HÖHERE MATHEMATIK
ZWEITER TEIL

WESSELKA MIHOVA

1. Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

Für die Beschreibung, Erklärung, Analyse und Optimierung wirtschaftlicher Vorgänge ist der mathematische **Funktionsbegriff** (im Sinne der gegenseitigen Zuordnung wirtschaftlicher Größen) von grundlegender Bedeutung. In vielen ökonomischen Bereichen hat man es mit **Zuordnungen** der Elemente einer Menge zu den Elementen einer anderen Menge zu tun:

- den verschiedenen Quantitäten eines Produktes sind entsprechenden Erlöse zugeordnet;
- verschiedenen Einkommen eines Haushaltes sind die entsprechenden Konsumausgaben zugeordnet;
- verschiedenen Leistungsintensitäten eines maschinellen Aggregates sind die entsprechenden Verbrauchszahlen zugeordnet;
- verschiedenen Briefgewichten ist das entsprechende Inlandsporto zugeordnet;
- verschiedenen Outputmengen einer Ein-Produkt-Unternehmung sind entsprechende Gesamt-Stückkosten zugeordnet, u.v.a.m.

1.1. **Definition und Darstellungsformen von Funktionen.**

1.1.1. *Definitionen.* Eine Relation $\mathcal{R}: \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ heißt *Funktion* der Menge $\mathbb{D}$ in die Menge $\mathbb{W}$, wenn:

(a) $\mathcal{R}$ rechtseindeutig ist;
(b) der Vorbereich von $\mathcal{R}$ mit $\mathbb{D}$ übereinstimmt.

Sind speziell $\mathbb{D}$, $\mathbb{W}$ Mengen reeller Zahlen, so heißt $\mathcal{R}$ *reelle Funktion.*

Folgende Schreib- und Redeweise ist üblich:

$f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ mit $x \mapsto y := f(x)$, d.h. eine Funktion von $\mathbb{D}$ in $\mathbb{W}$ ist eine Abbildung f, die jedem Element x der Definitionsmenge (Urbildmenge, des Definitionsbereiches) $\mathbb{D}$ genau ein Element y der Wertemenge (Zielmenge, Bildmenge, des Wertebereiches) $\mathbb{W}$ zuordnet.

Eine reelle Funktion besteht also aus drei Teilen: die Zuordnungsvorschrift, dem Definitionsbereich, dem Wertebereich.

Zwei Funktionen sind genau dann *gleich*, wenn sowohl die Zuordnungsvorschriften als auch die Definitionsbereiche als auch die Wertebereiche übereinstimmen.

1.1.2. *Funktionsgleichungen.* Wir betrachten reelle Funktionen, deren Zuordnungsvorschrift durch eine oder mehrere Gleichungen für x und y gegeben ist. Dabei sind drei Formen zu unterscheiden:

(a) **die explizite (entwickelte) Form** $y = f(x)$**.**
Die Funktionsgleichung ist nach y (oder auch nach x, wenn dies zweckmäßiger ist) aufgelöst.

(b) **die implizite (unentwickelte) Form $F(x, y) = 0$.**

Ihr Charakteristikum besteht darin, daß die rechte Seite der Gleichung die Null ist. Hierbei beachte man: *die Menge aller Paare (x, y), welche $F(x, y) = 0$ erfüllen, bildet stets eine Relation, die nicht notwendig eine Funktion sein muß.* In geeignete Aufspaltung in Teilmengen, bei denen die Zuordnung der Elemente $x \mapsto y$ jeweils (rechts-)eindeutig ist, kann man aus einer nicht-leeren Relation stets eine oder mehrere Funktionen gewinnen. Diese **können** (aber **müssen nicht**) durch formale Auflösung nach einer Variablen aus $F(x, y) = 0$ hervorgehen.

(c) **die Parameterform $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \mathcal{I}$.**

Ihr Charakteristikum: beide Variablen x und y werden zu **abhängigen** Veränderlichen der Hilfsvariablen t, die die Rolle der unabhängigen Variablen spielt.

Man beachte: *in jedem Fall sind φ und ψ Funktionen (explizite Form!), während die Menge aller (x, y) eine nicht notwendig funktionelle Relation ist.* Falls die Elimination von t aus beiden Gleichungen gelingt, kann durchaus eine parameterfreie Form gewonnen werden.

Die Funktionen können auch durch Tabellen, Schaubilder (Graphen), Pfeildiagramme oder geordnete Wertepaare (Wertetabelle) dargestellt werden.

Beispiel 1.1. 1. Die Funktionsgleichung $2x + 3y = 6$ bestimmt für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion in

– der expliziten Form $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$;

– der impliziten Form $2x + 3y - 6 = 0$;

– einer Parameterform $x = t,\ y = 2 - \dfrac{2}{3}t,\ t \in \mathbb{R}$.

2. Die implizite Gleichung

$$F(x, y) = 2x^3 + y^3 - x^2\,y - 2x\,y^2 + x^2 - y^2 = 0$$

bestimmt eine Relation; da die Paare $(1, -1)$ und $(1, 1)$ die Gleichung erfüllen, liegt **keine** Rechtseindeutigkeit vor. Mit Hilfe der Faktorzerlegung

$$F(x, y) = (2x - y + 1)(x - y)(x + y) = 0$$

gewinnt man daraus die **expliziten** Formen

$y = f_1(x) = 2x + 1$;
$y = f_2(x) = x$;
$y = f_3(x) = -x$.

Jede dieser Funktionen ist eine Teilmenge der gegebenen, durch $F(x, y) = 0$ bestimmten Relation.

3. Die implizite Form

$$F(x, y) = x - y - \sin\,y = 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

kann nicht formal nach y aufgelöst werden. Man kann aber die nach x aufgelöste explizite Form $x = y + \sin\,y$ bilden und danach zu y-Werten aus $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ die zugehörigen x-Werte berechnen. Z. B.

$$y = \frac{\pi}{4} \mapsto x = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y = 0 \mapsto x = 0; \quad y = \frac{\pi}{6} \mapsto x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}.$$

4. Die durch die Gleichung $F(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$ bestimmte Relation ist leer; es gibt kein reelles Zahlenpaar (x,y), das die vorgegebene Gleichung erfüllt. Somit bestimmt diese Gleichung keine reelle Funktion.
5. Die implizite Gleichung
$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$
bestimmt eine Relation; da die Paare $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$, $(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ die Gleichung erfüllen, liegt keine Rechts- und Linkseindeutigkeit vor. Jede der Funktionen
$$y = f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$
ist eine Teilmenge der gegebenen, durch $F(x,y) = 0$ bestimmten Relation, da folgendes gilt
$$F(x,y) = \left[\frac{y}{b} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]\left[\frac{y}{b} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right].$$
6. Vorgelegt sei die Parameterform
$$x = at,\ y = bt^2;\ t \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0.$$
Elimination des Parameters t liefert
$$t = \frac{x}{a}, \quad y = \frac{b}{a^2}\,x^2$$
als **explizite** Form; die **implizite** Form lautet $bx^2 - a^2y = 0$.
7. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist explizit gegeben durch
$$y = f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x < 0, \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0, \\ +1 & \text{falls} \quad x > 0. \end{cases}$$

1.1.3. *Graph einer Funktion.* Eine Möglichkeit der Funktionsdarstellung ist, den Graph (das Schaubild, die Bildkurve) der Funktion zu zeichnen.

Nach Festlegung eines kartesischen Koordinatensystems gilt folgender Sachverhalt:

(1) jedem Punkt P der Ebene läßt sich ein Paar (x,y) von Koordinaten eindeutig zuordnen (Bezeichnung: $P(x,y)$);

(2) jedes (geordnete) Zahlenpaar definiert eindeutig einen Punkten der Ebene, nämlich den Punkten, der dieses Zahlenpaar als kartesisches Koordinatenpaar besitzt.

Eine *ebene Kurve* ist eine Menge von Punkten $P(x,y)$, für deren Koordinaten eine bestimmte Bedingungsgleichung $F(x,y) = 0$ erfüllt ist.

Einer Relation und speziell einer Funktion ordnet man eine Kurve als **Graph** (Relationsgraph, Funktionsgraph, Bildkurve) zu: man braucht dazu nur die (reellen) Variablen x, y als kartesische Koordinaten eines Punktes zu deuten und die Relationsgleichung (bzw. Funktionsgleichung) als Bedingungsgleichung gemäß obiger Definition aufzufassen.

Damit gilt:

Einer reellen Funktion läßt sich ein Graph zuordnen. Er besteht aus den und nur den Punkten, deren Koordinaten bezüglich des festgelegten Koordinatensystems die Funktionsgleichung erfüllen.

Aufgabe 1.2. (1) Untersuchen Sie die Menge aller x, y - Belegungen der angegebenen Grundmenge, welche die betreffenden Gleichungen erfüllen und untersuchen Sie dann, ob die Erfüllungsmenge nur eine Relation oder bereits eine Funktion ist!

(a) $x^3 - y = 0,\ x \in \mathbb{R}$;
(b) $x^4 - y^4 = 0,\ x \in \mathbb{R}$;
(c) $\sin^2 x - 2\sin x\, \cos x + \cos^2 x + 2y - 6 = 0,\ x \in \mathbb{R}$;
(d) $x = 1$;
(e) $y = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

(2) Wie lautet der volle Definitionsbereich der durch folgende Gleichungen bestimmten Funktion:

$$\begin{array}{llll} (a) & y = \ln |x|, & (e) & y = x^3 - 3x^2 + 5x - 4, \\ (b) & y = \cot x, & (f) & y = e^{-x^2}, \\ (c) & y = \sqrt{x^2 + 3x - 10}, & (g) & y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \\ (d) & y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}, & (h) & y = \dfrac{x}{\sin x}\ ? \end{array}$$

(3) Welche Funktionen werden durch die folgenden Gleichungen (implizite Form) definiert?

$$\begin{array}{llll} (a) & x + 2y - 5 + 7xy = 0, & (c) & xy - x^4 + \dfrac{5(2-y)}{x^2+1} = 0, \\ (b) & y^3 - 3x^2 + r^2 = 0,\ r = \mathit{const} > 0, & (d) & y^2 - 2xy + x^2 - 16 = 0. \end{array}$$

(4) Eliminieren Sie die Parameter und stellen Sie die geforderte explizite Form der Funktion her:

$$\begin{array}{ll} (a) & s(u) = 5u + 4, \quad t(u) = u^2 - 1, \quad t = f(s) =? \\ (b) & x(t) = \dfrac{1-t}{t}, \quad y(t) = \cos^2 t, \quad y = f(x) =? \\ (c) & p(\alpha) = \dfrac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}), \quad q(\alpha) = \dfrac{1}{2}(e^{\alpha} + e^{-\alpha}), \quad q = f(p) =? \\ (d) & x(t) = a\, \cos t, \quad y(t) = b\, \sin t,\ a > 0,\ b > 0, \quad y = f(x) =? \end{array}$$

(5) Die Parameterdarstellung

$$x = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad y = \frac{-\omega\, L}{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad R > 0,\ L > 0$$

soll durch Elimination des Parameters ω in die implizite Form umgewandelt werden. Was für ein Graph liegt vor, welche Lage hat er und wie ist er mit ω-Werten zu beschreiben?

(6) Wie lautet die Polargleichung $r = \dfrac{4}{2 - 3\,\cos\varphi}$ in kartesischen Koordinaten (implizite Form als quadratisches Polynom in x und y)?

(7) Wandeln Sie die Relationsgleichung

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \quad a \in \mathbb{R}$$

in Polarkoordinaten um und geben Sie die explizite Form $r = r(\varphi)$ an.

1.2. **Verhalten von Funktionen.**

1.2.1. *Symmetrieeigenschaften von Funktionen.* Eine Funktion f heißt *gerade Funktion*, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ zugleich $-x \in \mathbb{D}$ und $f(-x) = f(x)$ gilt.

Der Graph einer geraden Funktion ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**.

Eine Funktion f heißt *ungerade Funktion*, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ zugleich $-x \in \mathbb{D}$ und $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Der Graph einer ungeraden Funktion ist **punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung**.

Aufgabe 1.3. Sind folgende Funktionen gerade oder ungerade?

$$\begin{array}{llll}
(a) & f(x) = 2x^4+1, & (b) & f(x) = x^3 - x,\\
(c) & f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, & (d) & f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\\
(e) & f(x) = 5x^2 - x\,\sin x, & (f) & f(x) = 3\,x^2\,\sin x\,\cos x,\\
(g) & f(x) = -x^3 + \dfrac{2}{x},\ x \neq 0, & (h) & f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ x \neq 0.
\end{array}$$

Satz 1.4. *Eine Relation $\mathcal{R}$ mit der Variablengleichung $\mathcal{R}(x,y) = 0$ (implizite Form), die der Funktionalgleichung $\mathcal{R}(x,-y) = \mathcal{R}(x,y)$ genügt, besitzt einen symmetrisch zur x-Achse verlaufenden Relationsgraphen.*

Beweis. Die Punkte $P(x,y)$, $Q(x,-y)$ sind symmetrisch zur x-Achse gelegen. Ist $\mathcal{R}(x,y) = 0$, so ist wegen $\mathcal{R}(x,y) = \mathcal{R}(x,-y)$ auch $\mathcal{R}(x,-y) = 0$, d.h. liegt der Punkt P auf dem Graph von $\mathcal{R}$, so liegt auch der Punkt Q darauf. □

Satz 1.5. *Eine Funktion f, die für Argumente beiderlei Vorzeichens erklärt ist, kann als Summe aus einer* **geraden** *Funktion g und einer* **ungeraden** *Funktion u dargestellt werden:*

$$f(x) = g(x) + u(x), \quad g(-x) = g(x), \quad u(-x) = -u(x), \quad x \in [-a,a],\ a > 0.$$

Beweis. Wir setzen für den **geraden Anteil** g an:

$$g(x) := \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x)\}.$$

Den **ungeraden Anteil** u wählen wir gemäß

$$u(x) := \frac{1}{2}\{f(x) - f(-x)\}.$$

Dann ist $g(-x) = g(x),\ u(-x) = -u(x)$, wie auch $g + u = f$. □

Beispiel 1.6. Die durch die Gleichung

$$y = f(x) = (2x-1)^5,\ x \in \mathbb{R},$$

bestimmte Funktion ist **weder gerade, noch ungerade**. Potenziert man aus (binomischer Lehrsatz!), so folgt

$$y = f(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1.$$

Setzt man hierin

$$g(x) := -80x^4 - 40x^2 - 1, \quad u(x) := 32x^5 + 80x^3 + 10x,$$

so ist $g(x)$ gerade, $u(x)$ ungerade und $f(x) = g(x) + u(x)$ die Zerlegung von f in geraden und ungeraden Anteil.

Satz 1.7. *Für zwei reelle Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, $x \in \mathcal{I}$, gelten folgende Symmetriebeziehungen:*

(a) $f(x) = -g(x) \Leftrightarrow$ *Graphen liegen symmetrisch zur x-Achse.*
(b) $f(x) = g(-x) \Leftrightarrow$ *Graphen liegen symmetrisch zur y-Achse.*
(c) $f(x) = -g(-x) \Leftrightarrow$ *Graphen liegen punktsymmetrisch zum Ursprung.*

Aufgabe 1.8. (1) Untersuchen Sie die durch folgende Gleichungen bestimmten Funktionen auf Symmetrie (gerade, ungerade, keines von beiden):

$$\begin{array}{llll} (a) & y = \tan x + \cos x, & (e) & y = 2^x + 2^{-x}, \\ (b) & y = (x-1)^2, & (f) & y = e^x - e^{-x}, \\ (c) & y = |\sin x|, & (g) & y = -\sqrt[3]{x^2+1}, \\ (d) & y = x\,\cot 2x + \cos\dfrac{1}{x} - x^2 + 2, & (h) & y = \dfrac{x^3}{4x^2-5}. \end{array}$$

(2) Beweisen Sie: *Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier geraden Funktionen ergeben jeweils wieder eine gerade Funktion.*

(3) Zerlegen Sie die folgenden Funktionen in einen geraden und einen ungeraden Anteil:

$$\begin{array}{llll} (a) & y = \cos(2x+1), & (d) & y = e^x, \\ (b) & y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right), & (e) & y = e^{-x}, \\ (c) & y = 3^{x^2}, & (f) & y = \sqrt{x^2 - 5x - 2}. \end{array}$$

(4) Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 4x + 3$ ist
(a) an der y-Achse;
(b) an der x-Achse;
(c) am Nullpunkt des Koordinatensystems zu spiegeln.

1.2.2. *Schranken und Nullstellen von Funktionen.* Die konstante Zahl $K\ (K') \in \mathbb{R}$ heißt eine *obere* (*untere*) *Schranke* für eine in einem Intervall $\mathcal{I}$ erklärte reelle Funktion f, wenn für alle $x \in \mathcal{I}\quad f(x) \le K\ \ (f(x) \ge K')$ gilt.

Lassen sich für f beide Zahlen K, K' so angeben, daß $K' \le f(x) \le K$ für alle $x \in \mathcal{I}$ gilt, so heißt f in $\mathcal{I}$ *beschränkt.*

Die Angabe von $\mathcal{I}$ ist wesentlich! So ist die für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ in **jedem abgeschlossenen Interval** der positiven x-Achse **beschränkt**:

$$\mathcal{I} = [a,b] = \{x \in \mathbb{R}^+ : \ a \le x \le b \wedge a > 0\} \ \Rightarrow\ \frac{1}{b} \le y = f(x) = \frac{1}{x} \le \frac{1}{a};$$

hingegen **nicht beschränkt** in dem linksseitig offenen Intervall $\mathcal{I}_0 = (0,b] = \{x \in \mathbb{R}^+ : \ 0 < x \le b\}$, da sich hier, zu jeder noch so großen positiven Zahl K, stets ein x finden läßt, etwa

$x = \dfrac{1}{K+1}$, dessen zugehöriger Funktionswert, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{K+1}\right) = K+1 > K$, die Zahl K überschreitet.

Eine Stelle x_0 heißt *Nullstelle* einer Funktion f, wenn der Funktionswert an dieser Stelle Null ist, d.h. wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

Eine Stelle x_0 heißt *Schnittstelle* zweier Funktionen f und g, wenn für sie die Funktionswerte beider Funktionen gleich sind, d.h. wenn $f(x_0) = g(x_0)$ gilt. Der zu einer Schnittstelle x_0 von f und g gehörige gemeinsame Punkt beider Graphen heißt *Schnittpunkt* der Graphen von f und g.

