mathbf{0}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- der 1×5 -Nullvektor: $\mathbf{0}'_{1 \times 5} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$,
- der 2. 3×1 -Einheitsvektor: $\mathbf{e}_2_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- der 3. 1×4 -Einheitsvektor: $\mathbf{e}'_3_{1 \times 4} = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$ und
- der 1×6 -Einsenvektor: $\mathbf{1}'_{1 \times 6} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$.

Eine $m \times n$ -Matrix enthält n Spaltenvektoren:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

j-ter Spaltenvektor

Somit kann jede Matrix auch als geordnetes System von Spaltenvektoren dargestellt werden:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_j \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n), \text{ mit } \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Auch die Darstellung einer Matrix als geordnetes System von Zeilenvektoren ist möglich:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m \end{pmatrix} \text{ mit } \mathbf{a}'_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ij} \quad \cdots \quad a_{in}).$$

B. A-5 Die Matrix **B**:

$$\mathbf{B}_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 11 & 14 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

lässt sich auch als System folgender Spaltenvektoren auffassen:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4 \quad \mathbf{b}_5) \text{ mit } \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

A.1.2.2 Skalare

Eine 1×1 -Matrix ist eine gewöhnliche reelle Zahl. Diese wird in der linearen Algebra als **Skalar** bezeichnet. Die Zahl 5 kann beispielsweise als 1×1 -Matrix bzw. Skalar aufgefasst werden. Skalare werden gewöhnlich mit griechischen Buchstaben dargestellt.

A.1.2.3 Nullmatrizen

Bei einer Nullmatrix sind sämtliche Elemente null:

$$\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

A.1.2.4 Quadratische Matrix

Als **quadratisch** bezeichnet man Matrizen, die genauso viele Zeilen wie Spalten besitzen. Sie haben die Dimension $m \times m$:

$$\mathbf{A}_{m \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ bilden die **Hauptdiagonale** der quadratischen Matrix **A**. Die Summe der Hauptdiagonalelemente bezeichnet man als **Spur**:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm} = \sum_{i=1}^m a_{ii}.$$

Die **Nebendiagonale** einer quadratischen Matrix bilden die Elemente $a_{m,1}, a_{m-1,2}, \dots, a_{1,m}$.

*B. A-6 Die Elemente $b_{11} = 4$, $b_{22} = 6$, $b_{33} = 9$ und $b_{44} = 3$ bilden zusammen die Hauptdiagonale der Matrix **B**:*

$$\mathbf{B}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Werden diese Hauptdiagonalelemente aufsummiert, dann erhält man die Spur von \mathbf{B} :

$$\text{tr}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^4 a_{ii} = 4 + 6 + 9 + 3 = 22.$$

Die Nebendiagonale von \mathbf{B} setzt sich aus den Elementen $b_{41} = 8$, $b_{32} = 4$, $b_{23} = 5$ und $b_{14} = 3$ zusammen.

Besondere quadratische Matrizen sind:

- die untere (obere) Dreiecksmatrix, bei der alle Elemente oberhalb (unterhalb) der Hauptdiagonalen null sind:

$$\mathbf{A}_u = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_o = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

- die Diagonalmatrix mit Nullen außerhalb der Hauptdiagonalen:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix},$$

- die Einheitsmatrix, bei der auf der Hauptdiagonalen Einsen und außerhalb der Hauptdiagonalen Nullen stehen:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

A.2 Ordnungsrelationen

Zwei Matrizen **A** und **B** können dann verglichen werden, wenn sie gleicher Ordnung sind. Die Matrizen **A** und **B** sind gleicher Ordnung, wenn die Matrix **B** genauso viele Zeilen und Spalten hat wie die Matrix **A**.

Die Matrix **A** ist genau dann größer als (kleiner als; gleich groß wie) die Matrix **B**, wenn alle Elemente der Matrix **A** größer als (kleiner als; gleich groß wie) die an gleicher Stelle stehenden Elemente der Matrix **B** sind:

- $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} > \underset{m \times n}{\mathbf{B}} \Leftrightarrow a_{ij} > b_{ij}$, für alle $i = 1, 2, 3, \dots, m$ und $j = 1, 2, 3, \dots, n$,
- $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} < \underset{m \times n}{\mathbf{B}} \Leftrightarrow a_{ij} < b_{ij}$, für alle $i = 1, 2, 3, \dots, m$ und $j = 1, 2, 3, \dots, n$,
- $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} = \underset{m \times n}{\mathbf{B}} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, für alle $i = 1, 2, 3, \dots, m$ und $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Entsprechendes gilt für Vektoren:

- $\underset{m \times 1}{\mathbf{a}} > \underset{m \times 1}{\mathbf{b}} \Leftrightarrow a_i > b_i$, für alle $i = 1, 2, 3, \dots, m$.
- $\underset{m \times 1}{\mathbf{a}} < \underset{m \times 1}{\mathbf{b}} \Leftrightarrow a_i < b_i$, für alle $i = 1, 2, 3, \dots, m$.
- $\underset{m \times 1}{\mathbf{a}} = \underset{m \times 1}{\mathbf{b}} \Leftrightarrow a_i = b_i$, für alle $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Die Matrix **A** ist genau dann positiv (negativ), wenn alle ihre Elemente positiv (negativ) sind, und die Matrix **A** damit größer (kleiner) als die Nullmatrix ist:

- Positive Matrix **A**: $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} > \underset{m \times n}{\mathbf{0}} \Leftrightarrow a_{ij} > 0$, für alle $i = 1, 2, 3, \dots, m$ und $j = 1, 2, 3, \dots, n$.
- Negative Matrix **A**: $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} < \underset{m \times n}{\mathbf{0}} \Leftrightarrow a_{ij} < 0$, für alle $i = 1, 2, 3, \dots, m$ und $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

B. A-7 Gegeben seien zwei Matrizen:

$$\underset{3 \times 4}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \underset{3 \times 4}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Da **A** und **B** zwei Matrizen gleicher Ordnung sind, können sie verglichen werden.

Weil alle Elemente von **A** größer sind als die entsprechenden Elemente von **B**, gilt:

$$\mathbf{A} > \mathbf{B}.$$

Da alle Elemente von \mathbf{A} und \mathbf{B} positiv sind, handelt es sich um zwei positive Matrizen.