Im allgemeinen bestimmt man reelle Lösungen von Gleichungen durch Ermittlung der Nullstellen von Funktionen. Nur in wenigen Fällen kann man sich dabei **fertiger Lösungsformeln** bedienen. Man geht in zwei Schritten vor:

(1) Ermittlung einer (groben) Näherungslösung, meistens mit einer graphischen Methode;
(2) Verbesserung der Näherungslösung durch Einsatz eines numerischen Verfahrens.

Erläuterung der ersten Methode

(a) Man stellt die Form $f(x) = 0$ der Gleichung her.
Interpretiert man x als Variable, so stellt die linke Seite der Gleichung den der Variablen x zugeordneten Funktionswert $f(x) = y$ dar, und gesucht sind die Nullstellen von f. Nach Aufzeichnung des Graphen werden Schnitt- und Berührungspunkte mit der x-Achse bestimmt.

oder

(b) Man verteilt die Glieder der Gleichung so auf beide Seiten, daß man jede - als Funktionsterm in x verstanden - gut aufzeichnen kann.
Gesucht sind jetzt die Schnitt- oder Berührungspunkte beider Kurven; die Abszissen dieser Punkte sind dann erste Näherungslösungen der Gleichung

$$y_0 = f(x_0) := F(x_0) - G(x_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; F(x_0) = G(x_0).$$

Erläuterung der zweiten Methode

Von der Gleichung $f(x) = 0$ seien zwei Näherungswerte x_1, x_2 ermittelt, deren Funktionswerte $f(x_1), f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen haben, z.B. $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$. Damit hat man zwei auf verschiedenen Seiten der x-Achse gelegene Punkte $P_1(x_1, f(x_1))$, $P_2(x_2, f(x_2))$ gewonnen. Der Schnittpunkt x_3 der Sehne (P_1P_2) mit der x-Achse wird dann eine bessere Näherungslösung darstellen. Mit dem Strahlensatz der Geometrie erhält man (siehe $\triangle\, x_3x_2P_2 \approx \triangle\, x_3x_1P_1$)

$$\frac{f(x_2)}{x_2 - x_3} = \frac{|f(x_1)|}{x_3 - x_1}$$

und daraus, wegen $|f(x_1)| = -f(x_1)$, durch Auflösen nach x_3

$$x_3 = \frac{x_1\, f(x_2) - x_2\, f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Diese Formel heißt *regula falsi* (**Regel des falschen Ansatzes** - eine historisch bedingte Bezeichnung); das Verfahren, die Kurve zwischen zwei Punkten durch die Sehne zu ersetzen, wird *lineare Interpolation* genannt.

Falls x_3 noch nicht die gewünschte Genauigkeit besitzt, kann man das Verfahren wiederholen und x_3 verbessern. Dabei kann man sich, falls $f(x_3) > 0$ ausfällt (d.h. falls $f(x_1)f(x_3) < 0$ ausfällt), des Punktes $P_3(x_3, f(x_3))$ und des auf der anderen Seite der x-Achse liegenden Punktes $P_1(x_1, f(x_1))$ bedienen und

$$x_4 = \frac{x_1\, f(x_3) - x_3\, f(x_1)}{f(x_3) - f(x_1)}$$

ausrechnen, u.s.w.

Beispiel 1.9. Man bestimme die positive Lösung der Gleichung

$$f(x) = e^{\frac{\pi}{4}} - (x^2 - 2x - 3) = 0.$$

Lösung. **1. Schritt.** Aufspaltung gemäß

$$G(x) := e^{\frac{\pi}{4}} = x^2 - 2x - 3 =: F(x)$$

vornehmen, weil die Graphen von $y = G(x)$ und $y = F(x)$ gut aufgezeichnet werden können.

Die Parabel $y = F(x)$ ist wegen $F(x) = (x-1)^2 - 4$ eine "nach oben" geöffnete Normalparabel, die ihren Scheitel im Punkt $S(1, -4)$ hat. Als Schnittpunktsabszisse liest man ab $x_1 = 3,53 \;\Rightarrow\; f(x_1) = G(x_1) - F(x_1) = 0,017$. Für x_2 schätzt man $x_2 = 3,54 \;\Rightarrow\; f(x_2) = G(x_2) - F(x_2) = -0,027$.

2. Schritt. Mit diesen Werten liefert die *regula falsi* als verbesserte Näherungslösung $x_3 = 3,534 \;\Rightarrow\; f(x_3) = -0,002$.

Beispiel 1.10. Die reelle Nullstelle der Funktion $f(x) = 1 - \sqrt{x} + \tan x - \dfrac{1}{x}$ soll auf drei Dezimalen genau bestimmt werden.

Lösung. **1. Schritt.** Aufspaltung nach Zweckmäßigkeit in zwei Teilfunktionen $1+\tan x = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ vornehmen, da die Funktionen $G(x) = 1 + \tan x$ und $F(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ durch Überlagerung (Ordinatenaddition) leicht zu zeichnen sind. Man findet

$$0,8 < x_0 < 0,9:\; x_1 = 0,8 \;\Rightarrow\; f(x_1) = -0,115;\; x_2 = 0.9 \;\Rightarrow\; f(x_2) = +0,200.$$

2. Schritt. Die *regula falsi* liefert damit $x_3 = 0,837 \;\Rightarrow\; f(x_3) = -0,0007$.

Aufgabe 1.11. (1) Welche der durch die folgenden Gleichungen bestimmten Funktionen sind im jeweils angegebenen Interval beschränkt? Geben Sie bei positiver Antwort die größte untere Schranke und die kleinste obere Schranke an!

(a) $y = x + \sin x,\ x \in \mathbb{R}$,	(e) $y = \tan x,\ x \in (-\pi, \pi)$,
(b) $y = \lvert x\rvert,\ x \in [-1, 1]$,	(f) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3},\ x \in [1, 3]$,
(c) $y = \ln x,\ x \in (0, e)$,	(g) $y = \sin x + \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,
(d) $y = \ln x,\ 0 < a \le x \le e$,	(h) $y = e^{-x^2},\ x \in \mathbb{R}$.

(2) Bestimmen Sie die reellen Nullstellen folgender Funktionen durch exakte Rechnung:

(a) $y = -2x + 6$,	(c) $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$,
(b) $y = \dfrac{3x - 4}{6x^2 - 11x + 4}$,	(d) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x + 1}$.

(3) Ermitteln Sie die reelle Nullstelle der Funktion $y = x - 1 + \sin x$ durch graphische Bestimmung eines groben Näherungswertes und Verbesserung desselben mit der *regula falsi* auf drei Dezimalen.

1.2.3. *Periodizität. Umkehrfunktionen.* Man nennt eine Funktion f *periodisch* mit der *Periode* T, wenn sie die Funktionsgleichung $f(x+T) = f(x),\ x \in \mathcal{I},\ x+T \in \mathcal{I}$ erfüllt.

Die Funktionswerte wiederholen sich nach T Abszisseneinheiten.

Zusammen mit T sind auch $kT\,(k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ Perioden der Funktion. Die betragsmäßig kleinste Periode heißt *primitive Periode.*

Erklärung 1.12. Die Funktion $y = F(x) = f(\varphi(x))$ heißt eine *komponierte* (*verkettete, mittelbare*) Funktion der Funktionen $y = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{D}$, $y \in \mathbb{V}$ und $z = f(y)$, $y \in \mathbb{V}$, $z \in \mathbb{W}$.

Man nennt $y = \varphi(x)$ die *innere*, $z = f(y)$ die *äußere* Funktion.

Nun betrachten wir zwei symmetrisch zur Quadrantenhalbierenden $g : y = x$ liegende Graphen G_1 und G_2 und fragen nach dem Zusammenhang ihrer beiden Funktionsgleichungen.

G_1 sei der Graph der Anfangsfunktion $y = f(x)$. Ist $P_1(x_1, y_1) \in G_1$, so bedeutet das $y_1 = f(x_1)$.

Für die Koordinaten des symmetrisch zu P_1 gelegenen Punktes $P_2(x_2, y_2) \in G_2$ ermitteln wir $x_2 = y_1,\ y_2 = x_1$, d.h. $x_2 = f(y_2)$. Dieser Sachverhalt gilt aber für jedes Paar symmetrisch zur Quadrantenhalbierenden g liegender Punkte. Daher besteht G_2 aus der Menge aller Punkte $P(x, y)$, deren Koordinaten durch die Gleichungen $y = h(x)$ einerseits und $x = f(y)$ andererseits verknüpft sind. Es gelten dann die Gleichungen:

$$y = h(x) = h(f(y)), \quad x = f(y) = f(h(x)),$$

d.h. h ist die Umkehrfunktion von f.

Als *Umkehrfunktion* f^{-1} einer in einem Intervall linkseindeutigen Funktion f erklärt man diejenige Funktion h, für die $y = h(x) \Leftrightarrow x = f(y)$ gilt.

Die Linkseindeutigkeit oder Injektivität von f hat die Rechtseindeutigkeit von f^{-1} zur Folge, d.h. f^{-1} ist auch eine Funktion.

Satz 1.13. (1) *Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion verlaufen spiegelsymmetrisch zur Winkelhalbierenden von positiver x- und y-Achse.*

(2) *Es gelten die Umkehridentitäten*

$$f \circ f^{-1}(x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{D}_{f^{-1}}; \quad f^{-1} \circ f(x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{D}_f.$$

Aufgabe 1.14. (1) Welche sind die Definitionsbereiche der Funktionen:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} + \lg(x+2); \quad f(x) = (3x)!; \quad f(x) = \frac{x}{\ln(1-x)}?$$

(2) Sind folgende Funktionen periodisch?

(*a*) $f(x) = \cos^2 x$, (*c*) $f(x) = \tan(x^2)$,

(*b*) $f(x) = \sin(2\pi x)$, (*d*) $f(x) = 6\sin^2 x + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \tan(2x)$.

Lösung (*a*):

$$f(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \Rightarrow f(x+T) = \frac{1+\cos 2(x+T)}{2} = \frac{1+\cos(2x+2T)}{2} \Rightarrow$$

$$f(x) = f(x+T) \;\Leftrightarrow\; T = \pi.$$

(3) Man bestimme die mittelbaren Funktionen

$$F_1(x) = f(\varphi(x)), \quad F_2 = \varphi(f(x)),$$

wenn folgendes gilt

$$f(x) = x^3 - x, \quad \varphi(x) = \sin(2x).$$

(4) Man bestimme die Funktion $f(x)$, falls

$$(a) \quad f(x+1) = x^2 - 3x + 2; \quad (b) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2+2x+3}{x}, \; x \neq 0.$$

Lösung. (a) Man setzt $t := x+1$ an. Dann gilt $x = t-1$ und

$$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6 \;\Rightarrow\; f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

(b) Man setzt $t := \dfrac{1}{x}$ an. Damit gilt $x = \dfrac{1}{t}$ und

$$f(t) = \frac{(1/t)^2 + 2(1/t) + 3}{1/t} = \frac{3t^2+2t+1}{t} \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{x}.$$

(5) Welche sind die Umkehrfunktionen der Funktionen

$$y = \frac{2x-1}{3}, \; x \in \mathbb{R}; \quad y = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0, \; x \in \mathbb{R}?$$

Lösung (b):

$$y = \frac{1}{a}\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{a} \;\Rightarrow\; \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = ay + (b^2-4ac) \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$y \geq -\frac{b^2-4ac}{a} \;\wedge\; a > 0; \quad y \leq -\frac{b^2-4ac}{a} \;\wedge\; a < 0$$

$$\Rightarrow \left|ax + \frac{b}{2}\right| = \sqrt{ay + (b^2-4ac)} \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{a}\left(\sqrt{ay + (b^2-4ac)} - \frac{b}{2}\right) \;\wedge\; ax + \frac{b}{2} \geq 0;$$

$$x = \frac{1}{a}\left(-\sqrt{ay + (b^2-4ac)} - \frac{b}{2}\right) \;\wedge\; ax + \frac{b}{2} \leq 0 \;\Rightarrow$$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a}\left(\sqrt{ay + (b^2-4ac)} - \frac{b}{2}\right), \; y \geq -\frac{b^2-4ac}{a}, \; a > 0;$$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{a}\left(-\sqrt{ay + (b^2-4ac)} - \frac{b}{2}\right), \; y \leq -\frac{b^2-4ac}{a}, \; a < 0.$$

1.3. **Verschiebungen und Streckungen.**

1.3.1. *Kongruente Verschiebung.*

Erklärung 1.15. Ein Graph c' gehe durch *kongruente Verschiebung* um den Vektor $\overrightarrow{v_0}(x_0, y_0)$ aus dem Graph c hervor, wenn jeder Punkt von c' durch Verschiebung mit $\overrightarrow{v_0}$ aus einem Punkt von c entsteht.

Satz 1.16. *Wird der Graph c einer Funktion $y = f(x)$ um den Vektor $\overrightarrow{v_0}$ verschoben, so hat der damit bestimmte Graph c' die Gleichung*

$$y = f(x - x_0) + y_0.$$

Beweis. Seien $P_1(x_1, y_1) \in c$, $P_1'(x_1', y_1') \in c'$ zwei durch Verschiebung mit $\overrightarrow{v_0}$ gekoppelte Punkte, dann gilt $y_1 = f(x_1)$. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten von P_1 und P_1' ist wegen $\overrightarrow{OP_1'} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_1'} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{v_0}$:

$$\left| \begin{array}{l} x_1' = x_1 + x_0, \\ y_1' = y_1 + y_0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = x_1' - x_0, \\ y_1 = y_1' - y_0. \end{array} \right.$$

Dementsprechend formen wir die gegebene Funktionsgleichung um:

$$y_1 = f(x_1) \ \Rightarrow \ y_1' - y_0 = f(x_1' - x_0) \ \Rightarrow \ y_1' = f(x_1' - x_0) + y_0,$$

d.h. x_1', y_1' erfüllen die Funktionsgleichung $y = f(x - x_0) + y_0$ identisch, und da dieser Sachverhalt für die Koordinaten **aller** zugeordneter Punkte gilt, ist damit die Gleichung für den Graphen c' gefunden. □

Wir erwähnen die Sonderfälle:

- $y_0 = 0 \ \Rightarrow \ c' : y = f(x - x_0)$ rein-laterale Verschiebung.
  Verschiebung parallel zur x-Achse: Durch $g(x) = f(x + b)$, $b \in \mathbb{R}$ ist eine Funktionenschar mit dem Scharparameter b beschrieben, deren Graphen gegenüber dem Graph von f parallel zur x-Achse verschoben sind.
  Die Tangenten an den Graphen werden mit verschoben. Dabei ändern sie ihre Steigung nicht.
- $x_0 = 0 \ \Rightarrow \ c' : y = f(x) + y_0$ rein-vertikale Verschiebung.
  Verschiebung parallel zur y-Achse: Gegeben sei die Funktion $f(x)$. Durch $g(x) = f(x) + b$, $b \in \mathbb{R}$ ist eine Funktionsschar mit dem Parameter b beschrieben, deren Graphen gegenüber dem Graph von f parallel zur y-Achse verschoben sind.
  Dabei bleiben die Stellen, an denen Maxima und Minima liegen, erhalten, Nullstellen hingegen nicht.
  Die Tangenten an den Graphen werden mit verschoben. Dabei ändern sie ihre Steigung nicht.

Beispiel 1.17. Die Graphen der Funktionsgleichungen $y = ax^2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind Parabeln, deren Scheitel im Ursprung liegt. Verschiebung um den Vektor $\overrightarrow{v_0}(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$ liefert $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ (*Scheitelgleichung*) als Gleichung der verschobenen Parabel mit $S(x_0, y_0)$ als Scheitel.

Ordnet man die Scheitelgleichung nach den Potenzen von x

$$y = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 + y_0,$$

und macht Koeffizientenvergleich mit der *Normalform* $y = ax^2 + bx + c$, so folgt

$$-2ax_0 = b \wedge ax_0^2 + y_0 = c \ \Rightarrow \ x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Mit diesen Formeln lassen sich die Scheitelkoordinaten aus der Normalform ermitteln.

Beispiel 1.18. Aus der *Mittelpunktgleichung* des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ gewinnt man die allgemeine Kreisgleichung $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $M(x_0, y_0)$).

Die Variablengleichungen bestimmen eine jeweils nicht-funktionale Relation.

Zusammengefasst: Bei der Verschiebung bleibt die Gestalt der Kurve unverändert - deshalb *kongruente* Verschiebung.

1.3.2. *Affine Stauchung. Affine Streckung.*

Erklärung 1.19. Ein Graph c' gehe durch *affine Streckung* (*Stauchung*) aus dem Graphen c hervor, wenn jede Punktordinate von c' aus der zugehörigen Ordinate von c durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entsteht.

Bezugs- oder *Affinitätsachse* ist hier stets die x-Achse; k heißt *Strekungsfaktor* (*Stauchungsfaktor*) oder auch *Affinitätsverhältnis*.

Für $k \in (0, 1)$ wird die Originalkurve *echt gestaucht*, für $k > 1$ *echt gestreckt*, während für $k = 1$ c' mit c zusammenfällt. Bei negativen k-Werten ist zusätzlich noch eine Spiegelung an der x-Achse vorzunehmen.

Satz 1.20. *Wird der Graph c derFunktion $y = f(x)$ um den Faktor $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ affin gestaucht (gestreckt), so hat der damit bestimmte Graph c' die Gleichung*

$$y = kf(x).$$

Beweis. Seien $P_1(x_1, y_1) \in c$, $P_1'(x_1', y_1') \in c'$ zwei durch affine Stauchung (Streckung) mit dem Faktor k gekoppelte Punkte. Dann gilt $y_1 = f(x_1)$. Der Zusammenhang zwischen den Punktkoordinaten ist

$$x_1' = x_1, \quad y_1' = ky_1.$$

Dementsprechend erhalten wir aus $y_1 = f(x_1)$

$$ky_1 = kf(x_1) \quad \Rightarrow \quad y_1' = kf(x_1'),$$

d.h. x_1', y_1' erfüllen identisch die Funktionsgleichung $y = kf(x)$; da der Sachverhalt für die Koordinaten **aller** zugeordneten Punkte gilt, so ist damit die Gleichung für den neuen Graph c' gefunden. □

Streckung parallel zur x-Achse: Durch $f(x) = ag(x)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktionenschar mit dem Scharparameter a beschrieben, deren Graphen gegenüber dem Graph von g parallel zur y-Achse gestreckt sind. Dabei bleiben Nullstellen und Stellen, an denen Maxima und Minima liegen, erhalten.

Die Tangenten an den Graphen werden mit gestreckt. Dabei verändern sie ihre Steigung.

Wir untersuchen diese Änderung mit Hilfe von Steigungsdreiecken.

Sei $P_0(x_0, g(x_0))$ ein Punkt des Graphs von g, es sei t_g die Tangente an den Graph in P_0 und $P_1(x_1, t(x_1))$ ein weiterer Punkt der Tangente. Aus dem Steigungsdreieck lesen wir ab:

$$(\text{Steigung von } t_g) = \frac{t(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Bei der Streckung wird P_0 auf $Q_0(x_0, ag(x_0))$ und P_1 auf $Q_1(x_1, at(x_1))$ abgebildet. Die Gerade durch Q_0 und Q_1 ist die Tangente t_f an den Graph von f im Punkt Q_0.

Aus dem Steigungsdreieck lesen wir ab:

$$(\text{Steigung von } t_f) \;=\; \frac{at(x_1) - ag(x_0)}{x_1 - x_0} \;=\; a\,\frac{t(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} \;=\; a.(\text{Steigung von } t_g.)$$

Beispiel 1.21. Der Graph der Gleichung $y = x^2$ ist eine "nach oben" geöffnete Normalparabel, deren Scheitel im Ursprung liegt. Demnach sind die Graphen von $y = ax^2$ für

- $|a| = 1$ ebenfalls Normalparabeln;
- $|a| > 1$ gestreckte Normalparabeln;
- $|a| < 1$ gestauchte Normalparabeln

mit Scheitel im Ursprung, die für

- $a > 0$ "nach oben";
- $a < 0$ "nach unten"

geöffnet sind. Die y-Achse ist in jedem Fall die Symmetrieachse. Ihre *Brennpunkte* sind die Punkte $F\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$.

Beispiel 1.22. Jede Ellipse läßt sich als affines Bild eines Kreises definieren:

Gehen wir von der Mittelpunktlage ($M \equiv O$) des "oberen" Halbkreises (Radius a) aus, so gewinnen wir aus der Gleichung $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ sofort die Gleichung des "oberen" Ellipsenbogens, wenn wir den Faktor $k := \dfrac{b}{a}$ anbringen,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a,\, b \in \mathbb{R}^+.$$

Für die Gestalt der Ellipse gilt:

- $k > 1 \;\Leftrightarrow\; b > a \;\Leftrightarrow\; 2b$ ist die Hauptachse;
- $k < 1 \;\Leftrightarrow\; b < a \;\Leftrightarrow\; 2a$ ist die Hauptachse

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \underset{\left(k = \frac{b}{a}\right)}{\Longrightarrow} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aufgabe 1.23. (1) Der Graph der Sinusfunktion $y = \sin x$ werde

- um $\dfrac{\pi}{2}$ Einheiten "nach rechts",
- um π Einheiten "nach links"

verschoben. Wie lauten die Funktionsgleichungen in beiden Fällen? Welche Verschiebungen ändern die Bildkurve von $y = \sin x$ nicht?

(2) Wie lautet die Normalform der Parabel, die kongruent zum Graph von $y = -3x^2$ ist und ihren Scheitel im Punkte $S(-2, 5)$ hat?

(3) Der Graph von $y = f(x)$ werde

- um $\overrightarrow{v_0}(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$ verschoben und anschließend mit dem Faktor $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ affin gestaucht;
- zuerst mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gestaucht und danach um $\overrightarrow{v_0}(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$ verschoben.

Welche Funktionsgleichungen ergeben sich in beiden Fällen? Unter welchen Bedingungen ist die Reihenfolge Stauchung - Verschiebung belanglos?

Aufgabe 1.24. Durch welche Streckung und kongruente Verschiebung wird die Gerade $f(x) = 0,5x + 1$ auf die Gerade $g(x) = 1,5x + 6$ abgebildet?

1.4. **Monotonie von Funktionen.** Eine reelle Funktion f heißt auf einem Intervall $\mathcal{I}$ *streng monoton wachsend* (streng einsinnig zunehmend), wenn für alle Elemente $x_1,\, x_2 \in \mathcal{I}$ gilt:

$$\text{Aus} \quad x_1 < x_2 \quad \text{folgt} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Eine reelle Funktion f heißt auf einem Intervall $\mathcal{I}$ *streng monoton fallend* (streng einsinnig abnehmend), wenn für alle Elemente $x_1,\, x_2 \in \mathcal{I}$ gilt:

$$\text{Aus} \quad x_1 < x_2 \quad \text{folgt} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Satz 1.25. *Jede in ihrem Definitionsbereich streng monotone Funktion ist umkehrbar.*

Die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f kann man wieder umkehren. Die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion f^{-1} ist gleich der Funktion f: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Die Funktionen f und f^{-1} sind *zueinander invers.*

Eine im Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{D}$ erklärte Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ heißt dort *konvex* ("von unten bauchig"), wenn

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{I}$$

erfüllt ist.

Eine im Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{D}$ erklärte Funktion $f : x \mapsto y = f(x)$ heißt dort *konkav* ("von unten hohl"), wenn

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{I}$$

erfüllt ist.

Der Funktionswert $f(x_0)$ einer reellen Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ heißt *globales Maximum*, wenn $f(x_0) \geq f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{D}$ gilt.

Der Funktionswert $f(x_0)$ einer reellen Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ heißt *globales Minimum*, wenn $f(x_0) \leq f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{D}$ gilt.

Die Stelle x_0 der Definitionsmenge, an der das Maximum bzw. Minimum angenommen wird, nennt man *Maximal* - bzw. *Minimalstelle.* Die entsprechenden Punkte des Graphs werden *Hochpunkt* bzw. *Tiefpunkt* genannt.

Der Funktionswert $f(x_0)$ einer reellen Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ heißt *lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung $\mathcal{U}(x_0)$ gibt, so daß $\forall\, x \in \mathcal{U}(x_0) \cap \mathbb{D}$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$.

Der Funktionswert $f(x_0)$ einer reellen Funktion f mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ heißt *lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung $\mathcal{U}(x_0)$ gibt, so daß $\forall\, x \in \mathcal{U}(x_0) \cap \mathbb{D}$ gilt $f(x_0) \leq f(x)$.

1.5. **Grenzwerte von Funktionen.** Gegeben sei die Funktion $f : x \mapsto y = f(x),\ x \in \mathcal{I}$, die an der Stelle $x = a,\ a \in \mathcal{I}$ näher untersucht werden soll. (Hierzu reicht die Kenntnis des Funktionswertes $f(a)$ in vielen Fällen nicht aus, ganz abgesehen davon, daß $f(a)$ gar nicht zu existieren braucht!). Um einen Überblick über das Verhalten der Funktion an der Stelle $x = a$ zu bekommen, bildet man irgendeine gegen a konvergierende Folge von Argumentwerte

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

und untersucht die Folge der zugehörigen Funktionswerte

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$$

auf ihre Konvergenz. Wenn dann **füt jede** gegen a konvergierende Argumentenfolge die zugehörige "Ordinatenfolge" ebenfalls konvergiert, so erklärt man diesen Grenzwert als *Grenzwert der Funktion an der Stelle $x = a$.*

Mit anderen Worten:

Konvergiert bei jeder Annäherung von x gegen a die zugehörige Folge der Funktionswerte $f(x)$ gegen einen Grenzwert G, so heißt G der Grenzwert der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = a$, d.i. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = G$.

Der Funktionswert an der Stelle a und der Grenzwert an der Stelle a sind **zwei ganz verschiedene Begriffe**! Den Funktionswert $f(a)$ erhält man (sofern er existiert!), indem man für x den Wert a in der Funktionsgleichung einsetzt. Den Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ erhält man (sofern er existiert!), indem man einen entsprechenden Grenzprozeß ausführt.

Schwierigkeiten bereitet hierbei die Tatsache, daß es für diesen Grenzprozeß keine einfache rechnerische Anweisung gibt.

Erstes Hauptkriterium für monotone Funktionen

Ist $f(x)$ in einem Intervall der Form $x \geq a$ erklärt und ist die Funktion dort **monoton** *und* **beschränkt**, *so strebt $f(x)$ für $x \to \infty$ einen bestimmten (endlichen) Grenzwert zu. Ist die Funktion $f(x)$* **monoton**, *aber* **nicht beschränkt**, *so strebt $f(x)$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem sie wächst oder fällt.*

Ist nämlich $\{x_n\}$ irgendeine **monotone**, gegen $+\infty$ strebende Zahlenfolge, deren Glieder sämtlich $\geq a$ sind, so bilden die zugehörigen Funktionswerte $y_n = f(x_n)$, falls $f(x)$ **beschränkt** ist, ihrerseits eine **monotone** und **beschränkte** Zahlenfolge $\{y_n\}$. Ist aber $h(x)$ **nicht beschränkt**, so ist auch die Folge $y_n = h(x_n)$ **nicht beschränkt**; sie ist wachsend oder fallend, je nachdem $h(x)$ wächst oder fällt.

Zweites Hauptkriterium für beliebige Funktionen

Ist $f(x)$ in einem Intervall der Form $a < x < a + \alpha$, $\alpha > 0$ erklärt, so gilt dann und nur dann eine Beziehung der Form $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = G$, wenn nach Wahl einer beliebigen positiven Zahl ε sich stets eine andere positive Zahl $\delta\,(< \alpha)$ so bestimmen läßt, daß stets $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ ausfällt, wenn nur x und x' **beide** *in dem (beiderseitsoffenen) Intervall $(a, a + \delta)$ gelegen sind (d.h. $|x - x'| < \delta$ ausfällt).*

Satz 1.26. *Ist bei einer bestimmten Bewegung von x $\lim f_1(x) = G$ und $\lim f_2(x) = G$ und erfüllt eine Funktion $f(x)$ für alle dabei in Betracht kommenden Werte von x die Bedingung $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, so ist (bei der selben Bedingung von x) auch $\lim f(x) = G$.*

Beispiel 1.27. Man untersuche die Funktion $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ an der Stelle $x = 0$.

Lösung. Da die Sinusfunktion für **alle** Argumentenwerte beschränkt ist, so gilt

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Die Nullstellen liegen bei

$$\frac{1}{x} = \pm\pi; \pm 2\pi; \pm 3\pi; ...,$$

d.h. die x-Achse wird **unendlich oft** geschnitten bei

$$x = \pm\frac{1}{\pi}; \pm\frac{1}{2\pi}; \pm\frac{1}{3\pi}; ...$$

Bei Annäherung an den Nullpunkt pendelt die Bildkurve immer schneller auf und ab, so daß die Funktionswerte keinem bestimmten Wert zustreben.

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{existiert nicht!}$$

Auch der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ existiert nicht, denn mit $\dfrac{1}{0}$ ist auch $\sin\left(\dfrac{1}{0}\right)$ sinnlos.

Die Funktion $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ besitzt also für $x = 0$ weder einen Funktionswert, noch einen Grenzwert.

Die Stelle $x = 0$ heißt eine *Oszillationsstelle* für die Funktion $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Beispiel 1.28. Die gebrochen-rationale Funktion $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ soll an der Stelle $x = 1$ untersucht werden.

Lösung. Setzt man $x = 1$ ein, so folgt $f(1) = \dfrac{0}{0}$, d.h. der Funktionswert an dieser Stelle existiert nicht.

Für alle $x \neq 1$ kann man den Nenner und den Zähler kürzen

$$y = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1.$$

Wie immer man sich mit x dem Wert 1 nähert, stets wird sich y dem Wert 2 nähern, so daß sich die Zahl 2 als Grenzwert an dieser Stelle ergibt.

Das Bild der gegebenen Funktion ist eine **punktierte Gerade**. Der fehlende Kurvenpunkt heißt eine *Lücke*. Für diese ist also der Grenzwert, nicht aber der Funktionswert vorhanden.

Beispiel 1.29. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1, \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

unterscheidet sich von der im vorigen Beispiel erörteten Funktion darin, daß sie an der Stelle $x = 1$ einen wohlbestimmten Funktionswert, nämlich $f(1) = 3$, besitzt, während ihr Grenzwert an dieser Stelle ebenfalls $G = 2$ ist.

Diese Funktion hat also an der Stelle $x = 1$ sowohl einen Funktionswert $(f(1) = 3)$ als auch einen Grenzwert $(\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2)$, aber beide sind voneinander verschieden.

Die Bildkurve ist eine **punktierte Gerade** mit *Einsiedlerpunkt*.

Beispiel 1.30. Man untersuche die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < 1, \\ 0 & x = 0, \\ x - 2 & x > 0, \end{cases}$$

in der Nähe des Nullpunktes.

Lösung. Der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ ist $f(0) = 0$ nach Erklärung der Funktion. Nähert man sich mit x **von rechts** gegen Null, also $x \to 0^+$, so streben die Funktionswerte gegen -2:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-2) = -2,$$

während die Annäherung **von links**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2) = 2$$

zur Folge hat.

Man spricht hier vom *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert.* Beide sind vorhanden, aber hier voneinander verschieden. Nur wenn sie übereinstimmen würden, besäße die Funktion einen Grenzwert an dieser Stelle.

Die Stelle $x = 0$ ist eine *endliche Sprungstelle* für die Bildkurve der Funktion.

Beispiel 1.31. Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Lösung. Für einen Punkt P des Einheitskreises ist die Maßzahl des zugehörigen Lotes durch $\sin x$, des zugehörigen Bogens durch x und des zugehörigen Tangentenabschnittes durch $\tan x$ gegeben:

$$|QP| = \sin x, \quad \widehat{SP} = x, \quad |SR| = \tan x.$$

Für alle x mit $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ gilt die Ungleichung $|QP| < \widehat{SP} < |SR|$, d.h.

$$(*) \qquad \sin x < x < \tan x,$$

oder auch

$$S_{\triangle SOP} < S_{\widehat{SOP}} < S_{\triangle SOR}.$$

Aus $(*)$ folgt bei Division durch $\sin x > 0$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Bildet man von jeder Größe den Kehrwert, so kehren sich auch die Anordnungszeichen um und man bekommt

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Läßt man jetzt x gegen Null streben, so bleibt die obere Schranke 1 konstant, während die untere Schranke mit $\cos x \to 1$ für $x \to 0^+$ auf die obere zustrebt. Somit bleibt für den gesuchten Grenzwert nur $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ übrig.

Da die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ gerade ist, gilt auch $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, und somit allgemein für jede Annäherung $x \to 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Die Funktion $\dfrac{\sin x}{x}$ besitzt bei $x = 0$ einen Grenzwert, aber keinen Funktionswert, da $f(0) = \dfrac{\sin 0}{0} = \dfrac{0}{0}$ nicht existiert.

Die Bildkurve hat für $x = 0$ eine *Lücke.*

1.6. **Rechenregeln für Grenzwerte.** Von den Grenzwerten sei stets ihre Existenz vorausgesetzt!

Satz 1.32. *Der Grenzwert der Summe zweier Funktionen ist gleich der Summe der Grenzwerte beider Funktionen.*

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)+f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Satz 1.33. *Der Grenzwert des Produktes zweier Funktionen ist gleich dem Produkt der Grenzwerte beider Funktionen.*

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x)f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x)\lim_{x\to x_0} f_2(x).$$

Ist speziell $f_1(x) = c = const,\ f_2(x) = f(x)$, so liefert Satz 2 $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Setzt man in Satz 1 $f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = cg(x),\ c = -1$, so bekommt man

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Satz 1.34. *Der Grenzwert eines Quotienten zweier Funktionen ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte beider Funktionen.*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)},$$

vorausgesetzt, daß $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) \neq 0$ *ist.*

Aufgabe 1.35. Rechnen Sie aus:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+5}{x^2+2x-1} = 3$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$

(6) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^5-x^3}{4x^2-1}$

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x-a}$

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\dfrac{2x^2+x-15}{2x^2-13x+20}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-2(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-5x^2+7x-16}{2x^3+6x^2+x+5}$

(11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos(2x)}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-bx}\}$

(15) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

(17) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}},\ \alpha = const \in \mathbb{R}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x+\alpha},\ \alpha = const \in \mathbb{R}$

$$(19)\ \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0} = \begin{cases} 0 & m > n \\ \dfrac{a_n}{b_m} & m = n \\ \pm\infty & m < n \end{cases}$$

1.7. **Stetigkeit von Funktionen.** Das Nichtvorhandensein eines Funktions- oder Grenzwertes an einer bestimmten Stelle bedeutet ein gewisses außergewönliches Verhalten der Funktion.

1.7.1. *Definitionen.* Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an einer Stelle $x = a$ *stetig*, wenn dort Funktionswert und Grenzwert existieren und beide übereinstimmen

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Ist eine Funktion **in jedem Punkte** eines Intervalles $\mathcal{I}$ stetig, so heißt sie *im Intervall $\mathcal{I}$ stetig.*

Anschaulich gesehen sind solche Funktionen stetig, deren Bildkurven einen ununterbrochenen Verlauf zeigen, also insbesondere **keine** Sprünge und Lücken aufweisen.

Die wichtigsten im vollen Erklärungsbereich stetige Funktionen sind:

(1) die ganz-rationalen Funktionen (Polynome)

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

speziell etwa
- die linearen Funktionen $y = a_1 x + a_0$,
- die quadratischen Funktionen $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$,
- die Potenzfunktionen $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(2) die Exponentialfunktionen

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

(3) die logarithmischen Funktionen

$$y = \log_a x, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

(4) die Sinus- und Kosinusfunktionen

$$y = \sin x, \quad y = \cos x;$$

(5) die Hyperbelfunktionen

$$y = \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad y = \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad y = \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Satz 1.36. *Summe, Differenz und Produkt zweier stetiger Funktionen ist wieder eine stetige Funktion.*

Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist stetig an allen Stellen, an denen die Nennerfunktion nicht verschwindet.