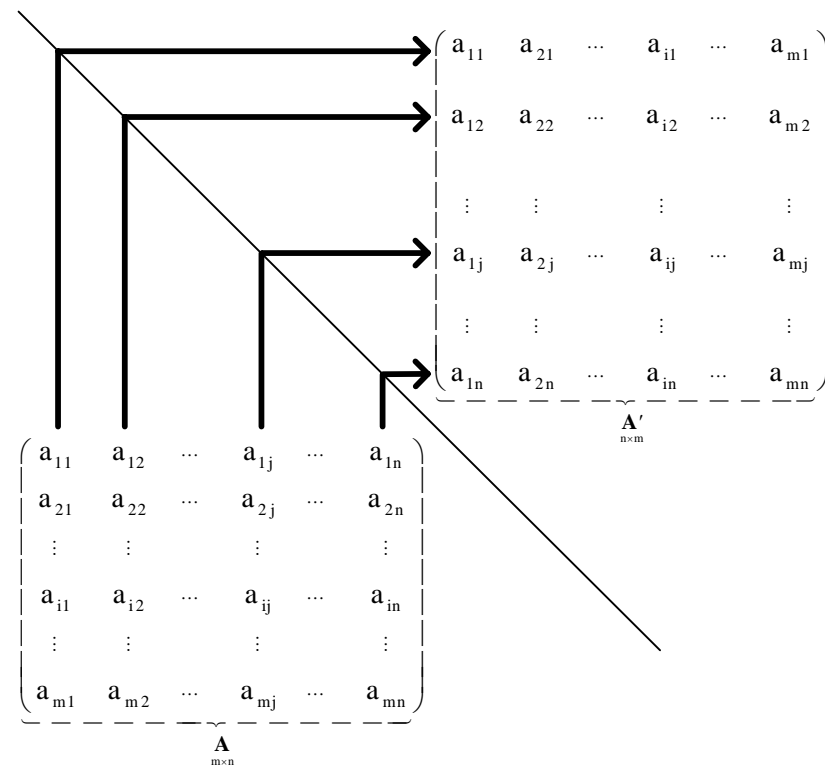
A.3 Matrixoperationen

A.3.1 Transponieren

Indem die Zeilen und Spalten der Matrix \mathbf{A} vertauscht werden, erhält man die transponierte Matrix \mathbf{A}'^2 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{m \times n}} \xrightarrow{\text{Transponieren}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}'_{n \times m}}$$

Beim Transponieren werden also die Spalten von \mathbf{A} in die Zeilen von \mathbf{A}' eingetragen. Grafisch kann das Transponieren als Achsenspiegelung veranschaulicht werden:



² Anstelle von \mathbf{A}' kann auch die Schreibweise \mathbf{A}^T verwendet werden.

B. A-8 Die Transponierte der Matrix A :

$$\underset{3 \times 4}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ist die Matrix A' :

$$\underset{4 \times 3}{A'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hinweise:

F. A-1 $\underset{m \times m}{A} = \underset{m \times m}{A'}$, falls A symmetrisch ist

F. A-2 $(A')' = A$.

A.3.2 Addieren und Subtrahieren

Die Addition und Subtraktion ist nur für Matrizen **gleicher Ordnung** – also für Matrizen mit gleich vielen Zeilen sowie gleich vielen Spalten – definiert. Zwei Matrizen werden addiert (subtrahiert), indem die an gleicher Stelle stehenden Elemente addiert (subtrahiert) werden:

- $\underset{m \times n}{A} + \underset{m \times n}{B} = \underset{m \times n}{C}$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,
- $\underset{m \times n}{A} - \underset{m \times n}{B} = \underset{m \times n}{C}$ mit $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

B. A-9 Die Summe der beiden Matrizen A und B :

$$\underset{3 \times 4}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \underset{3 \times 4}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 9+7 & 8+2 & 6+(-4) \\ 3+2 & 7+2 & 5+1 & 8+(-5) \\ 5+3 & 6+4 & 5+2 & 6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 16 & 10 & 2 \\ 5 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 10 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Die Differenz von **A** und **B** ergibt sich durch:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 9-7 & 8-2 & 6-(-4) \\ 3-2 & 7-2 & 5-1 & 8-(-5) \\ 5-3 & 6-4 & 5-2 & 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 13 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln:

F. A-3 Kommutativgesetz: $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} + \underset{m \times n}{\mathbf{B}} = \underset{m \times n}{\mathbf{B}} + \underset{m \times n}{\mathbf{A}}$ (aber $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} - \underset{m \times n}{\mathbf{B}} \neq \underset{m \times n}{\mathbf{B}} - \underset{m \times n}{\mathbf{A}}$, wenn $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$),

F. A-4 Assoziativgesetz: $\left(\underset{m \times n}{\mathbf{A}} + \underset{m \times n}{\mathbf{B}} \right) + \underset{m \times n}{\mathbf{C}} = \underset{m \times n}{\mathbf{A}} + \left(\underset{m \times n}{\mathbf{B}} + \underset{m \times n}{\mathbf{C}} \right),$

F. A-5 Summandenweises Transponieren erlaubt: $\left(\underset{m \times n}{\mathbf{A}} \pm \underset{m \times n}{\mathbf{B}} \right)' = \underset{m \times n}{\mathbf{A}'} \pm \underset{m \times n}{\mathbf{B}'}$ und

F. A-6 Nullmatrix: $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} \pm \underset{m \times n}{\mathbf{0}} = \underset{m \times n}{\mathbf{A}} ; \underset{m \times n}{\mathbf{A}} - \underset{m \times n}{\mathbf{A}} = \underset{m \times n}{\mathbf{0}} .$

A.3.3 Multiplizieren

A.3.3.1 Multiplizieren eines Skalars mit einer Matrix

Ein Skalar λ wird mit einer Matrix multipliziert, indem jedes Matrixelement mit dem Skalar multipliziert wird:

$$\lambda \cdot \underset{m \times n}{\mathbf{A}} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1j} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2j} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \lambda \cdot a_{i2} & \cdots & \lambda \cdot a_{ij} & \cdots & \lambda \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mj} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