Aus diesem Satz folgt beispielsweise die Stetigkeit folgender Funktionen:

1. $y = \sin x + \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$
2. $y = x - \sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$
3. $y = e^{-x} \sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$
4. $y = \tan x \quad \forall\, x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z};$
5. $y = \cot x \quad \forall\, x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$
6. $y = \coth x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$
7. $y = \dfrac{2x-7}{x^2-8x+15} \quad \forall\, x \neq 3,\ x \neq 5.$

Ist eine Funktion $y = f(x)$ an einer Stelle $x = a$ nicht stetig, so heißt sie dort *unstetig*.

Da die Stetigkeit die Existenz des Funktionswertes, die Existenz des Grenzwertes und die Übereinstimmung beider fordert, so liegt eine Unstetigkeitsstelle in folgenden Fällen vor:

- *Oszilationsstelle*:
  $f(x_0)$ existiert nicht, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht;
- *Unendlichkeitsstelle* (unendlicher Sprung, Polstelle):
  $f(x_0)$ existiert nicht, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$;
- *Sprungstelle* (endlicher Sprung):
  $f(x_0)$ existiert, $\lim\limits_{x \to x_0{}^-} f(x)$ existiert, $\lim\limits_{x \to x_0{}^+} f(x)$ existiert, $\lim\limits_{x \to x_0{}^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0{}^+} f(x)$;
- *Lücke*:
  $f(x_0)$ existiert nicht, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert;
- *Einsiedlerpunkt*:
  $f(x_0)$ existiert, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Die Lücken nehmen unter allen Unstetigkeitsstellen eine Sonderstellung ein: man kann sie **beheben**. Hierzu braucht man nur den ausgelassenen Funktionswert zusätzlich vorzuschreiben, wodurch die Funktion an dieser Stelle stetig wird.

Z.B. die Funktion $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, die zunächst nur für $x \neq 0$ erklärt ist und wegen $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ an dieser Stelle eine Lücke hat, wird stetig, indem man den gefundenen Grenzwert als zusätzlichen Funktionswert erklärt. Die neue, auch bei $x = 0$ stetige Funktion, lautet damit

$$y = g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Bei dem Begriff der Stetigkeit ist es für manche Zwecke vorteilhaft zu unterscheiden, ob die Veränderliche sich **von links** oder **von rechts** her gegen die betrachtete Stelle bewegt:

Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall der Form $a < x \leq b$ definiert, so sagt man, sie sei an der Stelle b *von links her* oder *linksseitig stetig*, wenn wenigstens der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ vorhanden und gleich $f(b)$ ist.

Ist eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall der Form $a \leq x < b$ definiert, so sagt man, sie sei an der Stelle a *von rechts her* oder *rechtsseitig stetig*, wenn wenigstens der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ vorhanden und gleich $f(a)$ ist.

1.7.2. *Sätze über Funktionen, die in einem Intervall stetig sind.*

Satz 1.37. *Wenn eine Funktion $f(x)$ an einer Stelle ξ stetig und von Null verschieden ist, so hat sie in einer gewissen Umgebung dieser Stelle ξ beständig dasselbe Vorzeichen, d.h. $f(x)$ hat in einer* **genügend engen** *Nachbarschaft von ξ dasselbe Vorzeichen wie in ξ selbst.*

Beweis. Da $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ ist ($f(x)$ ist an der Stelle ξ stetig!), so kann nach Wahl von $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ so bestimmt werden, daß für alle x in $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ stets $|f(x)-f(\xi)| < \varepsilon$ ist (zweites Hauptkriterium für beliebige Funktionen!).

Da nun $f(\xi) \neq 0$ ist, also $|f(\xi)| > 0$, so kann man für ε die Zahl $|f(\xi)|$ nehmen. Dann ist für die genannten x

$$-|f(\xi)| < f(x) - f(\xi) < |f(\xi)| \;\Leftrightarrow\; f(\xi) - |f(\xi)| < f(x) < f(\xi) + |f(\xi)|,$$

also $f(x) > 0$ bzw. < 0, je nachdem $f(\xi) > 0$ oder < 0 ist. □

Der Satz behält seine Gültigkeit, wenn man nur **einseitige** Stetigkeit an der Stelle ξ voraussetzt und nur die entsprechende einseitige Umgebung dieser Stelle in Betracht zieht.

Satz 1.38. Satz von Bolzano. *Ist eine Funktion $f(x)$ in dem (beiderseits) abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und hat sie an den Enden des Intervalls Werte von entgegengesetzten Vorzeichen, so gibt es im Innern des Intervalls mindestens einen Wert ξ, für den $f(\xi) = 0$ ist.*

Beweis. Den Beweis erbringt man sehr einfach dadurch, daß man die in Rede stehende Zahl ξ nach der **Halbierungsmethode** erfaßt:

Man bezeichnet das Intervall $[a, b]$ mit $\mathcal{J}_0$ und faßt seinen Mittelpunkt $x_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ ins Auge. Ist die Funktion dort gleich Null, so ist die Behauptung des Satzes gewiß richtig.

Ist dagegen $f(x_1) \neq 0$, so hat genau eine der beiden Hälften von $\mathcal{J}_0$ die Eigenschaft, daß die Funktion $f(x)$ an den Intervallenden Werte von entgegengesetzten Vorzeichen annimmt. Diese Hälfte von $\mathcal{J}_0$ werde mit $\mathcal{J}_1$ bezeichnet. (Z.B. $\mathcal{J}_1 = [a, x_1]$.)

Auf das Intervall $\mathcal{J}_1$ können dieselben Schlüsse nocheinmal angewandt werden: Hat $f(x)$ im Mittelpunkt x_2 desselben den Wert Null, so ist die Behauptung richtig.

Ist der Wert der Funktion dort $\neq 0$ ($f(x_2) \neq 0$), so hat wieder genau eine der Hälften von $\mathcal{J}_1$ die Eigenschaft, daß die Funktion an den Intervallenden Werte von entgegengesetzten Vorzeichen annimmt. Diese Hälfte von $\mathcal{J}_1$ werde mit $\mathcal{J}_2$ bezeichnet (z.B. $\mathcal{J}_2 = [x_2, x_1]$), usf.

Kommt man bei diesem Verfahren nach **endlich vielen** Schritten zu einem Intervall $\mathcal{J}_p$, in dessen Mittelpunkt die Funktion den Wert Null hat, so ist die Behauptung gewiß richtig.

Ist dies nicht der Fall, so erhält man eine **Intervallschachtelung** $\{\mathcal{J}_n\}$ und durch diese eine Zahl ξ, von der sich nun leicht zeigen läßt, daß $f(\xi) = 0$ ist.

Denn sind a_n und a'_n die Enden des Intervalls $\mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}$, so ist stets $a_n \leq \xi \leq a'_n$ und es strebt also $a'_n - a_n$ gegen 0, wenn $n \to \infty$ strebt. Da nun aber die Zahlen a_n und a'_n sämtlich in $\mathcal{J}_0$ liegen und die Funktionswerte $f(a_n)$ und $f(a'_n)$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so heißt dies, daß **in jeder Umgebung** von ξ Punkte des Definitionsintervalls der Funktion $f(x)$ liegen, in denen $f(x)$ Werte von entgegengesetzten Vorzeichen hat. Laut Satz 1.35 **kann** daher $f(\xi)$ **nicht** von Null verschieden sein.

Da $f(\xi) = 0$ ist, muß $\xi \neq a$ und $\xi \neq b$ sein. □

Zusatz 1.39. *Eine algebraische Gleichung ungeraden Grades*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,\; n = 2k + 1,\; k \in \mathbb{N}_0,$$

hat mindestens eine reelle Wurzel.

Zusatz 1.40. *Wenn eine für $x \in [a, b]$ stetige Funktion $f(x)$ in diesem Bereich nicht verschwindet, so hat sie dort überall dasselbe Vorzeichen.*

Satz 1.41. Zwischenwertsatz. *Wenn $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ stetig ist und $f(a) \neq f(b)$ gilt, dann nimmt $f(x)$ in diesem Intervall jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.*

Beweis. Da $f(a) \neq f(b)$ ist, so gilt $f(a) < f(b)$ oder $f(a) > f(b)$.

Es sei $f(a) < f(b)$ und $\eta \in (f(a), f(b))$ eine beliebige Stelle. Die Funktion $g(x) = f(x) - \eta$ ist in $[a,b]$ stetig. Diese hat aber an den Enden des Intervalls Werte von entgegengesetzten Vorzeichen

$$g(a) = f(a) - \eta < 0, \quad g(b) = f(b) - \eta > 0.$$

Es ist also, laut dem Satz von Bolzano, an mindestens einer Stelle ξ im Innern desselben Intervalls $g(\xi) = f(\xi) - \eta = 0$. □

Wichtig! Der letzte Satz ist **nicht umkehrbar**. Es gibt auch **unstetige** Funktionen, die die im Satz ausgesprochene Eigenschaft haben können, z.B. die Funktion

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad -\frac{5}{\pi} < x < \frac{5}{\pi}.$$

Satz 1.42. *Eine in einem (beiderseits) abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetige Funktion ist dort beschränkt und besitzt je eine wohlbestimmte endliche untere und obere Grenze.*

Den Beweis erbringt man dadurch, daß man zeigt:

(1) Eine in einem abgeschlossenen Intervall **nicht beschränkte** Funktion ist an wenigstens einer Stelle des Intervalls **unstetig**.
Eine solche Stelle erfaßt man durch die Halbierungsmethode.

(2) Die durch die entsprechende Intervallschachtelung erfaßte Zahl ξ hat dann die Eigenschaft, daß die Funktion $f(x)$ in keiner (noch so kleinen) ε- Umgebung derselben beschränkt ist.
Dann ist aber für $x \to \xi$ gewiß **kein endlicher Grenzwert** $\lim\limits_{x \to \to \xi} f(x)$ vorhanden und also $f(x)$ **sicher unstetig** an der Stelle ξ.

Zusatz 1.43. *Zu jeder im Intervall $a \leq x \leq b$ nach oben (nach unten) beschränkten Funktion $f(x)$ gibt es eine eindeutig bestimmte obere (untere) Grenze $M_0 (L_0)$ folgender Art: Es ist*

(i) $f(x) \leq M_0$ $(f(x) \geq L_0)$ $\forall x \in (a,b)$;

(ii) $f(x) > M_0 - \delta$ $(f(x) < L_0 + \delta)$ *bei beliebigem* $\delta > 0$ *für mindestens einen Wert* $x \in [a,b]$.

$M_0\,(L_0)$ *ist die kleinste obere (die größte untere) Schranke von $f(x)$ in $[a,b]$.*

Satz 1.44. Satz von Weierstraß . *Wenn $f(x)$ in $[a,b]$ stetig ist, dann hat $f(x)$ in $[a,b]$ einen größten und einen kleinsten Funktionswert (also stets ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum).*

Satz 1.45. *Eine stetige Funktion von einer stetigen Funktion ist wieder stetig.*

Beweis. Es sei nämlich $y = f(\varphi(x))$; $u = \varphi(x)$ sei an der Stelle $x = \xi$ stetig und es werde $\tau = \varphi(\xi)$ gesetzt; weiter sei $y = f(u)$ an der Stelle $u = \tau$ stetig.

Da $\lim\limits_{u \to \tau} f(u) = f(\tau)$ ist, so gilt: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ so, daß $|f(u) - f(\tau)| < \varepsilon$ ist, jedesmal wenn $|u - \tau| < \delta$ ist.

Da $\lim\limits_{x \to \xi} \varphi(x) = \varphi(\xi) = \tau$ ist, so $\exists \delta' > 0$, so daß $|u - \tau| = |\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \delta$ ist, jedesmal wenn $|x - \xi| < \delta'$ ist.

Also, $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta' > 0:\ |f(\varphi(x)) - f(\varphi(\xi))| = |f(u) - f(\tau)| < \varepsilon$ wird für alle $x \in \mathcal{J}$, für welche $|x - \xi| < \delta'$ ist, d.h. es gilt

$$\lim_{x\to\xi} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to\xi}\varphi(x)) = f(\varphi(\lim_{x\to\xi} x)) = f(\varphi(\xi)).$$

$\square$

Aufgabe 1.46. Untersuchen Sie die Funktionen $y = f(x)$ auf Stetigkeit:

(1) $y = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$ (2) $y = \dfrac{x^2+3x}{x}$

(3) $y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ \sqrt{|x|-1}, & |x| > 1 \end{cases}$ (4) $y = \sqrt[x]{2}$ an der Stelle $x = 0$

(5) $y = \dfrac{\sqrt[x]{5}-1}{\sqrt[x]{5}+1}$ an der Stelle $x = 0$ (6) $y = e^{\sqrt{x}}$

(7) $y = |sign\ x|,\ sign\ x := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (8) $y = \arctan(x^2)$

(9) $y = \ln(\sin x)$ (10) $y = e^{\sin x}$

(11) $y = \sin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ (12) $y = \cos(2x^3 + e^{5x^2} + 3x)$

(13) $y = \{u(x)\}^{v(x)}$ (14) $y = e^{v(x)\ln(u(x))}$

Aufgabe 1.47. Bestimmen Sie in der Funktion $f(x)$ die Konstante c so, daß $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{4x^2-1}, & x \neq \frac{1}{2}; \\ \dfrac{1}{cx+2}, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Aufgabe 1.48. Bestimmen Sie in der Funktion $f(x)$ die Konstante c so, daß $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3; \\ c^2x, & x = 3. \end{cases}$$

1.7.3. *Umkehrung einer monotonen und stetigen Funktion.*

Satz 1.49. *Es sei $\mathcal{J}$ ein beliebiges Intervall und $y = f(x)$ eine dort definierte, stetige und im engeren Sinn (streng) monoton wachsende Funktion. Dann erfüllt die Menge der Funktionswerte y ihrerseits ein intervall $\mathcal{J}'$.*

Ist η eine spezielle Stelle des Intervalls $\mathcal{J}'$, so gibt es genau eine Stelle ξ in $\mathcal{J}$, für welche $f(\xi) = \eta$ ist. Das Intervall $\mathcal{J}'$ ist überdies genau dann links bzw. rechts abgeschlossen, wenn das Entsprechende für $\mathcal{J}$ der Fall ist.

Beweis. Ist λ die untere und μ die obere Grenze von $f(x)$ in $\mathcal{J}$ (Es ist auch $\lambda = -\infty$, bzw. $\mu = +\infty$ zugelassen!), so ist $\lambda < \mu$ und $\mathcal{J}' = (\lambda, \mu)$.

Ist η irgendeine innere Stelle von $\mathcal{J}'$, also $\lambda < \eta < \mu$, so gibt es infolge der Definition von λ und μ je eine Stelle a bzw. b in $\mathcal{J}$, für welche $f(a) < \eta$ bzw. $f(b) > \eta$ ist. Da aber $f(x)$ nach Voraussetzung in $a \leq x \leq b$ stetig ist, so liefert der Zwischenwertsatz sofort eine Stelle ξ, für die $f(\xi) = \eta$ ist. Da endlich bei einer im engeren Sinne monotonen Funktion für $\xi \neq \xi'$ auch $f(\xi) \neq f(\xi')$ ist, so kann derselbe Wert η **nicht** an zwei verschiedenen Stellen angenommen werden.

Ist nun $\mathcal{J}$ linksabgeschlossen, und ist c der linke Endpunkt, so muß offenbar $f(c) = \lambda$ (bei einer monoton steigenden Funktion!) sein, während dieser Wert λ von $f(x)$ **nicht** angenommen werden kann, wenn $\mathcal{J}$ nach links hin offen ist.

Ganz entsprechendes gilt, wenn $f(x)$ im engeren Sinn monoton fällt. $\square$

Bemerkung 1.50. Da in diesem Fall die Abbildung von $\mathcal{J}$ auf $\mathcal{J}'$ eineindeutig ist, so kann man x als eine im Intervall $\mathcal{J}'$ definierte Funktion von y ansehen, d.h. $x = \varphi(y)$, indem man festsetzt, daß jedem $y \in \mathcal{J}'$ derjenige auf Grund des bewiesenen Satzes eindeutig bestimmte Wert $x \in \mathcal{J}$ als Funktionswert $\varphi(y)$ zugeordnet werden soll, für den $f(x) = y$ ist.

Es gilt also der folgende

Satz 1.51. *Ist $\mathcal{J}$ ein beliebiges Intervall, ist $y = f(x)$ eine dort definierte, stetige und im engeren Sinn monotone Funktion, ist $\mathcal{J}'$ das Intervall zwischen der unteren und oberen Grenze von $f(x)$, so gibt es stets genau eine in diesem Intervall $\mathcal{J}'$ definierte Funktion x von y, durch die jedem $y \in \mathcal{J}'$ gerade derjenige Wert $x \in \mathcal{J}$ zugeordnet wird, für den $f(x) = y$ ist.*

Diese Funktion ist die Umkehr- oder inverse Funktion von $f(x)$.

1.8. **Funktionsarten.** Es liege die Funktion $f = \{(x, y) : x \in \mathcal{A} \wedge y \in \mathcal{B}, x \mapsto y = f(x)\}$ vor, d.h. die Menge aller mittels der Vorschrift $x \mapsto y = f(x)$ eindeutig zugeordneten Elementenpaare (x, y) mit $x \in \mathcal{A}$ und $y \in \mathcal{B}$.

Man unterscheidet folgende Funktionen:

(1) die *reelle* Funktion: $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} \wedge \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$;
(2) die *algebraische* Funktion: Die analytische Zuordnungsvorschrift dieser **reellen** Funktion auf das Argument $(f : x \mapsto y = f(x))$ besteht in der Anwendung der **rationalen** Grundrechenoperationen und des **Wurzelziehens**;
(3) die *ganz-rationale* Funktion (das Polynom): Die Koeffizienten und das Argument sind **nur** durch Addition, Subtraktion, Multiplikation verknüpft;
(4) die *gebrochen-rationale* Funktion: Sie ist durch einen Quotienten zweier Polynome definiert;
    Ist das Nennerpolynom ein konstantes Polynom, so ist die gebrochen-rationale Funktion eine ganz-rationale Funktion;
(5) die *transzendente* Funktion: Sie ist eine *nicht-algebraische* reelle Funktion;
    Z.B. $y = ax^2 + \sin x$; $y = 3^x$; $y = \log_a x$; ...
(6) die *komplexwertige* Funktion: $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} \wedge \mathcal{B} \subseteq \mathbb{C}$.
    Z.B. $y = \sqrt{-x^2}$; $y = a^{ix}$; $y = \sqrt{-a^2 - x^2}$; ...

1.8.1. *Polynome.* Ganz-rationale Funktionen bezeichnet man kurz als *Polynome* in der betreffenden Veränderlichen.

Jedes Polynom in einer Veränderlichen x kann durch einen Ausdruck der Form, der sogenannten *Normalform*,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \quad n \in \mathbb{R}_0$$

dargestellt werden, indem a_0, a_1, a_2, ..., a_n reelle Konstanten bedeuten.

Den Exponenten n des höchsten Gliedes a_nx^n bezeichnet man als *den Grad* des Polynoms.

$n = 0$: Die Funktion $y = a_0$ ist eine Konstante.
$n = 1$: Die Funktion $y = a_0 + a_1x$ ist eine lineare Funktion.
$n = 2$: Die Funktion $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ist eine quadratische Funktion.
$a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$, $a_n = 1$: Die Funktion $y = x^n$ ist die Potenzfunktion.

Zwei Polynome $P(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, $Q(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^k$ sollen *identisch* heißen, wenn folgendes gilt:

(1) $n = \, Grad\, P(x) \, = \, Grad\, Q(x) \, = m;$

(2) $a_i = b_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$

Die nummerische Bestimmung von Polynomwerten

Gegeben sei das Polynom $P(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, $x \in \mathbb{R}$. Man bestimme den Polynomwert an der Stelle $x = x_0$.

1. Schritt: Man wandelt den Normalform-Term von

$$P(x_0) = a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-2}x_0^{n-2} + ... + a_1x_0 + a_0$$

in die Gestalt

$$P(x_0) = \{...\{[(a_nx_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2}]x_0 + a_{n-3}\}x_0 + ... + a_1\}x_0 + a_0$$

um und die Rechnung rollt von innen heraus auf.

2. Schritt:

$$\begin{array}{lll} a_nx_0 + a_{n-1} & =: & a'_{n-1}, \\ a'_{n-1}x_0 + a_{n-2} & =: & a'_{n-2}, \\ a'_{n-2}x_0 + a_{n-3} & =: & a'_{n-3}, \\ ...... & & ..... \\ a'_1x_0 + a_0 & = & P(x_0). \end{array}$$

Diesen Rechnungsgang kann man durch folgendes Rechenschema, das sogenannte *Horner - Schema* (1774-1834), darstellen.

Aufstellung des Horner - Schema:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	...	a_1	a_0
		$+$	$+$	$+$	...	$+$	$+$
x_0		x_0a_n	$x_0a'_{n-1}$	$x_0a'_{n-2}$	...	$x_0a'2$	$x_0a'_1$
	a_n	a'_{n-1}	a'_{n-2}	a'_{n-3}	...	a'_1	$P(x_0)$

Beispiel 1.52. Berechnen Sie den Wert des Polynoms

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 4x + 10$$

an der Stelle $x_0 = -4$.

Lösung.

	1	0	-2	1	-4	10
		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
-4		-4	16	-56	220	-864
	1	-4	14	-55	216	-854

Der gesuchte Polynomwert ist also $P(-4) = -854$.

Satz 1.53. *Summe und Differenz zweier Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ ergeben jeweils wieder ein Polynom. Der Grad des Summen- (Differenz-) Polynoms ist dabei höchstens gleich dem Grad des höhergradigen Polynoms, d.h.*

$$\text{Grad}\,\{P(x) \pm Q(x)\} \leq \max\left(\text{Grad}\,P(x),\,\text{Grad}\,Q(x)\right).$$

Beweis. Es seien $P(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, $Q(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^k$, $n \geq m$. Wir schreiben beide Polynome bis zur n-ten Potenz:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n;$$
$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m + b_{m+1}x^{m+1} + ... + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n,$$
$$b_{m+1} = b_{m+2} = ... = b_n := 0.$$

Dann ist

$$P(x) \pm Q(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + ... + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + (a_n \pm b_n)x^n,$$

d.h. $P(x) \pm Q(x)$ sind jeweils **wieder** Polynome. Der Grad der Verknüpfungspolynome kann dabei sicher nicht größer als n werden, wohl aber kleiner als n, falls bei

$$P(x) + Q(x) \;\text{ bzw. }\; P(x) - Q(x) \quad a_n + b_n = 0 \;\text{ bzw. }\; a_n - b_n = 0$$

gilt. □

Satz 1.54. *Das Produkt zweier Polynome $P(x)$, $Q(x)$ ist wieder ein Polynom, dessen Grad gleich der Summe der Grade beider Faktorpolynome ist:*

$$\text{Grad}\,\{P(x)\,Q(x)\} = \text{Grad}\,P(x) + \text{Grad}\,Q(x).$$

Beweis. Mit $P(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i,\ \ Q(x) := \sum_{k=0}^{m} b_k\, x^k$ erhalten wir

$$P(x)\, Q(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + ... + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0,$$

d.i. **wieder** ein Polynom dessen Grad gleich $n + m$ ist. □

Satz 1.55. Hilfssatz aus der Algebra. *Ein ganzer rationaler Ausdruck, der eine Normalform vom Grade n besitzt, kann niemals mehr als n verschiedene Nullstellen haben.*

Der *Beweis* ergibt sich durch **Induktion**:

I^{er} **Schritt**. Die Behauptung ist richtig für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$. Denn

- eine von Null verschiedene Konstante ist für keinen Wert von x gleich 0;
- der Ausdruck $a_0 + a_1 x$ wird, wenn $a_1 \neq 0$ ist, nur dann gleich 0, wenn $x = -\dfrac{a_0}{a_1}$ ist, d.h. kann in der Tat nur für einen einzigen Wert der Veränderlichen x verschwinden;
- der Ausdruck $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ wird, falls $a_1^2 - 4a_2 a_0 \geq 0$ ist, nur dann gleich 0, wenn $x = \dfrac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$ oder $x = \dfrac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$ ist, d.h. kann in der Tat höchstens für zwei verschiedene Werte der Veränderlichen x verschwinden.

II^{ter} **Schritt**. Wenn die Behauptung für jedes Polynom richtig ist, derer Grad eine gewisse natürliche Zahl n nicht überschreitet, so gilt sie auch für jedes Polynom, das eine Normalform des Grades $n + 1$ besitzt.

Ist nämlich $P(x) := \sum_{i=0}^{n+1} a_i\, x^i,\ a_{n+1} \neq 0$, und x_0 eine Nullstelle von $P(x)$, d.h. $P(x_0) = 0$, so ist

$$a_0 = -\{a_{n+1} x_0^{n+1} + a_n x_0^n + ... + a_2 x_0^2 + a_1 x_0\}.$$

Daher muß für jeden Wert von x die Gleichung gelten:

$$(*) \qquad P(x) = a_{n+1}(x^{n+1} - x_0^{n+1}) + a_n(x^n - x_0^n) + ... + a_2(x^2 - x_0^2) + a_1(x - x_0).$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} x^{n+1} - x_0^{n+1} &= (x - x_0)(x^n + x_0 x^{n-1} + x_0^2 x^{n-2} + ... + x_0^{n-1} x + x_0^n); \\ x^n - x_0^n &= (x - x_0)(x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + ... + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1}); \\ ... & \quad ... \\ x^2 - x_0^2 &= (x - x_0)(x + x_0). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in $(*)$ erhält man für $P(x)$ eine Darstellung der Form

$$(**) \qquad P(x) = (x - x_0)\{a_{n+1} x^n + b_n x^{n-1} + ... + b_2 x + b_1\},$$

in der $b_1, b_2, ..., b_n$ Konstante bedeuten.

Der erste Faktor in $(**)$ verschwindet **nur für einen Wert** x_0 der Veränderlichen x, und der zweite Faktor nach Voraussetzung **höchstens für** n **weitere Werte** von x. Daher kann $P(x)$ nicht für mehr als $n + 1$ verschiedene Werte von x gleich Null werden. □

Satz 1.56. *Eine ganz-rationale Funktion $P(x)$ kann immer nur auf eine einzige Weise als Polynom in der Normalform dargestellt werden.*

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene ganz-rationale Ausdrücke in der Normalform, etwa

$$P'(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad P''(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1 x + b_0;\ n > k,$$

welche beide die Funktion $P(x)$ darstellen, so müßte die Differenz

$$P'(x) - P''(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + (a_k - b_k)x^k + ... + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0$$

für jeden Wert von x gleich Null sein und dabei wäre **mindestens ein** Koeffizient von Null verschieden und ihr Grad höchstens gleich n. Laut dem Hilfssatz aus der Algebra könnte $P'(x) - P''(x)$ **niemals mehr als** n **verschiedene** Nullstellen haben und man käme zu einem Widerspruch. Die gemachte Annahme ist zu verwerfen. □

Teilbarkeit von Polynomen

Der Quotient zweier Polynome ist im allgemeinen nicht wieder ein Polynom.

Z.B., es seien $P(x) = ax^2 + bx + c,\ Q(x) = x \neq 0.$ Dann ist

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = ax + b + \frac{c}{x}.$$

Man sagt, ein Polynom $P(x)$ in einer Veränderlichen sei durch ein zweites, vom Nullpolynom verschiedenes, Polynom $Q(x)$ derselben Veränderlichen *teilbar*, wenn $P(x)$ als Produkt von $Q(x)$ mit einem dritten Polynom der nämlichen Veränderlichen dargestellt werden kann; wenn es also ein Polynom $S(x)$ von solcher Beschaffenheit gibt, daß die Gleichung $P(x) = Q(x)\,S(x)$ besteht.

Allgemein ergibt sich für den Quotienten zweier Polynome $P(x)$ und $Q(x) \neq 0$, falls *Grad* $P(x) \geq$ *Grad* $Q(x)$ gilt, die Zerlegungsformel

$$P(x) = Q(x)\,S(x) + R(x),\ \mathit{Grad}\ S(x) = \mathit{Grad}\ P(x) - \mathit{Grad}\ Q(x),\ \mathit{Grad}\ R(x) < \mathit{Grad}\ Q(x).$$

Brüche mit Polynomen in Zähler und Nenner heißen *Polynombrüche*.

Ist der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der des Nennerpolynoms, so spricht man von einem *echten*, andernfalls von einem *unechten* Polynombruch.

Satz 1.57. *Hat ein Polynom $P(x)$ die Wurzel x_0, so ist es durch die Differenz $(x - x_0)$ teilbar.*

Wegen des Beweises vgl. **Hilfssatz aus der Algebra**, II^{ter} Schritt.

Die Division eines Polynoms durch $(x - x_0)$ kann mit dem Horner-Schema vorgenommen werden:

$$\begin{array}{rllll}
 & (a_n x^n & + a_{n-1}x^{n-1} & + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0) : (x - x_0) = & \\
- & (a_n x^n & - x_0 a_n x^{n-1}) & & \\
 & -- & ----- & & \\
 & & a'_{n-1}x^{n-1} & + a_{n-2}x^{n-2} & \\
 & - & (a'_{n-1}x^{n-1} & - x_0 a'_{n-1}x^{n-2}) & \\
 & & ---- & ------ & \\
 & & & a'_{n-2}x^{n-2} + ... & \\
 & & & = \ a_n x^{n-1} + a'_{n-1}x^{n-2} + a'^{n-2}x^{n-3} + ... + a'_1 + \dfrac{R}{x - x_0} &
\end{array}$$

Hier ist

$$a'_{n-1} := a_{n-1} + x_0 a_n,\ a'_{n-2} := a_{n-2} + x_0 a'_{n-1}, ..., a'_1 := a_1 + x_0 a'_2,\ R := P(x_0),$$

d.h. der Polynomwert an der Stelle x_0 ist gleich dem bei Division durch $(x - x_0)$ verbleibenden Rest.

Aufgabe 1.58. (1) Man führe die Polynomdivision mit dem Horner-Schema aus:

(a) $(4x^3 - 2x^2 + 7x - 10) : (x + 2)$;

(b) $(x^7 - 3x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5) : (x - 2)$;

(c) $(x^6 - 3x^4 - 2x^3 - x + 3) : (x + 1)$;

(d) $(x^5 - a^5) : (x - a)$.

(2) Dividieren Sie aus:

(a) $(x^4 - 2x^3 + x^2 + 1) : (x^2 - 2x + 2)$;

(b) $(2x^5 - 7x^3 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x - 1)$.

1.8.2. *Gebrochen-rationale Funktionen.* Als *gebrochen-rationale Funktion* bezeichnen wir die durch einen Quotienten zweier Polynome $P_n(x)$ und $Q_m(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $Q_m(x) \neq 0$ definierte Funktion

$$x \mapsto y = f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad Grad\ Q_m(x) \geq 1.$$

Die durch Polynombrüche definierten Abbildungen bezeichnet man mit dem Oberbegriff *rationale Funktionen.*

$Grad\ Q(x) = m = 0 \ \Leftrightarrow\ f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ganz-rationale Funktion;

$Grad\ Q(x) = m \geq 1 \ \Leftrightarrow\ f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ gebrochen-rationale Funktion.

Eine Nullstelle k-ter Ordnung des Zählerpolynoms, die nicht zugleich Nullstelle des Nennerpolynoms ist, heißt eine *Nullstelle k-ter Ordnung* der gebrochen-rationalen Funktion.

Eine Nullstelle k-ter Ordnung des Nennerpolynoms, die nicht zugleich Nullstelle des Zählerpolynoms ist, heißt ein *Pol k-ter Ordnung* der Funktion.

Eine gemeinsame Nullstelle von Zähler- und Nennerpolynom heißt eine *Lücke* der Funktion.

Polstellen und Lücken gehören demnach **nicht** zum Definitionsbereich der gebrochen-rationalen Funktion; diese hat dort keinen Funktionswert. Die Funktion zeigt aber gerade dort ein **charakteristisches Verhalten**.

1.8.3. *Die Partialbruchzerlegung.* Es sei $f(x) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{s=0}^n b_s x^s}$. Ist $m \geq n$, so wird der Polynombruch durch Ausdividieren in ein Polynom und eine echte gebrochen-rationale Funktion zerlegt, also

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{s=0}^n b_s x^s} = S(x) + \frac{R(x)}{\sum_{s=0}^n b_s x^s},$$

worin $S(x)$ und $R(x)$ Polynome sind und $Grad\ R(x) < n$ ist.

Prinzip: Der echte Polynombruch wird in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt und jeder Partialbruch wird einzeln untersucht.

Die Aufspaltung in Partialbrüche erfordert zunächst die Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms.

I^{er} **Fall**: *Das Nennerpolynom hat lauter einfache reelle Nullstellen.*

Vorgelegt: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *Grad* $P(x) <$ *Grad* $Q(x)$; $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.

Ansatz: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{x - x_1} + \dfrac{A_2}{x - x_2} + ... + \dfrac{A_n}{x - x_n}$.

Die Koeffizienten $A_1, A_2, ..., A_n$ werden in diesem Fall am leichtesten dadurch bestimmt, daß man die Ansatzgleichung mit dem Hauptnenner durchmultipliziert und dann für x nachenander die Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n$ einsetzt.

Beispiel 1.59. (1) $f(x) = \dfrac{4x - 9}{x^2 - 8x + 15}$.

I^{er} **Schritt**: Nullstellenbestimmung des Nennerpolynoms

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 3 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3).$$

II^{ter} **Schritt**: Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{4x - 9}{x^2 - 8x + 15} = \frac{A_1}{x - 5} + \frac{A_2}{x - 3}$$

und Koeffizientenbestimmung

$$\begin{aligned}
&4x - 9 = A_1(x - 3) + A_2(x - 5),\ \forall\, x \in \mathbb{R}:\\
&x = 5 \Rightarrow 11 = 2A_1 \Rightarrow A_1 = 11/2;\\
&x = 3 \Rightarrow 3 = -2A_2 \Rightarrow A_2 = -3/2 \Rightarrow\\
&\frac{4x - 9}{x^2 - 8x + 15} = \frac{11}{2(x - 5)} - \frac{3}{2(x - 3)}.
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}$.

I^{er} **Schritt**: Ausführung der Division

$$(2x^4 - x^2 - 5x + 1) : (x^3 - x^2 - 2x) = 2x + 2 + \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}.$$

II^{ter} **Schritt**: Nullstellenbestimmung

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1 \Rightarrow$$

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x - 2)(x + 1).$$

III^{ter} **Schritt**: Ansatz für Partialbruchzerlegung

$$\frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{x + 1},$$

und Koeffizientenbestimmung

$$5x^2 - x + 1 = A_1(x-2)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-2),\ \forall\, x \in \mathbb{R}:$$

$x = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = -1/2;$

$x = 2 \;\Rightarrow\; A_2 = 19/6;$

$x = -1 \;\Rightarrow\; A_3 = 7/3 \;\Rightarrow$

$$\frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{-1}{2x} + \frac{19}{6(x-2)} + \frac{7}{3(x+1)}.$$

II^{ter} **Fall**: *Das Nennerpolynom hat lauter reelle Nullstellen, die auch mehrfach auftreten.*

Vorgelegt: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *Grad* $P(x) <$ *Grad* $Q(x)$;

$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r},\ k_1 + k_2 + ... + k_r = Grad\ Q(x),\ r \in \mathbb{N}.$

Ansatz:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\\ &+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + ...\\ &+ \frac{A_{r1}}{x-x_r} + \frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2} + ... + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}}.\end{aligned}$$

Beispiel 1.60. (1) $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}.$

Der Ansatz lautet

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{21}}{x+1} \;\Rightarrow$$

$$2x + 3 = A_{11}(x-1)(x+1) + A_{12}(x+1) + A_{21}(x-1)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}:$$

$x = 1 \;\Rightarrow\; A_{12} = 5/2;$

$x = -1 \;\Rightarrow\; A_{21} = 1/4;$

$x = 0$ (beliebiger Wert) $\;\Rightarrow\; A_{11} = -1/4 \;\Rightarrow$

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{-1}{4(x-1)} + \frac{5}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)}.$$

(2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - 4}{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16}.$

Lösung. $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x-2)^4 \;\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-2} + \frac{A_{12}}{(x-2)^2} + \frac{A_{13}}{(x-2)^3} + \frac{A_{14}}{(x-2)^4},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 + x - 4 = A_{11}(x-2)^3 + A_{12}(x-2)^2 + A_{13}(x-2) + A_{14},\ \forall\, x \in \mathbb{R}:$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \ \Rightarrow \ -4 = -8A_{11} + 4A_{12} - 2A_{13} + A_{14}; \\ x = 2 \ \Rightarrow \ -2 = A_{14}; \\ x = 1 \ \Rightarrow \ -4 = -A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}; \\ x = 3 \ \Rightarrow \ 8 = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \ A_{11} = 1, \ A_{12} = 4, \ A_{13} = 5, \ A_{14} = -2 \ \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3} + \frac{-2}{(x-2)^4}.$$

III^{ter} **Fall:** *Das Nennerpolynom besitzt lauter einfache komplexe Nullstellen*
Es werden je zwei zueinander konjugiert komplexe Nullstellen zu einem quadratischen Faktor zusammengefaßt, z.B.:

$$x_1 := \alpha_1 + i\beta_1, \ x_2 := \alpha_1 - i\beta_1; \ \alpha_1, \ \beta_1 \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ (x - x_1)(x - x_2) = (x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2.$$

Vorgelegt: $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $\quad$ *Grad* $P(x) <$ *Grad* $Q(x) = 2p, \ p \in \mathbb{N}$, und
$Q(x) = [(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2][(x-\alpha_2)^2 + \beta_2^2]...[(x-\alpha_p)^2 + \beta_p^2]$.