B. A-10 Die Matrix **B**:

$$\underset{5 \times 3}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

wird mit dem Skala $\lambda = 3$ multipliziert:

$$\lambda \cdot \underset{5 \times 3}{\mathbf{B}} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 8 & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 7 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 6 \\ 9 & 24 & 27 \\ 21 & 15 & 12 \\ 15 & 3 & 9 \\ 21 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln:

F. A-7 Assoziativgesetz: $\lambda \cdot (\kappa \cdot \mathbf{A}) = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \lambda) \cdot \kappa = (\mathbf{A} \cdot \kappa) \cdot \lambda$,

F. A-8 Distributivgesetz: $\lambda \cdot \left(\underset{m \times n}{\mathbf{A}} + \underset{m \times n}{\mathbf{B}} \right) = \lambda \cdot \underset{m \times n}{\mathbf{A}} + \lambda \cdot \underset{m \times n}{\mathbf{B}}$.

A.3.3.2 Multiplizieren zweier Matrizen

Zwei Matrizen können nur dann multipliziert werden, wenn die Spaltenzahl der links stehenden Matrix mit der Zeilenzahl der rechts stehenden Matrix übereinstimmt (gleiche "innere Typangaben"). Als Ergebnis erhält man eine Matrix, die so viele Zeilen wie die links stehende Matrix und so viele Spalten wie die rechts stehende Matrix enthält (ergibt sich aus den "äußeren Typangaben"):

$$\begin{array}{ccc} \underset{m \times n}{\mathbf{A}} & \cdot & \underset{n \times p}{\mathbf{B}} \\ \left[\begin{array}{c} \text{"innere Typangaben"} \\ \text{"äußere Typangaben"} \end{array} \right] & = & \underset{m \times p}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} \end{array}$$

A.3.3.2.1 Produkt zweier Vektoren

A.3.3.2.1.1 Skalarprodukt (inneres Produkt)

Wird der Zeilenvektor $\underset{1 \times m}{\mathbf{a}'}$ mit dem Spaltenvektor $\underset{m \times 1}{\mathbf{b}}$ multipliziert, dann erhält man einen

Skalar λ .³ λ wird auch inneres Produkt oder **Skalarprodukt** genannt:

³ Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass der Zeilenvektor genauso viele Komponenten haben muss wie der Spaltenvektor.

$$\lambda = \sum_{i=1}^m a_i \cdot b_i .$$

Wenn zur Matrizenmultiplikation das **FALKsche Schema** angewendet wird, sieht man sofort, welche Ordnung die Produktmatrix hat. Beim Skalarprodukt zwischen den Vektoren \mathbf{a}' und \mathbf{b} hat das FALKsche Schema folgendes Aussehen:

\mathbf{b} hat das FALKsche Schema folgendes Aussehen:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}'(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_m) \left(\sum_{i=1}^m a_i \cdot b_i \right) \lambda .$$

B. A-11 Das Produkt der beiden Vektoren \mathbf{a}' und \mathbf{b} ergibt:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a}'(5 \quad 3 \quad 4 \quad 9) (5 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 9 \cdot 2 = 99) \mathbf{a}'\mathbf{b} .$$

A.3.3.2.1.2 Äußeres Produkt (dyadisches Produkt)

Neben dem Skalarprodukt (inneres Produkt) kann auch das äußere Produkt zwischen dem Spaltenvektor \mathbf{b} und dem Zeilenvektor \mathbf{a}' gebildet werden, sofern beide Vektoren gleich viele Komponenten besitzen. Das Ergebnis ist eine $m \times m$ -Matrix.

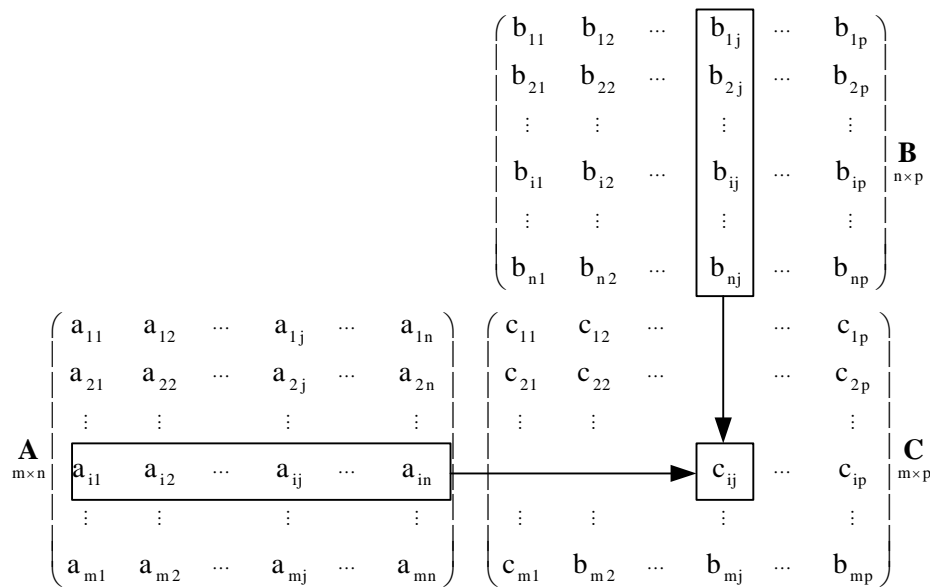
B. A-12 Das Produkt der beiden Vektoren \mathbf{a}' und \mathbf{b} ergibt:

$$(5 \quad 3 \quad 4 \quad 9) \mathbf{a}'$$

$$\mathbf{b} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \cdot 5 = 40 & 8 \cdot 3 = 24 & 8 \cdot 4 = 32 & 8 \cdot 9 = 72 \\ 7 \cdot 5 = 35 & 7 \cdot 3 = 21 & 7 \cdot 4 = 28 & 7 \cdot 9 = 63 \\ 5 \cdot 5 = 25 & 5 \cdot 3 = 15 & 5 \cdot 4 = 20 & 5 \cdot 9 = 45 \\ 2 \cdot 5 = 10 & 2 \cdot 3 = 6 & 2 \cdot 4 = 8 & 2 \cdot 9 = 18 \end{pmatrix} \mathbf{b}\mathbf{a}' .$$