Ansatz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{A_2 x + B_2}{(x-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + ... + \frac{A_p x + B_p}{(x-\alpha_p)^2 + \beta_p^2}.$$

Beispiel 1.61. (1) $f(x) = \dfrac{6x - 11}{x^2 - 8x + 25}$.

Lösung.

$$x^2 - 8x + 25 = (x-4)^2 + 3^2 \ \Rightarrow$$

$$\frac{6x-11}{x^2 - 8x + 25} = \frac{6x-11}{(x-4)^2 + 3^2} \ \Rightarrow \ A_1 = 6 \wedge B_1 = -11.$$

(2) $f(x) = \dfrac{2x-7}{(x^2+1)(x^2-2x+4)}$.

Lösung.

$$(x^2+1)(x^2-2x+4) = (x^2+1)[(x-1)^2 + 3] \ \Rightarrow$$

$$\frac{2x-7}{(x^2+1)(x^2-2x+4)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x-1)^2 + 3} \ \Rightarrow$$

$$2x - 7 = (A_1 + A_2)x^3 + (B_1 + B_2 - 2A_1)x^2 + (4A_1 + A_2 - 2B_1)x + 4B_1 + B_2, \ \forall \ x \in \mathbb{R}:$$

$$A_1 + A_2 = 0, \ B_1 + B_2 - 2A_1 = 0, \ 4A_1 + A_2 - 2B_1 = 2, \ 4B_1 + B_2 = -7 \ \Rightarrow$$

$$A_1 = -\frac{8}{13}, \ A_2 = \frac{8}{13}, \ B_1 = -\frac{25}{13}, \ B_2 = \frac{9}{13} \ \Rightarrow$$

$$\frac{2x-7}{(x^2+1)(x^2-2x+4)} = \frac{-8x-25}{13(x^2+1)} + \frac{8x+9}{13[(x-1)^2+3]}.$$

Aufgabe 1.62.

$$(1)\quad f(x)=\frac{-3x+23}{x^2+x-12},\qquad (2)\quad f(x)=\frac{1}{9x^2-6x-8},$$
$$(3)\quad f(x)=\frac{x^2+4}{x^3-x},\qquad (4)\quad f(x)=\frac{-x^2-14x-9}{(x^2-1)^2},$$
$$(5)\quad f(x)=\frac{1}{x^2+7x+15},\qquad (6)\quad f(x)=\frac{18x-13}{x^2+14x+58}.$$

IV^{ter} **Fall:** *Das Nennerpolynom besitzt lauter komplexe Nullstellen, die auch mehrfach auftreten*

Vorgelegt: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *Grad* $P(x)<$ *Grad* $Q(x)=2p,\ p\in\mathbb{N}$, und

$Q(x)=[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{k_1}[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]^{k_2}...[(x-\alpha_r)^2+\beta_r^2]^{k_r},\ k_1+k_2+...+k_r=2p,\ r\in\mathbb{N}.$

Ansatz:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}x+B_{11}}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\frac{A_{12}x+B_{12}}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^2}+...+\frac{A_{1k_1}x+B_{1k_1}}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{k_1}}\\ &+\frac{A_{21}x+B_{21}}{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2}+\frac{A_{22}x+B_{22}}{[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]^2}+...+\frac{A_{2k_2}x+B_{2k_2}}{[(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]^{k_2}}+...+\\ &+\frac{A_{r1}x+B_{r1}}{(x-\alpha_r)^2+\beta_r^2}+\frac{A_{r2}x+B_{r2}}{[(x-\alpha_r)^2+\beta_r^2]^2}+...+\frac{A_{rk_r}x+B_{rk_r}}{[(x-\alpha_r)^2+\beta_r^2]^{k_r}}.\end{aligned}$$

1.9. Der Begriff des Differentials.

1.9.1. *Steigung einer Gerade.* Sind (x_1,y_1) und (x_2,y_2) die Koordinaten irgend zweier Punkte A_1, A_2 der betrachteten Gerade g in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem, so benutzt man den *Differenzquotienten* $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ als ein **Maß** für die *Steigung der Gerade.*

Dieser Quotient hat einen von der Wahl der beiden Punkte A_1, A_2 unabhängigen Wert.

1.9.2. *Differenzierbarkeit und Steigung einer Funktion.* Die Funktion $y=f(x)$ sei in einem Bereich erklärt, dem der Punkt x_0 als innerer Punkt angehört, und es sei $y_0=f(x_0)$.

Wenn man das Verhalten der Funktion $f(x)$ in der Umgebung der Stelle x_0 genauer beschreiben will als nur das Feststellen ihres Wertes für $x=x_0$ selbst, so liegt es nahe zu fragen, wie $f(x)$ auf eine Änderung der unabhängigen Veränderlichen x anspricht. Dazu vergleicht man die *Funktionsdifferenz* $\Delta y=f(x_1)-f(x_0)$ (also die Änderung, die der Funktionswert $f(x)$ erfährt, wenn man von dem Argument x_0 zu einem benachbarten Wert x_1 übergeht) mit der Änderung $\Delta x=x_1-x_0$ des Argumentes selbst.

Die Zahl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ heißt der *Differenzquotient* von $f(x)$ (für x_0 und x_1), stellt den *relativen Zuwachs* von $f(x)$ im Bereich $[x_0,x_1]$ dar und ist als *das Maß* für die *Empfindlichkeit* zu betrachten, *mit der* $f(x)$ *auf die Änderung* Δx *der unabhängigen Veränderlichen reagiert.* (Es kommt nur auf das Verhältnis $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ vom Zuwachs der Funktion zum Zuwachs des Argumentes, also *auf den relativen Zuwachs* von y.)

Der *Differenzquotient* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ stellt also ein um so besseres Maß für die Empfindlichkeit der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 dar, je kleiner Δx ist, und da andererseits Δx als Nenner des Differenzquotienten stets von Null verschieden sein muß, ist es folgerichtig anzunehmen, daß das Verhalten der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 durch den Grenzwert von $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \to 0$ gekennzeichnet werde - seine Existenz vorausgesetzt.

Erklärung 1.63. Die in der Umgebung der Stelle x_0 erklärte Funktion $f(x)$ ist im Punkt x_0 *differenzierbar*, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0, x \neq x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vorhanden ist. Dieser mit $f'(x_0)$ bezeichnete Grenzwert heißt *die Ableitung* von $f(x)$ an der Stelle x_0 und stellt das Maß für die Empfindlichkeit dar, mit der die Funktion auf eine Änderung ihres Argumentes reagiert.

Eine Funktion *ableiten* oder *differenzieren* bedeutet also soviel wie den Grenzwert ihres Differenzquotienten für gegen Null strebendes Δx berechnen.

Eine Funktion heißt *in einem Bereich differenzierbar*, wenn sie in allen seinen Punkten differenzierbar ist. Dabei kann es **nur** um einen offenen Bereich handeln, da Differenzierbarkeit in einem Punkt **stets voraussetzt**, daß die Funktion in einer **Umgebung** dieses Punktes erklärt ist.

Der Differenzquotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ist noch *der Anstieg der Sekante* durch die Punkte P_0 und P_1 oder auch *der mittlere Anstieg der Kurve* im Bereich $[x_0, x_1]$, also der Tangens des Neigungswinkels θ, den diese Sekante mit der $+x$-Achse einschließt.

Wenn die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 eine Ableitung hat, dann **nähert sich** die Sekante durch P_0 und P_1 **einer Grenzlage**, nämlich der Gerade durch P_0 mit dem Anstieg $f'(x_0)$, und diese Gerade heißt *die Tangente der Kurve* $y = f(x)$ im Punkt P_0 mit der Abszisse x_0.

$f'(x_0)$ heißt noch *die Steigung der Kurve an der Stelle* P_0, oder *die Steigung der Funktion* $f(x)$ *an der Stelle* x_0.

Wichtig: Die Differenzierbarkeit ist - wie auch die Stetigkeit - eine **lokale** Eigenschaft der Funktion.

Satz 1.64. *Ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie dort auch stetig.*

Beweis. Ist $f(x_0)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und folglich in einer Umgebung dieser Stelle erklärt, und setzt man, für alle $h \neq 0$, für die $f(x_0 + h)$ erklärt ist,

$$\rho(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) & h \neq 0 \\ 0 & h = 0, \end{cases}$$

so strebt $\rho(h)$ für $h \to 0$ selbst gegen 0 und ist also an der Stelle $h = 0$ stetig (und beschränkt!).

Da die Folge $f(x_0 + h) - f(x_0) = h\,[f'(x_0) + \rho(h)]$ für $h \to 0$ eine Nullfolge ist, so gilt $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ und $f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig. □

1.9.3. *Das Differential einer Funktion.* Auf Grund der Zerlegungsformel

$$(i) \qquad \Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0).h + \rho(h).h$$

kann man erkennen, daß der zweite Summand $\rho(h).h$ für den Grenzübergang

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0}(f'(x_0) + \rho(h))$$

wegen $\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0$ ganz ohne Einfluß ist und daß es allein auf den ersten Summanden $f'(x_0).h$ ankommt.

Erklärung 1.65. Ist die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar, so nennt man das Produkt $f'(x_0).h$ *das zur (festen) Stelle x_0 und dem (willkürlichen) Inktement h gehörige Differential* dieser Funktion und bezeichnet es durch dy oder $df(x)$ (bei welchen Zeichen es meist nicht nötig sein wird, die Stelle x_0 und das Inkrement h besonders anzugeben).

Die geometrische Veranschaulichung dieses Differentials ist einfach:

- Die Differenz Δy gibt die tatsächliche Änderung der Funktion $y = f(x)$ an, wenn man von der festen Stelle x_0 zu der benachbarten Stelle $x_0 + h$ übergeht.
- Das Differential dy gibt die Änderung an, die dabei eintretten würde, wenn man die Funktion $f(x)$ (oder besser ihr Bild) in der Umgebung der Stelle x_0 durch die dortige Tangente ersetzt, - gibt also die Änderung an, die eintreten würde, wenn die Funktion in der Umgebung von x_0 dauernd dieselbe Steigung hätte wie an der Stelle x_0 selbst.

Wenn wir $x_0 + h = x$ setzen, so lautet (i)

$$(ii) \qquad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \rho(x - x_0)(x - x_0).$$

Die durch die beiden ersten Summanden rechts dargestellte Funktion von x ist linear, ihr Bild - die Tangente an das Bild von $f(x)$ in dem zu $x = x_0$ gehörigen Punkte. Der Dritte Summand wird für $x \to x_0$ noch in Verhältnis zu $x - x_0$ unendlich klein.

In diesem Sinne **darf** man sagen, daß eine in $x = x_0$ differenzierbare Funktion in der Umgebung dieser Stelle **in erster Annäherung** linear ist.

Das Differential dy gibt also die Änderung dieser linearen Annäherungsfunktion, die Differenz Δy die tatsächliche Änderung der Funktion selbst an, wenn man von der Stelle x_0 zu einer benachbarten (d.h. einer willkürlichen von x_0 verschiedenen) Stelle übergeht.

Erklärung 1.66. Ist eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und in einer *rechtsseitigen* (*linksseitigen*) Umgebung derselben definiert und hat der *rechtsseitige* (*linksseitige*) Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0^{+0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\lim_{x \to x_0^{-0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

einen bestimmten (endlichen) Wert σ^+ (σ^-), so sagt man, die Funktion $f(x)$ sei an der Stelle x_0 *rechtsseitig* (*linksseitig*) differenzierbar, oder sie besitze dort eine rechtsseitige (linksseitige) Ableitung oder einen vorderen (rückwärtsgenommenen) Differentialquotienten, dessen Wert gleich σ^+ (σ^-) sei.

1.9.4. *Sätze und Definitionen.* Folgende Sätze und Definitionen sind fast selbstverständlich.

Satz 1.67. *Die Funktion $f(x)$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls sie dort eine rechts- und eine linkseindeutige Ableitung besitzt und falls beide den gleichen Wert haben. Dieser liefert dann den Wert $f'(x_0)$.*

Existieren für eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 die beiden einseitigen Ableitungen und haben sie dort verschiedene Werte, so heißt die zur Abszisse x_0 gehörige Stelle P_0 des Graphs der Funktion eine *Ecke* oder ein *Knick*.

Satz 1.68. *Ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 rechtsseitig (linksseitig) differenzierbar, so ist sie dort auch rechtsseitig (linksseitig) stetig.*

Erklärung 1.69. Ist eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und in einer rechtsseitigen (linksseitigen) Umgebung derselben definiert und ist der rechtsseitige (linksseitige) Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0^{+0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \qquad \left(\lim_{x\to x_0^{-0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty\right),$$

so sagt man, daß die Funktion $f(x)$ eine *uneigentliche* rechtsseitige (linksseitige) Ableitung besitze und daß diese positiv bzw. negativ unendlich sei.

Sind diese einseitigen Grenzwerte beide gleich $+\infty$ (bzw. beide gleich $-\infty$), so sagt man, daß $f(x)$ in x_0 eine positiv (bzw. negativ) unendliche Ableitung besitze, und setzt demgemäß $f'(x_0) = +\infty$ (bzw. $-\infty$).

In allen diesen Fällen nennt man die Funktion $f(x)$ nicht mehr differenzierbar an der Stelle x_0. Auch braucht diese Funktion an der Stelle x_0 nicht stetig sein.

Beispiel 1.70. (1) Es ist $(\sin x)'_{x=x_0} = \cos x_0$.

Lösung. $$\frac{\sin x_n - \sin x_0}{x_n - x_0} = \frac{2\cos\frac{x_n+x_0}{2}\sin\frac{x_n-x_0}{2}}{x_n-x_0} = \cos\frac{x_n+x_0}{2}\,\frac{\sin\frac{x_n-x_0}{2}}{\frac{x_n-x_0}{2}}.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion $\cos x$ an der Stelle x_0 und $\lim\limits_{x_n\to x_0} \dfrac{x_n+x_0}{2} = x_0$, $\lim\limits_{x_n\to x_0,\, x_n\neq x_0} \dfrac{x_n-x_0}{2} = 0$, strebt $\cos\dfrac{x_n+x_0}{2}$ gegen $\cos x_0$ und $\dfrac{\sin\frac{x_n-x_0}{2}}{\frac{x_n-x_0}{2}}$ gegen 1.

So ist $(\sin x)'_{x=x_0} = \cos x_0$.

(2) Die Funktion $y = \sqrt{x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ rechtsseitige Ableitung $+\infty$, denn es ist für $x > 0$

$$\frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

(3) Die Funktion $y = \sqrt{|x|}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ die rechtsseitige Ableitung $+\infty$ und die linksseitige Ableitung $-\infty$.

(4) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

hat in $x_0 = 0$ eine positive unendliche Ableitung $+\infty$.

Betrachtet man die spezielle Funktion $f(x) = x$, so ist deren Differential mit dx zu bezeichnen. Da ihre Ableitung an jeder Stelle gleich 1 ist, so ist also $dx = h$; das Bild dieser Funktion fällt in jeder Umgebung jeder Stelle vollständig mit der dortigen Tangente zusammen. Es darf also das Inkrement Δx oder h auch mit dx bezeichnet werden. Dann ist aber $dy = f'(x_0)\,dx$ oder $\dfrac{dy}{dx} = f'(x_0)$.

Beispiel 1.71. Im Intervall $-\infty < x < +\infty$ ist $\dfrac{dx^k}{dx} = k\, x^{k-1}$, denn

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^k}{dx}_{|x_0\in\mathbb{R}} &= \lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} \frac{(x-x_0)(x^{k-1} + x_0x^{k-2} + \ldots + x_0^{k-2}x + x_0^{k-1})}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} (x^{k-1} + x_0x^{k-2} + \ldots + x_0^{k-2}x + x_0^{k-1}) = kx_0^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Der Begriff und der Wert der *Geschwindigkeit* (*Beschleunigung*) der durch die Funktion $s = s(t),\ t \in \mathbb{R}^+$ $(v = v(t),\ t \in \mathbb{R}^+)$ beschriebenen Bewegung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 deckt sich vollständig mit dem Begriff und dem Wert der Ableitung der Funktion $s(t)$ $(v(t))$ an der Stelle t_0.

1.9.5. *Grundregeln der Differenzierung von Funktionen.*

- **Konstantenregel**: $a = const,\quad \dfrac{da}{dx} = 0.$
- **Faktorregel**: $a = const,\quad \dfrac{d(af(x))}{dx} = a\,\dfrac{df(x)}{dx} = af'(x).$
- **Summenregel**: $\dfrac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx} = f'(x) + g'(x).$
- **Linearkombinationsregel**: $a = const,\ b = const,$
  $\dfrac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = a\dfrac{d}{dx}f(x) + b\dfrac{d}{dx}g(x) = af'(x) + bg'(x).$
- **Produktregel**: $\dfrac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)\dfrac{d}{dx}f(x) + f(x)\dfrac{d}{dx}g(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$
- **Quotientenregel**: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$
- **Potenzregel**: $\dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}.$
- **Kettenregel**: Ist $u = \varphi(x)$ eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion von x und ist $y = f(u)$ eine an der Stelle $u_0 = \varphi(x_0)$ differenzierbare Funktion von u, so ist die in einer gewissen Umgebung von x_0 durch die Gleichung $y = f(\varphi(x))$ erklärte mittelbare Funktion von x ebenfalls an der Stelle x_0 differenzierbar, und ihre dortige Ableitung wird durch die Formel gegeben

  $$\frac{dy}{dx}_{|x_0} = \frac{dy}{du}_{|u_0} \cdot \frac{du}{dx}_{|x_0} = f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

  Beweis. Da $u = \varphi(x)$ und $y = f(u)$ differenzierbare Funktionen sind, sind sie folglich auch stetig. Es gilt

  $$\frac{f(u_0+h) - f(u_0)}{h} = f'(u_0) + \rho(h), \quad \lim_{h\to 0}\rho(h) = 0.$$

Setzen wir $u_0 + h = u$, so ist $h = u - u_0 = \varphi(x) - \varphi(x_0)$ und

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(u)-f(u_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(u)-f(u_0)}{u-u_0}.\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \{f'(u_0)+\rho(u-u_0)\}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{u\to u_0} \{f'(u_0)+\rho(u-u_0)\}. \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = f'(u_0)\varphi(x_0).$$

□

1.9.6. *Bemerkenswerte mittelbare Funktionen.*

$$\frac{d}{dx}[(\varphi(x))^n] = n(\varphi(x))^{n-1}\varphi'(x); \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right) = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(\varphi(x))] = [\cos(\varphi(x))]\varphi'(x); \qquad \frac{d}{dx}[\cos(\varphi(x))] = -[\sin(\varphi(x))]\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(\varphi(x))] = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}; \qquad \frac{d}{dx}[e^{\varphi(x)}] = e^{\varphi(x)}\,\varphi'(x)$$

1.9.7. *Ableitungen und Differentiale höherer Ordung.* Eine Funktion kann in einem Intervall überall differenzierbar sein, ohne daß die Ableitung derselben da überall eine stetige Funktion ist.

Beispiel 1.72. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

An jeder von Null verschiedenen Stelle x ist $f(x)$ differenzierbar und es ist

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

An der Stelle $x_0 = 0$ ist $f(x)$ ebenfalls differenzierbar:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[h\sin\left(\frac{\pi}{h}\right)\right] = 0$$

da $\sin\left(\frac{\pi}{h}\right)$ beschränkt ist. $f'(0)$ ist also vorhanden und gleich Null.

Die Ableitung von $f(x)$ ist demnach die Funktion

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) - \pi\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist aber an der Stelle $x = 0$ nicht stetig, da $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nicht vorhanden ist.

Ist die Funktion $f'(x)$ im Intervall $\mathfrak{J}$ differenzierbar, so bezeichnet man ihre Ableitung als *zweite Ableitung* der ursprünglichen Funktion $f(x)$. Ist diese zweite Ableitung wieder differenzierbar, so heißt ihr Differentialquotient die *dritte Ableitung* von $f(x)$, usw.

1.10. **Sätze über differenzierbare Funktionen.** Steigt eine Kurve, so ist dort der Richtungswinkel der Tangente **spitz**, also die Steigung **positiv** und damit auch die Ableitung **positiv**.

Fällt eine Kurve, so ist der Richtungswinkel der Tangente **stumpf**, die Steigung also **negativ** und damit die Ableitung **negativ**.

Satz 1.73. Monotoniesatz. *Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $\mathfrak{J}$ differenzierbar. Gilt für alle $x \in \mathfrak{J}$ $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$, so ist $f(x)$ in $\mathfrak{J}$ streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend. (Steigen und Fallen einer Kurve werden also durch das Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmt.)*

Beweis. Laut der Zerlegungsformel ist

$$\Delta y = [f'(x_0) + \rho(\Delta x)]\Delta x.$$

Ist also $f'(x_0) \neq 0$, so ist $|\rho(\Delta x)| < |f'(x_0)|$ für alle hinreichend kleinen $|\Delta x|$, weil $\rho(\Delta x)$ für $\Delta x \to 0$ selbst gegen Null strebt.

Die Formel lehrt unmittelbar, daß Δy und Δx für alle diese Δx das gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, je nachdem $f'(x_0) > 0$ oder < 0 ist.

Ist $f'(x_0) = +\infty$, so erkennt man ganz entsprechend, daß die Funktion an der Stelle x_0 wächst, und, ebenso, daß sie fällt, wenn $f'(x_0) = -\infty$ ist. □

Eine Funktion $y = f(x)$ hat an einer Stelle x_0 im Innern des Definitionsbereiches ein *relatives Maximum* (bzw. ein *relatives Minimum*), wenn der zugehörige Funktionswert $f(x_0)$ im Vergleich zu seinen Nachbarwerten der größte (bzw der kleinste) ist und die Kurve dort eine *waagerechte* (x-Achsen parallele) *Tangente* besitzt.

Ist $f(x)$ an der Stelle ξ differenzierbar, so **kann** ξ nur dann eine Stelle eines relativen Extremums für $f(x)$ sein, wenn $f'(\xi) = 0$ ist.

Oder: Für das Eintreten eines relativen Extremums an der Stelle ξ, an der die Ableitung existiert, ist das Verschwinden dieser Ableitung eine **notwendige** Bedingung.

Satz 1.74. Der Satz von Rolle. *Die Funktion $f(x)$ sei in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und habe an den beiden Enden des Intervalls den Wert* 0. *Wenn sie dann im Innern des Intervalls überall differenzierbar ist oder eine positiv (negativ) unendliche Ableitung hat, so gibt es im innern des Intervalls wenigstens eine Stelle ξ, an der die Ableitung $f'(\xi) = 0$ ist.*

Beweis. Es sei λ das Minimum und μ das Maximum der stetigen Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ (vgl. Satz von Weierstraß).

Ist $\lambda = \mu$, so ist die Funktion *identisch konstant*, ihre Ableitung also dauernd gleich Null. Die Behauptung ist wahr.

Ist $\lambda < \mu$, so ist (wegen $f(a) = f(b) = 0$) entweder $\lambda < 0$ oder $\mu > 0$ (oder es ist beides der Fall).

Ist $\lambda < 0$, so liegt die Stelle ξ, für welche $f(\xi) = \lambda$ ist, also das Minimum annimmt, **notwendig** im Innern des Intervalls $[a, b]$, da $\lambda < 0 = f(a) = f(b)$ ist.

Es ist also **notwendig** $f'(\xi) = 0$.

Ist $\mu > 0$ und ist $f(\xi') = \mu$, so schließt man entsprechend, daß ξ' im Innern von $[a, b]$ liegt und daß dort $f'(\xi') = 0$ ist. □

Bemerkung 1.75. (*i*) Jede zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b ($a < b$) liegende Zahl ξ läßt sich durch einen Ausdruck $\xi = a + \theta(b - a)$ darstellen, wobei θ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet. Daher kann man den Satz von Rolle auch dadurch zum Ausdruck bringen, daß man sagt:

Unter den gemachten Voraussetzungen gebe es immer **wenigstens** eine Zahl θ, für die $0 < \theta < 1$ und zugleich $f'(a + \theta(b - a)) = 0$ ist.

(ii) Aus dem Beweis des Satzes von Rolle geht noch hervor, daß $f(x)$ an der Stelle ξ ein **relatives** Extremum hat.

Satz 1.76. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz von Lagrange). *Wenn eine Funktion $f(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und im Innern desselben überall differenzierbar ist (oder wenigstens eine positiv oder negativ unendliche Ableitung hat), so gibt es im Innern des Intervalls mindestens eine Stelle ξ, an der gilt*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Es seien $A(a, f(a))$ und $B(b, f(b))$, die Gleichung der Sehne AB lautet dann

$$AB: \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) =: h(x).$$

Die Ordinate $f(x)$ des zur Abszisse x gehörigen Punktes P des Kurvenbildes vergleiche man mit der Ordinate des zu derselben Abszisse gehörigen Punktes Q der Sehne AB. Man betrachte die Funktion $|PQ|$, d.h.

$$g(x) := f(x) - h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Die Funktion $g(x)$ genügt genau den Voraussetzungen des Satzes von Rolle: Sie ist im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, ist im Innern desselben überall differenzierbar (oder hat wenigstens eine positiv oder negativ unendliche Ableitung) und hat an den Enden des Intervalls den Wert Null. Daher gibt es im Innern des Intervalls mindestens eine Stelle ξ, für die $g'(\xi) = 0$ ist.

Da aber im Innern von $[a, b]$ $\quad g'(x) = f'(x) - h'(x)$, d.h.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

gilt, so heißt das, daß für $x = \xi$ die Gleichung

$$g'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

erfüllt ist. □

Geomertische Deutung des Mittelwertsatzes

Es sei $\widehat{AB}$ die Bildkurve der Funktion $y = f(x)$, die im Intervall $[a, b]$ stetig ist. Da $f(x)$ im Innern des Intervalles differenzierbar ist, besitzt die Bildkurve in jedem Punkt eine Tangente.

Der Mittelwertsatz besagt, daß es mindestens einen Punkt C der Bildkurve gibt, in dem die Tangente g zu der Kurve denselben Anstieg (dieselbe Steigung) wie die Sekante (Sehne) (AB) hat, d.h.:

Die Tangente zur Kurve $\widehat{AB}$ im Punkt C und die Gerade AB verlaufen parallel zueinander.

Da die Steigung von AB gleich $\tan\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ist, und da die Steigung von g an der Stelle $x=\xi$ gleich $f'(\xi)$ ist, so gilt

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Einfache Anwendungen

I. Wenn zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in einem Intervall $\mathfrak{I}$ differenzierbar sind und ihre Ableitungen dort übereinstimmen, so ist ihre Differenz konstant (d.h. sie unterscheiden sich nur um eine additiv hinzutretende Konstante).

II. Es sei $f(x)$ in dem beiderseits offenen Intervall (a,b) stetig und differenzierbar, die Ableitung $f'(x)$ sei dort beschränkt, etwa stets $|f'(x)| \leq K$, $K = konst.$ Dann ist auch $f(x)$ in (a,b) beschränkt.

Beweis. Sind x_0 und x beliebige Stellen aus (a,b), so gibt es $\xi \in [x_0, x]$ derart, daß $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$, oder $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0)$ ist. Für jedes $x \in (a,b)$ ist, wegen $|f'(x)| \leq K$ und $|x-x_0| < |b-a|$,

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + K|b-a| := K_1.$$

□

Satz 1.77. Erweiterter Mittelwertsatz (Satz von Cauchy). *Wenn zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und wenigstes im Innern desselben differenzierbar sind und wenn die Ableitung der zweiten Funktion dort nirgends gleich Null ist, so ist auch $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$ und es gibt im Innern des Intervalles immer mindestens eine Stelle ξ, für die gilt*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Beweis. Da nach dem Mittelwertsatz $\varphi(b)-\varphi(a) = (b-a)\varphi'(a+\theta\,(b-a))$ ist und $\theta \in (0,1)$, so ist $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$.

Die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}(\varphi(x)-\varphi(a))$$

ist im Intervall $[a,b]$ stetig, im Innern desselben differenzierbar und es ist $g(a) = g(b) = 0$.

Nach dem Satz von Rolle gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a,b)$, so daß $g'(\xi) = 0$ ist. Da

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$$

ist und $\varphi'(\xi) \neq 0$ sein sollte, so ist

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

□

1.11. **Kurvendiskussion.**

1.11.1. *Geometrische Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion.* Wie man aus dem Vorzeichen der ersten Ableitung einer Funktion im allgemeinen über das Wachsen und Fallen derselben Ankunft erhält, so zeigt das Vorzeichen der zweiten Ableitung an, ob das Bild der Funktion konvex oder konkav ist.

Die Funktion $f(x)$, die an einer Stelle x_0 und in deren Umgebung definiert und an der Stelle x_0 differenzierbar ist, heißt an dieser Stelle *von unten konvex (bauchig)*, falls alle Kurvenpunkte, deren Abszissen in einer gewissen Umgebung von x_0 liegen, **oberhalb** derjenigen Tangente liegen, deren Berührungspunkt die Abszisse x_0 hat. Liegen diese Kurvenpunkte **unterhalb** dieser Tangente, so heißt die Funktion (oder auch ihr geometrisches Bild) an der Stelle x_0 *von unten konkav (hohl)*.

Die hiermit erklärte Eigenschaft ist wiederum eine **lokale** Eigenschaft.

Ist $f'(x)$ in $\mathfrak{I}$ **monoton wachsend**, so beschreibt der Graph von $f(x)$ eine *Linkskurve* (eine von unten bauchige Kurve), d.h. daß sich, beim Durchlaufen der Kurve mit wachsendem $x \in \mathfrak{I}$, die Tangente nach **links** (also im Gegenuhrzeigersinn) dreht. Die Kurvenpunkte bleiben stets **links von der Tangente**.

Ist $f'(x)$ in $\mathfrak{I}$ **monoton fallend**, so beschreibt der Graph von $f(x)$ eine *Rechtskurve* (eine von unten hohle Kurve), d.h. daß sich, beim Durchlaufen der Kurve mit wachsendem $x \in \mathfrak{I}$, die Tangente nach **rechts** (also im Uhrzeigersinn) dreht. Die Kurvenpunkte bleiben stets **rechts von der Tangente**.

Zusatz 1.78. *Dafür, daß eine Funktion $f(x)$ in dem Intervall $\mathfrak{I}$ einen Graph hat, der eine Rechtskurve (bzw. Linkskurve) beschreibt, ist es hinreichend, daß die Funktion dort eine negative (bzw. positive) zweite Ableitung besitzt.*

Es sind diejenigen Punkte von Interesse, in denen Rechts- und Linkskurve stetig ineinander übergehen. Diese Punkte heißen *Wendepunkte* und ihre Tangenten *Wendetangenten.*

Jede Wendetangente durchsetzt die Kurve.

Beim Übergang von einer Linkskurve in eine Rechtskurve wächst die Ableitungsfunktion $f'(x)$ monotonbis zur Wendestelle x_w, dann fällt sie monoton.

Beim Übergang von einer Rechtskurve in eine Linkskurve fällt die Ableitungsfunktion $f'(x)$ monotonbis zur Wendestelle x_w, dann wächst sie monoton.

An der Wendestelle muß also eine lokale Extremstelle der Ableitungsfunktion $f'(x)$ vorliegen.

Zusatz 1.79.
1. *Für das Auftreten eines Wendepunktes ist das Verschwinden der zweiten Ableitung der (als zweimal differenzierbar vorausgesetzten) Funktion $f(x)$ eine notwendige Bedingung.*
2. *Hinreichend für die Existenz eines Wendepunktes an der Stelle $x = x_w$ ist die Bedingung, daß die erste nichtverschwindende höhere Ableitung an dieser Stelle von ungerader Ordnung ist.*

Wendepunkte mit waagerechter Wendetangente werden auch *Stufenpunkte* genannt. In diesen verschwindet sowohl die erste als auch die zweite Ableitung und die erste nichtverschwindende höhere Ableitung ist von ungerader Ordnung.

Wir untersuchen *das Verhalten der (differenzierbaren) Stammfunktion $y = f(x),\ x \in \mathfrak{I}$, an einer Stelle $x = x_0,\ x_0 \in \mathfrak{I}$, die eine Nullstelle der Ableitungsfunktion $y = f'(x)$ ist.*

Ist $x_0 \in \mathfrak{I}$ eine Nullstelle von $y = f'(x)$, also $f'(x_0) = 0$, so muß an dieser Stelle die Stammfunktion $y = f(x)$ eine waagerechte (x-Achsen parallele) Tangente haben, da $f'(x_0) =$

$\tan \alpha_0 = 0$ ist und $\alpha_0 = 0$ folgt. Hierbei ist α_0 der Winkel, den die Tangente zu dem Graph der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ mit der positiven Laufrichtung der x-Achse schließt.

Es sind dabei drei Fälle zu unterscheiden:

I. $f'(x)$ geht fallend durch die x-Achse. $f(x)$ hat an der Stelle x_0 ein **relatives Maximum**.

II. $f'(x)$ geht steigend durch die x-Achse. $f(x)$ hat an der Stelle x_0 ein **relatives Minimum**.

III. $f'(x)$ berührt die x-Achse. $f(x)$ hat an der Stelle x_0 eine **waagerechte Wendetangente**.

Zusatz 1.80. *Ist eine Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ n-mal differenzierbar und ist die n-te Ableitung $(n > 2)$ die erste, welche an der Stelle x_0 ungleich Null ist, so besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Extremwert, falls n gerade ist. Dieser Extremwert ist ein relatives Maximum, wenn $f^{(n)} < 0$, ein relatives Minimum, wenn $f^{(n)} > 0$ ist.*

Wenn jedoch n ungerade ist, handelt es sich um einen Wendepunkt.

1.11.2. *Asymptoten.* Als *Asymptote* für eine Kurve k bezeichnet man jede Kurve, der sich die Kurve k unbegrenzt nähert, ohne sie jedoch zu erreichen.

Bei den *geradelinigen Asymptoten* können wir zwischen **waagerechten**, **senkrechten** und **schiefen** Asymptoten unterscheiden.

Eine zur x-Achse senkrechte Gerade $x = a$ ist *senkrechte* Asymptote für den Graph der Funktion $y = f(x)$, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ gilt.

Beispiel 1.81. Die Gerade $x = 0$ ist eine senkrechte Asymptote für den Graph der Funktion $f(x) = \ln x$; die Gerade $x = \pi/2$ für den Graph von $f(x) = \tan x$; die Gerade $x = 2$ für den Graph von $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$.

Eine zur x-Achse parallele Gerade $y = b$ ist *waagerechte* Asymptote für den Graph der Funktion $y = f(x)$, wenn $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ gilt.

Beispiel 1.82. Die Gerade $y = 3$ ist eine waagerechte Asymptote für den Graph der Funktion $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5}{x^2 + 1}$; die Gerade $y = 0$ für den Graph von $f(x) = e^{-x}$; die Gerade $y = 1$ für den Graph von $f(x) = \coth x$.

Eine nicht achsenparallele Gerade $y = cx + d,\ c \neq 0$ ist *schiefe* Asymptote für den Graph der Funktion $y = f(x)$, wenn sich diese in der folgenden Weise aufspalten läßt: $f(x) = cx + d + g(x)$ mit $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$.