A.3.3.2.2 Allgemeiner Fall

Das Multiplikation zweier Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} erfolgt elementweise. Das Element c_{ij} der Produktmatrix \mathbf{C} erhält man, indem das Skalarprodukt der i -ten Zeile von \mathbf{A} mit der j -ten Spalte von \mathbf{B} gebildet wird:



B. A-13 Die Produktmatrix von \mathbf{A} und \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

wird im FALKschen Schema berechnet:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 8 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 9 \cdot 6 + 8 \cdot 9 = 134 & 2 \cdot 2 + 9 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 81 \\ 3 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 5 \cdot 9 = 99 & 3 \cdot 2 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 61 \end{pmatrix} \mathbf{AB}.$$

Rechenregeln:

F. A-9 Assoziativgesetz I: $\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \right)$ bzw.

F. A-10 Assoziativgesetz II: $\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \right) \cdot \lambda = \left(\mathbf{A} \cdot \lambda \right) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \left(\lambda \cdot \mathbf{B} \right),$

F. A-11 Distributivgesetz I: $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \\ m \times n \quad m \times n \end{smallmatrix} \right) \cdot \begin{smallmatrix} \mathbf{C} \\ n \times p \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \pm \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\ m \times n \quad n \times p \quad m \times n \quad n \times p \end{smallmatrix}$ bzw.

$$\begin{smallmatrix} \mathbf{C} \\ p \times m \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \\ m \times n \quad m \times n \end{smallmatrix} \right) = \begin{smallmatrix} \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \pm \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \\ p \times m \quad m \times n \quad p \times m \quad m \times n \end{smallmatrix},$$

F. A-12 Distributivgesetz II: $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \\ m \times n \quad m \times n \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{D} \\ n \times p \quad n \times p \end{smallmatrix} \right) = \begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \\ m \times n \quad n \times p \quad m \times n \quad n \times p \quad m \times n \quad n \times p \quad m \times n \quad n \times p \end{smallmatrix}$ bzw.

$$\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} \\ m \times n \quad m \times n \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{C} - \mathbf{D} \\ n \times p \quad n \times p \end{smallmatrix} \right) = \begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \\ m \times n \quad n \times p \quad m \times n \quad n \times p \quad m \times n \quad n \times p \quad m \times n \quad n \times p \end{smallmatrix},$$

F. A-13 Transponieren: $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ m \times n \quad n \times p \end{smallmatrix} \right)' = \begin{smallmatrix} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{A}' \\ p \times n \quad n \times m \end{smallmatrix}$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\ m \times n \quad n \times p \quad p \times q \end{smallmatrix} \right)' = \begin{smallmatrix} \mathbf{C}' \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{A}' \\ q \times p \quad p \times n \quad n \times m \end{smallmatrix},$

F. A-14 Einheitsmatrix: $\begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \\ m \times n \quad n \times n \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} \\ m \times m \quad m \times n \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \mathbf{A} \\ m \times n \end{smallmatrix},$

F. A-15 Nullmatrix: $\begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} \\ m \times n \quad n \times p \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \mathbf{0} \\ m \times p \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} \\ p \times m \quad m \times n \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \mathbf{0} \\ p \times n \end{smallmatrix}.$

Das Kommutativgesetz gilt aber (fast immer) nicht:

$$\begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ p \times n \quad n \times p \end{smallmatrix} \neq \begin{smallmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \\ n \times p \quad p \times n \end{smallmatrix}.$$

Die Reihenfolge der Multiplikation muss deshalb eingehalten werden. Man unterscheidet, ob:

- **A** mit **B** von rechts: $\begin{smallmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ m \times n \quad n \times p \end{smallmatrix}$ oder
- **A** mit **B** von links: $\begin{smallmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \\ n \times p \quad p \times m \end{smallmatrix}$

multipliziert wird.

A.3.4 Determinanten

Eine Determinante ist eine charakteristische Zahl einer quadratischen Matrix. Eine Determinante wird durch zwei senkrechte Striche gekennzeichnet:

$$|\mathbf{A}|.^4$$

A.3.4.1 Determinanten von 2×2-Matrizen

Die Determinante einer 2×2-Matrix berechnet sich, indem das Produkt der Nebendiagonalelemente von dem Produkt der Hauptdiagonalelemente abgezogen wird:

⁴ Alternativ ist folgende Schreibweise möglich: $\det(\mathbf{A})$.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

$$B. A-14 \quad |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 9 = 14 - 27 = -13.$$

A.3.4.2 Determinanten von 3×3 -Matrizen mit der Sarrusschen Regel⁵

Man erhält man die erweiterte Matrix \mathbf{A}^* der Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

indem die Matrix \mathbf{A} um die ersten beiden Spalten erweitert wird:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von \mathbf{A} berechnet sich als Differenz zwischen der aufsummierten Produkte der Hauptdiagonalelemente und der aufsummierten Produkte der Nebendiagonalelemente von \mathbf{A}^* :

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

— Hauptdiagonalelemente

-- Nebendiagonalelemente

$$|\mathbf{A}| = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}_{\text{Summe der Produkte der Hauptdiagonalelemente}} - \underbrace{(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12})}_{\text{Summe der Produkte der Nebendiagonalelemente}}.$$

B. A-15 Von der Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

⁵ Die Sarrussche Regel ist nur bei 3×3 -Matrizen anwendbar.

wird die Determinante in zwei Arbeitsschritten berechnet.

- 1. Aufstellung der erweiterten Matrix:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 9 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- 2. Berechnung der Determinante:

$$\begin{aligned} |A| &= 5 \cdot 9 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 4 - (3 \cdot 9 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 7) \\ &= 225 + 63 + 48 - (162 + 60 + 70) = 336 - 292 = 44 \end{aligned}$$

A.3.4.3 Determinantenbildung mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz

Der Laplacesche Entwicklungssatz wird zur Determinantenbildung bei Matrizen angewendet, deren Ordnung größer als 2 ist.⁶ Die Determinante wird nach einer bestimmten Zeile oder Spalte entwickelt⁷:

- Entwicklung nach der i-ten Zeile: $|A| = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$.
- Entwicklung nach der j-ten Spalte: $|A| = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$.

Die $|A_{ij}|$ bezeichnet man als Minore des Elements a_{ij} . Es handelt sich um Unterdeterminanten, die durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entstehen:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \rightarrow |A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,m} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

⁶ Hierbei handelt es sich um Matrizen, deren Dimension größer als 2×2 ist.

⁷ Eine Determinante sollte aufgrund des geringeren Rechenaufwands immer nach der Zeile bzw. Spalte entwickelt werden, die die meisten Nullen enthält.

B. A-16 Die Determinante der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

wird beispielsweise nach der ersten Zeile entwickelt:

1. Arbeitsschritt: Berechnung der Minore:

- $|A|_{11}$ erhält man durch Streichung der ersten Zeile und ersten Spalte:

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 45 - 12 = 33.$$

- $|A|_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1$

- $|A|_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 9 = 8 - 27 = -19$

2. Arbeitsschritt: Berechnung der Determinante⁸:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |A|_{1j} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot |A|_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot |A|_{12} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot |A|_{13} \\ &= 5 \cdot 33 + (-1) \cdot 7 \cdot 1 + 6 \cdot (-19) = 165 - 7 - 114 = 44 \end{aligned}$$

Die Determinante von A kann aber beispielsweise auch nach der zweiten Spalte entwickelt werden:

1. Arbeitsschritt: Berechnung der Minore:

- $|A|_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1$

- $|A|_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = 25 - 18 = 7$

- $|A|_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$

⁸ Die Determinante wird nach der ersten Zeile entwickelt. Deshalb ist i in der Formel 1.

2. Arbeitsschritt: Berechnung der Determinante:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+2} \cdot a_{i2} \cdot |\mathbf{A}|_{i2} \\
 &= (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot |\mathbf{A}|_{12} + (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot |\mathbf{A}|_{22} + (-1)^{3+2} \cdot a_{32} \cdot |\mathbf{A}|_{32} \\
 &= (-1) \cdot 7 \cdot 1 + 7 \cdot 9 + (-1) \cdot 4 \cdot 3 = -7 + 63 - 12 = 44
 \end{aligned}$$

Bei Matrizen, deren Ordnung größer als 3 ist, müssen die Determinanten der Minore nach dem *Laplaceschen Entwicklungssatz*⁹ berechnet werden. Die Determinantenberechnung bei Matrizen höherer Ordnung ist deshalb sehr umfangreich.

B. A-17 Wird die Determinante der Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

nach der ersten Spalte entwickelt, dann erhält man folgende Minore:

$$|\mathbf{A}|_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|_{21} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{A}|_{41} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Die Werte der Minore müssen mit dem *Laplaceschen Entwicklungssatz* oder mit der *Sarrusschen Regel* berechnet werden.

A.3.5 Invertierung

Wird die reelle Zahl a mit ihrem Kehrwert multipliziert, dann erhält man als Ergebnis eins:

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{mit} \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Die Einheitsmatrix hat in der linearen Algebra eine ähnliche Bedeutung wie die eins beim Rechnen mit reellen Zahlen. Durch Multiplikation der **symmetrischen** Matrix \mathbf{A} (von links oder rechts) mit ihrer Inversen \mathbf{A}^{-1} ergibt sich die Einheitsmatrix:

$$\text{F. A-16} \quad \underset{m \times m}{\mathbf{A}} \cdot \underset{m \times m}{\mathbf{A}^{-1}} = \underset{m \times m}{\mathbf{A}^{-1}} \cdot \underset{m \times m}{\mathbf{A}} = \underset{m \times m}{\mathbf{I}}$$

⁹ Hat die Minore die Ordnung 3, dann kann auch die *Sarrussche Regel* angewendet werden.

B. A-18 Die Inverse zur Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

ist offenbar:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 \\ 0,5 & -0,2 \end{pmatrix},$$

weil:

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 \\ 0,5 & -0,2 \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cdot (-0,5) + 4 \cdot 0,5 = 1 & 2 \cdot 0,4 + 4 \cdot (-0,2) = 0 \\ 5 \cdot (-0,5) + 5 \cdot 0,5 = 0 & 5 \cdot 0,4 + 5 \cdot (-0,2) = 1 \end{pmatrix} \mathbf{I}$$

ist.

Die Inverse einer Matrix kann nur dann berechnet werden, wenn:

- die Matrix quadratisch ist.
- die Determinante der Matrix ungleich null ist, die Matrix also vollen Rang besitzt.¹⁰

Zur Bestimmung der Inversen gibt es verschiedene Verfahren, auf die im Folgenden eingegangen wird.

Regeln:

$$\text{F. A-17} \quad \left(\mathbf{A}'_{m \times m} \right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}_{m \times m} \right)'$$

$$\text{F. A-18} \quad \left(\mathbf{A}^{-1}_{m \times m} \right)^{-1} = \mathbf{A}_{m \times m}$$

$$\text{F. A-19} \quad \left(\lambda_{l \times l} \cdot \mathbf{A}_{m \times m} \right)^{-1} = \lambda_{l \times l}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{m \times m}^{-1}$$

$$\text{F. A-20} \quad \left(\mathbf{A}_{m \times m} \cdot \mathbf{B}_{m \times m} \right)^{-1} = \mathbf{B}_{m \times m}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{m \times m}^{-1}$$

¹⁰ Zum Rang einer Matrix vgl. Abschnitt A.3.5.1.

A.3.5.1 Exkurs: Rang einer Matrix

Wie in Abschnitt A.1.2.1 dargestellt wurde, lässt sich jede $m \times n$ -Matrix als ein System von n Spaltenvektoren oder m Zeilenvektoren auffassen. Der Rang einer Matrix ergibt sich durch die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spalten- bzw. Zeilenvektoren. Es lässt sich zeigen, dass die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren mit der maximalen Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren übereinstimmt.

Die Spaltenvektoren \mathbf{a}_j der Matrix $\mathbf{A}_{m \times n}$ sind dann linear abhängig, wenn sich ihre Linearkombination:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \lambda_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \lambda_2 + \dots + \mathbf{a}_n \cdot \lambda_n$$

mit beliebigen reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ so darstellen lässt, dass ein Nullvektor herauskommt:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \lambda_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \lambda_2 + \dots + \mathbf{a}_n \cdot \lambda_n = \mathbf{0}_{n \times 1},$$

ohne dass die Lösung trivial ist.¹¹ Bei einer linearen Unabhängigkeit nennt man die Matrix $\mathbf{A}_{m \times n}$ regulär und nicht singulär. Die Determinante von \mathbf{A} ist dann ungleich null:

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$, falls \mathbf{A} regulär ist.

Der Rang einer Matrix $\mathbf{A}_{m \times n}$ kann nicht größer sein, als die kleinere der beiden Zahlen m und n :

$$\text{rg}(\mathbf{A}_{m \times n}) \leq \min(m, n).$$

B. A-19 Die Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

ist regulär (=nicht-singulär), da es für die Gleichung :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \lambda_1 + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \lambda_2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

keine nicht-triviale Lösung gibt. Die Nicht-Singularität von \mathbf{A} zeigt sich auch daran, dass $|\mathbf{A}| = 44 \neq 0$ ist (vgl. B. A-16).

¹¹ Die Lösung ist trivial, wenn alle λ_j null sind.

Der Rang dieser Matrix ist:

$$\min(3,3) = 3.$$

Singulär ist aber die Matrix **B**:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4,5 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

da es für die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \lambda_1 + \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \lambda_2 + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nicht-triviale Lösung gibt ($\lambda_1 = -1,5$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 0$). Somit ist die Determinante von **B** null.

Regeln:

$$\text{F. A-21} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ m \times n \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \\ n \times m \end{pmatrix}$$

$$\text{F. A-22} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' \\ m \times n \quad n \times m \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} \\ n \times m \quad m \times n \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ m \times n \end{pmatrix}$$

$$\text{F. A-23} \quad \text{rg} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ m \times m \end{pmatrix} = m$$

A.3.5.2 Invertierung mit Hilfe der adjungierten Matrix

Die Inverse einer Matrix kann mit Hilfe der Determinante $|\mathbf{A}|$ und der adjungten Matrix \mathbf{A}^{adj} berechnet werden:

$$\mathbf{A}_{m \times m}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{A}_{m \times m}^{\text{adj}}.$$

Die adjungierte Matrix \mathbf{A}^{adj} ist die transponierte Matrix der Adjunkten $\mathbf{A}^{\text{Adjunkte}}$:

$$\mathbf{A}^{\text{adj}} = \left(\mathbf{A}^{\text{Adjunkte}} \right)'$$

Die Matrix der Adjunkten beinhaltet die Adjunkten (=Kofaktoren), die man durch Multiplikation der Minore¹² mit $(-1)^{i+j}$ erhält:

¹² Zur Bildung einer Minoren vgl. Abschnitt A.3.4.3.

$$\mathbf{A}_{ij}^{\text{Adjunkte}} = (-1)^{i+j} \cdot |\mathbf{A}|_{ij}.$$

Die adjungierte Matrix einer 2×2 -Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

berechnet sich vereinfacht nach folgender Formel:

$$\mathbf{A}^{\text{adj}} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

B. A-20 Berechnung der Inversen der Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Arbeitsschritt: Berechnung der Determinante:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 5 \cdot 4 = 10 - 20 = -10.$$

2. Arbeitsschritt: Ermittlung der adjungierten Matrix:

$$\mathbf{A}^{\text{adj}} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Arbeitsschritt: Berechnung der Inversen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{A}^{\text{adj}} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{-10} & \frac{-4}{-10} \\ \frac{-5}{-10} & \frac{2}{-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,4 \\ 0,5 & -0,2 \end{pmatrix}.$$

Die Invertierung der 3×3 -Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ist aufwendiger:

1. Arbeitsschritt: Berechnung der Determinanten:

Die Determinante wird bei 3×3 -Matrizen am einfachsten mit der Sarrusschen Regel bestimmt.

a) *Erweiterte Matrix:*

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

b) *Determinante:*

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= 4 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 4 - (7 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 2) \\ &= 60 + 28 + 20 - (21 + 32 + 50) \\ &= 108 - 103 = 5 \end{aligned}$$

2. Arbeitsschritt: *Bestimmung der adjungierten Matrix*

a) *Minore (Unterdeterminanten):*

- $|\mathbf{A}|_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 15 - 8 = 7$
- $|\mathbf{A}|_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 10 - 4 = 6$
- $|\mathbf{A}|_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$
- $|\mathbf{A}|_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = 25 - 14 = 11$
- $|\mathbf{A}|_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 7 \cdot 1 = 20 - 7 = 13$
- $|\mathbf{A}|_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 8 - 5 = 3$
- $|\mathbf{A}|_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 7 \cdot 3 = 20 - 21 = -1$
- $|\mathbf{A}|_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 7 \cdot 2 = 16 - 14 = 2$
- $|\mathbf{A}|_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2$

b) *Adjunkte (Kofaktoren):*

- $\mathbf{A}_{11}^{\text{Adjunkte}} = (-1)^{1+1} \cdot |\mathbf{A}|_{11} = 1 \cdot 7 = 7$
- $\mathbf{A}_{21}^{\text{Adjunkte}} = (-1)^{2+1} \cdot |\mathbf{A}|_{21} = (-1) \cdot 6 = -6$
- $\mathbf{A}_{31}^{\text{Adjunkte}} = (-1)^{3+1} \cdot |\mathbf{A}|_{31} = 1 \cdot 1 = 1$

- $A_{12}^{Adjunkte} = (-1)^{1+2} \cdot |A|_{12} = (-1) \cdot 11 = -11$
- $A_{22}^{Adjunkte} = (-1)^{2+2} \cdot |A|_{22} = 1 \cdot 13 = 13$
- $A_{32}^{Adjunkte} = (-1)^{3+2} \cdot |A|_{32} = (-1) \cdot 3 = -3$
- $A_{13}^{Adjunkte} = (-1)^{1+3} \cdot |A|_{13} = 1 \cdot (-1) = -1$
- $A_{23}^{Adjunkte} = (-1)^{2+3} \cdot |A|_{23} = (-1) \cdot 2 = -2$
- $A_{33}^{Adjunkte} = (-1)^{3+3} \cdot |A|_{33} = 1 \cdot 2 = 2$

c) Matrix der Adjunkten:

$$A^{Adjunkte} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ -6 & 13 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Adjungierte Matrix:

$$A^{adj} = (A^{Adjunkte})' = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -11 & 13 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Arbeitsschritt: Berechnung der Inversen:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{adj} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -11 & 13 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-11}{5} & \frac{13}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 & -1,2 & 0,2 \\ -2,2 & 2,6 & -0,6 \\ -0,2 & -0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

A.3.5.3 Invertierung durch Pivotisieren

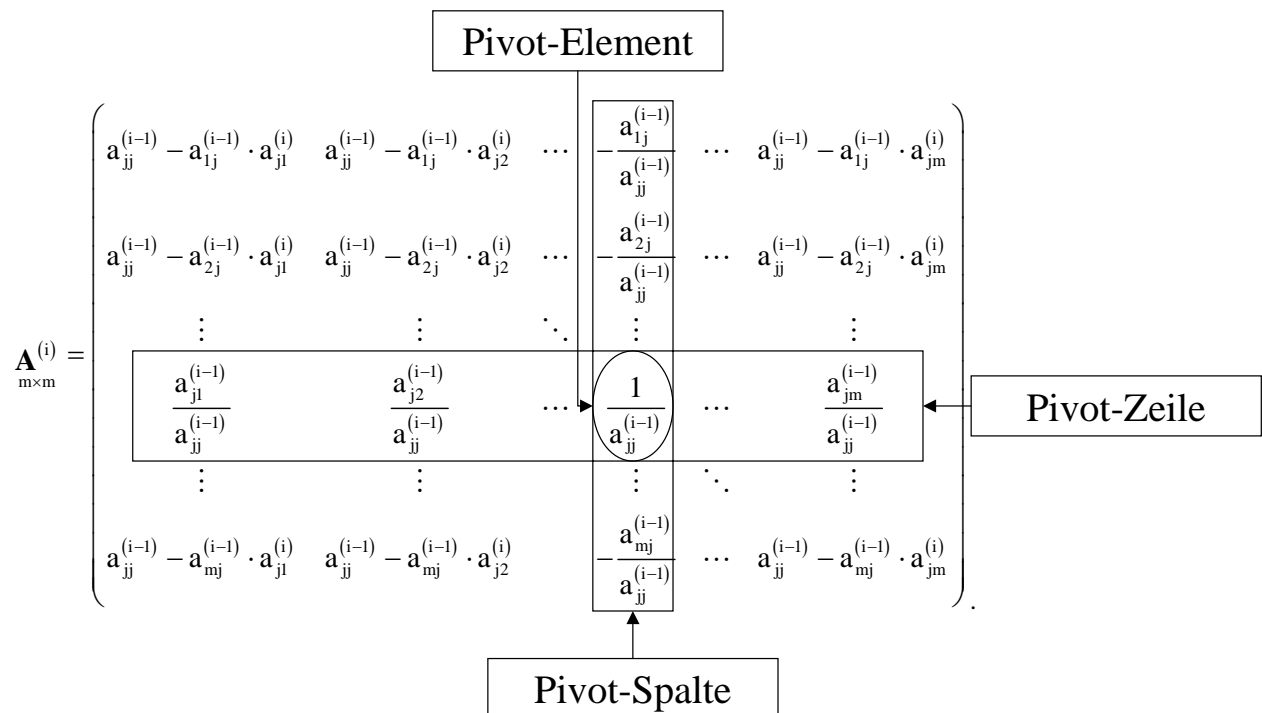
Eine Matrix kann auch durch Pivotisieren invertiert werden. Die Inverse wird hierbei iterativ bestimmt. Bei der i-ten Iteration wird die Matrix:

$$A_{m \times m}^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \cdots & a_{1m}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} & \cdots & a_{2m}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{(i)} & a_{m2}^{(i)} & \cdots & a_{mm}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

in folgenden Schritten berechnet:

- 1. Schritt: Ein Hauptdiagonalelement, das noch nicht Pivot-Element war und ungleich null ist, wird als Pivot-Element ausgewählt. Das Pivot-Element entstammt der j-ten Spalte und Zeile.
- 2. Schritt: Die Elemente der neuen Matrix werden berechnet:
 - Pivot-Element: $a_{jj}^{(i)} = \frac{1}{a_{jj}^{(i-1)}}$,
 - k-tes Element der j-ten Pivot-Zeile: $a_{jk}^{(i)} = \frac{a_{jk}^{(i-1)}}{a_{jj}^{(i-1)}}$ für alle $k \neq j$,
 - ℓ -tes Element der j-ten Pivot-Spalte: $a_{\ell j}^{(i)} = -\frac{a_{\ell j}^{(i-1)}}{a_{jj}^{(i-1)}}$ für alle $\ell \neq j$,
 - übrige Elemente: $a_{\ell k}^{(i)} = a_{\ell k}^{(i-1)} - a_{\ell j}^{(i-1)} \cdot a_{jk}^{(i)}$ für alle $\ell \neq j$ und alle $k \neq j$.

Die beiden Schritte werden so oft wiederholt bis alle Hauptdiagonalelemente einmal Pivot-Element waren (insgesamt werden also m Iterationen durchgeführt). Die Berechnung der Pivot-Elemente bei der i -ten Iteration veranschaulicht folgende Abbildung:



Es bietet sich an, bei jeder Iteration eine Hilfszeile und -spalte anzulegen, die rechts neben bzw. unter die Matrix $\mathbf{A}^{(i-1)}_{m \times m}$ eingetragen werden:

Pivot-Element

$$\mathbf{A}_{m \times m}^{(i-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i-1)} & a_{12}^{(i-1)} & \dots & a_{1j}^{(i-1)} & \dots & a_{1m}^{(i-1)} \\ a_{21}^{(i-1)} & a_{22}^{(i-1)} & \dots & a_{2j}^{(i-1)} & \dots & a_{2m}^{(i-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}^{(i-1)} & a_{j2}^{(i-1)} & \dots & \textcircled{a_{jj}^{(i-1)}} & \dots & a_{jm}^{(i-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(i-1)} & a_{m2}^{(i-1)} & \dots & a_{mj}^{(i-1)} & \dots & a_{mm}^{(i-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}^{(i-1)} \\ a_{2j}^{(i-1)} \\ \vdots \\ a_{jj}^{(i-1)} \\ \vdots \\ a_{mj}^{(i-1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{j1}^{(i-1)}}{a_{jj}^{(i-1)}} & \frac{a_{j2}^{(i-1)}}{a_{jj}^{(i-1)}} & \dots & 1 & \dots & \frac{a_{jm}^{(i-1)}}{a_{jj}^{(i-1)}} \end{pmatrix}$$

Werden die Hilfsspalte mit $\mathbf{b}^{(i)}$:

$$\mathbf{b}_{m \times 1}^{(i)} = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} = a_{1j}^{(i-1)} \\ b_2^{(i)} = a_{2j}^{(i-1)} \\ \vdots \\ b_j^{(i)} = a_{jj}^{(i-1)} \\ \vdots \\ b_m^{(i)} = a_{mj}^{(i-1)} \end{pmatrix}$$

und die Hilfszeile mit $\mathbf{c}^{(i)}$:

$$\left(\mathbf{c}^{(i)} \right)'_{l \times m} = \left(c_1^{(i)} = \frac{a_{j1}^{(i-1)}}{a_{jj}^{(i-1)}} \quad c_2^{(i)} = \frac{a_{j2}^{(i-1)}}{a_{jj}^{(i-1)}} \quad \dots \quad c_j^{(i)} = \frac{1}{a_{jj}^{(i-1)}} \quad \dots \quad c_m^{(i)} = \frac{a_{jm}^{(i-1)}}{a_{jj}^{(i-1)}} \right)$$

bezeichnet, dann berechnen sich die Elemente außerhalb der Pivot-Zeile und -Spalte durch:

$$a_{\ell k}^{(i)} = a_{\ell j}^{(i-1)} - b_{\ell}^{(i)} \cdot c_k^{(i)} \quad \text{für alle } \ell \neq j \text{ und alle } k \neq j.$$

B. A-21 Gegeben sei die Matrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

die invertiert werden soll.

1. Iteration:

Als erstes Pivot-Element wird $a_{11}^{(0)}$ ausgewählt. Die Matrix A (die Ausgangsmatrix bezeichnet man genau genommen mit $A^{(1-1)} = A^{(0)}$) wird um eine Hilfsspalte und eine -zeile erweitert:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{4}{2} = 2 \right)$$

Die Matrix der ersten Iteration hat folgende Struktur:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{2} = 2 \\ -\frac{5}{2} = -2,5 & 5 - 5 \cdot 2 = -5 \end{pmatrix}$$

2. Iteration:

Mit $a_{22}^{(1)}$ als Pivot-Element ergeben sich folgende Hilfszeile und -spalte:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,5 & 2 \\ -2,5 & \textcircled{-5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{-2,5}{-5} = 0,5 \quad \frac{1}{-5} = -0,2 \right)$$

Somit erhält man die Inverse durch:

$$A^{-1} = A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,5 - 2 \cdot 0,5 = -0,5 & -\frac{2}{-5} = 0,4 \\ \frac{-2,5}{-5} = 0,5 & \frac{1}{-5} = -0,2 \end{pmatrix}$$

Auch die 3×3 -Matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

kann durch Pivotisieren invertiert werden.

1. Iteration:

Die Hilfsspalte und -zeile werden berechnet:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} \textcircled{4} & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{4} = 0,25 \quad \frac{2}{4} = 0,5 \quad \frac{1}{4} = 0,25 \right)$$

Die Matrix der ersten Iteration hat folgende Struktur:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} = 0,25 & \frac{2}{4} = 0,5 & \frac{1}{4} = 0,25 \\ -\frac{5}{4} = -1,25 & 3 - 5 \cdot 0,5 = 0,5 & 2 - 5 \cdot 0,25 = 0,75 \\ -\frac{7}{4} = -1,75 & 4 - 7 \cdot 0,5 = 0,5 & 5 - 7 \cdot 0,25 = 3,25 \end{pmatrix}$$

2. Iteration:

Als Hilfsspalte und -zeile ergeben sich:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ -1,25 & \textcircled{0,5} & 0,75 \\ -1,75 & 0,5 & 3,25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{-1,25}{0,5} = -2,5 \quad \frac{1}{0,5} = 2 \quad \frac{0,75}{0,5} = 1,5 \right)$$

und man erhält folgende Matrix:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,25 - 0,5 \cdot (-2,5) = 1,5 & -\frac{0,5}{0,5} = -1 & 0,25 - 0,5 \cdot 1,5 = -0,5 \\ \frac{-1,25}{0,5} = -2,5 & \frac{1}{0,5} = 2 & \frac{0,75}{0,5} = 1,5 \\ -1,75 - 0,5 \cdot (-2,5) = -0,5 & -\frac{0,5}{0,5} = -1 & 3,25 - 0,5 \cdot 1,5 = 2,5 \end{pmatrix}$$

3. Iteration:*Mit der Hilfsspalte- und -zeile:*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & -0,5 \\ -2,5 & 2 & 1,5 \\ -0,5 & -1 & \textcircled{2,5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} \\
 &\quad \left(\frac{-0,5}{2,5} = -0,2 \quad \frac{-1}{2,5} = -0,4 \quad \frac{1}{2,5} = 0,4 \right)
 \end{aligned}$$

werden die Elemente der Inversen Matrix berechnet:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1,5 - (-0,5) \cdot (-0,2) = 1,4 & -1 - (-0,5) \cdot (-0,4) = -1,2 & -\frac{-0,5}{2,5} = 0,2 \\ -2,5 - 1,5 \cdot (-0,2) = -2,2 & 2 - 1,5 \cdot (-0,4) = 2,6 & -\frac{1,5}{2,5} = -0,6 \\ \frac{-0,5}{2,5} = -0,2 & \frac{-1}{2,5} = -0,4 & \frac{1}{2,5} = 0,4 \end{pmatrix}$$