Ist $f(x)$ speziell eine gebrochen-rationale Funktion, d.h. $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, worin $P(x)$, $Q(x)$ Polynome sind, so gelingt diese Aufspaltung, wenn *Grad* $P(x) =$ *Grad* $Q(x) + 1$ ist, weil sich dann beim "Ausdividieren" der unechte Polynombruch in ein lineares Polynom plus einen echten Polynombruch zerlegt.

Z.B. Die Gerade $y = 2x - 2$ erweist sich als schiefe Asymptote für den Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 1} = 2x - 2 + \frac{3}{x + 1}.$$

Allgemeiner: Eine nicht-achsenparallele Gerade $g\,:\;y = cx + d,\;\; c \neq 0$ ist *schiefe* Asymptote für die Kurve $k\,:\;y = f(x)$, wenn der Abstand a zwischen einem beliebigen Punkt M von k und der Gerade g gegen Null strebt für M auf k gegen $+\infty$ $(-\infty)$ strebend.

Im rechtwinkligen Dreieck MPQ (Bild) hat man die Ungleichung $a = |MP| < |MQ|$. Andererseits ist $|MQ| = |cx + d - f(x)|$, und also

$$\frac{|MQ|}{x} = \left|c + \frac{d}{x} - \frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{d}{x} - c\right|.$$

Da außerdem

$$a = |MP| = \left|\frac{cx - f(x) + d}{\sqrt{1+c^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\,|f(x) - cx - d|$$

ist, so gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|MQ|}{x} = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{x} - c\right| = 0 \;\Rightarrow\; c = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};$$

$$\lim_{x\to\infty} |MP| = \lim_{x\to\infty} |(f(x) - cx) - d| = 0 \;\Rightarrow\; d = \lim_{x\to\infty}(f(x) - cx).$$

Beispiel 1.83.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1} \;\Rightarrow\; c = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1, \quad d = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = -1 \;\Rightarrow\; g\,:\; y = x - 1.$

2. $f(x) = \sqrt{1+x^2} \;\Rightarrow\; c = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1, \quad d = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = 0 \;\Rightarrow\; g\,:\; y = x.$

Aufgabe 1.84. Man untersuche folgende Funktionen nach Nullstellen, Extrempunkten, Wendepunkten, Symmetrieverhältnissen, Asymptoten, Unstetigkeitsstellen.

1. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - 2x - 3;$
2. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x};$
3. $y = x + \cos x;$
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\; y \geq 0;$
5. $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3};$
6. $y = \dfrac{x^3}{3(x+1)^2};$
7. $y = \cos x + \cos 2x,\; x \in [-\pi, \pi].$

1.12. **Ableitung einer inversen Funktion.** Ist für eine bestimmte Stelle $\xi \in \mathcal{I},\; f(\xi) = \eta$, so liegt η in $\mathcal{I}'$, und es ist auch $f^{-1}(\eta) = \xi$, wenn $f(x)$ eine in $\mathcal{I}$ im engeren Sinne monotone und stetige Funktion ist. Zwei solche Stellen $\xi \in \mathcal{I}$ und $\eta \in \mathcal{I}'$ werden als **einander entsprechende** Stellen bezeichnet.

Satz 1.85. *Ist die Funktion $y = f(x)$ in einem Intervall $\mathcal{I}$ definiert, stetig und im engeren Sinn monoton, an einer Stelle $\xi \in \mathcal{I}$ differenzierbar und außerdem noch $f'(\xi) \neq 0$, so ist die zu ihr inverse Funktion $x = f^{-1}(y),\; y \in \mathcal{I}'$ an der entsprechenden Stelle η von $\mathcal{I}'$ ebenfalls differenzierbar und ihre Ableitung hat dort den Wert*

$$\frac{d}{dy}(f^{-1}(y))_{|y=\eta} = \frac{1}{\frac{d}{dx}(f(x))_{|x=\xi}}.$$

Beweis. Wir haben $\dfrac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta}$ für eine beliebige, dem Intervall $\mathcal{I}'$ entnommene Zahlenfolge (y_n) zu untersuchen, wenn $y_n \to \eta$ für $n \to \infty$ und die Glieder von (y_n) sämtlich von η verschieden sind. Ist aber $f^{-1}(y_n) = x_n$, so liegt x_n für jedes n in $\mathcal{I}$ und ist von ξ verschieden. Überdies strebt $x_n \to \xi$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dy}(f^{-1}(y))_{|y=\eta} = \lim_{y_n \to \eta} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} \\
&= \lim_{x_n \to \xi} \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi}} = \frac{1}{\frac{d}{dx}(f(x))_{x=\xi}}.
\end{aligned}$$

□

Zusatz 1.86. *Existiert die inverse Funktion $x = f^{-1}(y)$ der Funktion $y = f(x)$, so hat man für alle $y \in \mathcal{I}'$ die Gleichung $y = f(f^{-1}(y))$. Leite man beiderseits bezüglich y ab, so bekomme man*

$$1 = f'(f^{-1}(y)).(f^{-1})'(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}.$$

1.13. **Die Bogenfunktionen.** Die *Bogen-*, *Arkus-* oder *zyklometrischen Funktionen* sind die **Umkehrungen** bestimmter Kreisfunktionen. Ihre Graphen müssen demnach durch **Spiegelung** der entsprechenden trigonometrischen Funktionsgraphen an der Quadrantenhalbierenden $y = x$ zu erhalten sein.

Es bedarf **bei jeder** der vier Kreisfunktionen einer Einschränkung auf solche Definitionsintervalle, in denen die betreffende Funktion **bijektiv** ist.

Die Arcussinus-Funktion $\quad y = \arcsin x$

Ist x irgendeine der Bedingung $-1 \leq x \leq 1$ unterworfene Zahl, so hat die Aufgabe, eine Zahl y zu finden, welche die Gleichung $\sin y = x$ erfüllt, stets unendlich viele verschiedene Lösungen. Man gelangt zu einer Aufgabe, welche **genau eine Lösung** zuläßt, indem man zu der Gleichung $\sin y = x$ noch eine passend gewählte Nebenbedingung hinzufügt, z.B. $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Man bezeichnet diejenige Zahl y, welche sowohl die **Hauptbedingung** $\sin y = x$, als auch die **Nebenbedingung** $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ erfüllt, durch $\arcsin x$ (*Arcussinus von x*).

Die Funktionen Arcussinus und Sinus sind invers zueinander.

Ist also $y = f(x) = \arcsin x$, so ist $x = f^{-1}(y) = \sin y$, d.h. $\sin(\arcsin x) = x$.

Ist daher $y = g(x) = \sin x$, so ist $x = g^{-1}(y) = \arcsin y$, d.h. $\arcsin(\sin x) = x$.

Die Arcuscosinus-Funktion $\quad y = \arccos x$

In ähnlicher Weise ist, ebenfalls unter der Voraussetzung, daß $-1 \leq x \leq 1$ ist, die Funktion $y = \arccos x$ zu deuten.

Als *Hauptwert* von $\arccos x$ (*Arcuscosinus von x*) gilt diejenige Zahl y, welche die **Hauptbedingung** $\cos y = x$ und die Nebenbedingung $0 \leq y \leq \pi$ erfüllt.

Die Funktionen Arcuscosinus und Cosinus sind invers zueinander.

Bemerkung 1.87. Alle übrigen Lösungen der Gleichung $\sin y = x$ bzw. $\cos y = x$ lassen sich in den beiden Formen

$$\pm \arcsin x + 2k\pi \quad \text{bzw.} \quad \pm \arccos x + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

darstellen und heißen *Nebenwerte* der entsprechenden Funktion.

Die Arcustangens-Funktion $\quad y = \arctan x$

Als *Hauptwert* von $\arctan x$ (*Arcustangens von* x) bezeichnet man diejenige Zahl y, welche die **Hauptbedingung** $\tan y = x$ und die **Nebenbedingung** $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ befriedigt.

Die Funktionen Arcustangens und Tangens sind invers zueinander.

Die Arcuscotangens-Funktion $\quad y = \operatorname{arccot} x$

Hauptwert von $\operatorname{arccot} x$ (*Arcuscotangens von* x) ist diejenige Zahl y, welche die **Hauptbedingung** $\cot y = x$ und die **Nebenbedingung** $0 < y < \pi$ erfüllt.

Die Funktionen Arcuscotangens und Cotangens sind invers zueinander.

Bemerkung 1.88. Alle **Nebenwerte** der letzten beiden Funktionen haben die Form

$$\arctan x + k\pi \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{arccot} x + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Satz 1.89. *Die Funktionen* $\arcsin x$ *und* $\arccos x$ *sind im Innern des Intervalls* $(-1, 1)$ *überall differenzierbar. Ihre Ableitungen werden durch folgende Gleichungen gegeben*

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Beweis. Für jede der Funktionen bilden wir den entsprechenden Differenzquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}:$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{1}{\frac{x - x_0}{y - y_0}} = \frac{1}{\frac{\sin y - \sin y_0}{y - y_0}} \qquad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin x - \arcsin x_0}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{\sin y - \sin y_0}{y - y_0}} = \frac{1}{\cos y_0}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Da aber $\cos y_0 = \sqrt{1 - \sin^2 y_0} = \sqrt{1 - {x_0}^2}$ ist, so gilt für jeden Wert $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x)_{|x=x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - {x_0}^2}}.$$

Genauso beweisen wir, daß:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\arccos x - \arccos x_0}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{\cos y - \cos y_0}{y - y_0}} = \frac{-1}{\sin y_0}, \ 0 < y < \pi.$$

Da aber $\sin y_0 = \sqrt{1 - \cos^2 y_0} = \sqrt{1 - {x_0}^2}$ ist, so gilt für jeden Wert $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x)_{|x=x_0} = \frac{-1}{\sqrt{1 - {x_0}^2}}.$$

□

Zusatz 1.90. *An den beiden Endpunkten des Intervalls* $(-1, 1)$ *sind die durch die Hauptwerte von* arcsin *und* arccos *dargestellten Funktionen nicht mehr (auch nicht einseitig!) differenzierbar, obwohl sie dort einseitig stetig sind. Doch haben sie dort einseitige bestimmt unendliche Ableitungen.*

Beweis. Es sei $y = \arcsin x$. Wir zeigen, daß diese Funktion an der Stelle $x = 1$ nicht mehr linksseitig differenzierbar ist, doch aber eine linksseitige bestimmt unendliche Ableitung hat.

Es sei (x_n) eine Folge, deren Glieder dem Intervall $-1 \leq x < 1$ angehören, also sämtlich von 1 verschieden sind, aber gegen 1 streben. Wir bilden die Differenzquotienten

$$A_n = \frac{\arcsin x_n - \arcsin 1}{x_n - 1}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Setzen wir $y_n = \arcsin x_n$, $\frac{\pi}{2} = \arcsin 1$, also $x_n = \sin y_n$ und $1 = \sin \frac{\pi}{2}$, so haben wir

$$A_n = \frac{y_n - \frac{\pi}{2}}{\sin y_n - \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\sin y_n - \sin \frac{\pi}{2}}{y_n - \frac{\pi}{2}}}.$$

Da, wegen der linksseitigen Stetigkeit von $\arcsin x$ an der Stelle $x = 1$ nun y_n gegen $\frac{\pi}{2}$ strebt, so strebt also, für $n \to \infty$, $\dfrac{\sin y_n - \sin \frac{\pi}{2}}{y_n - \frac{\pi}{2}}$ gegen $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, so daß $A_n \to \infty$ zustrebt. Ähnliche Untersuchungen führen zum Beweis der restlichen Behauptungen des Zusatzes. □

Satz 1.91. *Es gilt stets:*

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$ und $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan y)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

Aufgabe 1.92. Untersuchen Sie die Bogenfunktionen nach Nullstellen, Wendepunkten, Asymptoten.

1.13.1. *Darstellung der Bogenfunktionen am Einheitskreis.* Namen und Schreibweise erhielten die Bogenfunktionen auf Grund ihrer Eigenschaft, die Zuordnung $x \mapsto y$ durch Bögen am Einheitskreis sichtbar machen zu können. Man lese die Gleichung $y = \arcsin x$: *y ist der Bogen des Einheitskreises, desen Sinus gleich x ist*, wobei es statt *der Bogen* präziser *die Maßzahl des Bogens* oder *der Winkel im Bogenmaß* heißen müßte.

Es gilt

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall\, x \in [-1, 1].$$

Interpretiert man in entsprechender Weise die Hauptwerte von Arcustangens und Arcuscotangens, so erhält man die Identität

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1.14. **Die Exponential- und Logarithmusfunktionen.**

Erklärung 1.93. Funktionen der Gestalt

$$y = a^x,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R},$$

heißen *Exponentialfunktionen*. Die Konstante a heißt *Basis* der Funktion.

Bezüglich des Graphenverlaufs können wir zwei Klassen von Exponentialfunktionen unterscheiden:

- $y = a^x$ mit $a > 1$ (streng monoton steigend in $\mathbb{R}$);
- $y = a^x$ mit $0 < a < 1$ (streng monoton fallend in $\mathbb{R}$).

Die Funktionen $y = a^x$ und $y = \dfrac{1}{a^x}$ mit $a > 1$ haben y-achsensymmetrisch verlaufende Graphen.

Folgende Behauptungen sind leicht zu beweisen:

(i) Die Exponentialfunktionen besitzen keine reellen Nullstellen, d.h. $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(ii) Die x-Achse ist ihre Asymptote, d.h.

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (a > 1); \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1).$$

(iii) Die Graphen aller Exponentialfunktionen schneiden die y-Achse bei $y = 1$, d.h.

$$a^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Die Exponentialfunktion $y = e^x,\ x \in \mathbb{R}$ mit der Eulerschen Zahl e als Basis heißt *natürliche Exponentialfunktion.*

Satz 1.94. *Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt*

$$f'(x) = (e^x)' = e^x.$$

Beweis. Für beliebige Zahl $h \neq 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt (vgl. I, Kapitel 6, Beispiel 6.10.(2))

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}.\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

□

Zusatz 1.95. *Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x,\ a > 0$ ist an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$f'(x) = (a^x)' = a^x.\log_e a.$$

Beweis. Für beliebige Zahl $h \neq 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt (vgl. I, Kapitel 6, Beispiel 6.10.(2))

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0}.\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^{x_0}.\log_e a = a^{x_0}.\ln a.$$

□

Aufgabe 1.96. Es seien

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Beweisen Sie, daß:

1. $(\cosh x)' = \sinh x$, 2. $(\sinh x)' = \cosh x$;
3. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$, 4. $(\coth x)' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}$;
5. $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$, 6. $(\coth x)' = 1 - \coth^2 x$.

Aufgabe 1.97. Welche sind die Ableitungen folgender Funktionen?

$$y = 5x^3 \sin(e^x); \quad y = x(\sinh x)(\tanh x) - x\cosh x + \coth x;$$

$$y = \frac{\sin x}{x}; \quad y = \frac{\sinh x}{\cos x}; \quad y = \frac{\tanh(\sinh x)}{\cosh x}; \quad y = e^{\coth(\sin x)}.$$

Erklärung 1.98. Die Umkehrung $y = \log_a x$, $x \in \mathbb{R}^+$, der Exponentialfunktion $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, heißt *Logarithmusfunktion zur Basis* a, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Aus der Äquivalenz der Gleichungen

$$x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_a x$$

folgen die bekannten logarithmischen Identitäten

$$a^{\log_a x} \equiv x,\ x \in \mathbb{R}^+; \quad \log_a a^x \equiv x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Die Graphen der Logarithmischen Funktionen gehen aus denen der Exponentialfunktionen gleicher Basis durch die Spiegelung an der Quadrantenhalbierenden $y = x$ hervor.

Die Logarithmusfunktion $y = \ln x$ zur Basis e heißt *natürliche Logarithmusfunktion.*

Folgende Behauptungen sind leicht zu beweisen:

(i) Alle Logarithmen sind (im Reellen) nur für positive Argumente erklärt.

(ii) $x = 1$ ist die einzige Nullstelle aller Logarithmusfunktionen.

(iii) Für $0 < a < 1$ ist die positive y-Achse, für $a > 1$ die negative y-Achse eine Asymptote:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & 0 < a < 1; \\ -\infty, & a > 1. \end{cases}$$

(iv) Bei gegebenen Basen $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^+$

$$\log_b x = \log_b a.\log_a x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Satz 1.99. *Die natürliche Logarithmusfunktion* $f(x) = \ln x$ *ist an jeder Stelle* $x \in \mathbb{R}^+$ *differenzierbar. Es gilt*

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Beweis. Wir bilden den Differenzquotienten an der Stelle $x_0 > 0$ und formen den um:

$$\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0}\frac{x_0}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0}\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0}\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right) = \frac{1}{x_0}\ln e = \frac{1}{x_0}.$$

$\square$

Zusatz 1.100. *Die Logarithmusfunktion* $y = \log_b x,\ b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ *ist an jeder Stelle ihres Deffinitionsintervalls* $\mathbb{R}^+$ *differenzierbar ind es gilt*

$$y' = (\log_b x)' = \frac{1}{x} \log_b e.$$

Zusatz 1.101. *Ist* $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$ *und sind* $f_1(x)$ *und* $f_2(x)$ *an der Stelle* $x_0 > 0$ *differenzierbar und ungleich* 0*, so gilt*

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{f_1'(x_0)}{f_1(x_0)} + \frac{f_2'(x_0)}{f_2(x_0)}.$$

Beweis. Da $f'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0)$ ist und $f_1(x_0)\, f_2(x_0) \neq 0$ gilt, so folgt hieraus

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{(f_1\, f_2)'}{f_1\, f_2}_{|x_0} = \frac{f_1'(x_0)}{f_1(x_0)} + \frac{f_2'(x_0)}{f_2(x_0)}.$$

□

Den Quotienten $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ bezeichnet man als die *logarithmische Ableitung* der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

Aufgabe 1.102. Leiten Sie ab:

1. $y = \ln(\tan x),\ x > 0,$	2. $y = \ln(1 + x^2),$	3. $y = \sinh(\varphi(x)),$
4. $y = \ln(\tan(a^{x^2+3x})),$	5. $y = x\, \cos(\ln x - \pi),\ x > 0,$	6. $y = e^{\sin x},$
7. $y = a^{\tanh(\cot(x^5))},\ a > 0,$	8. $y = \ln \lvert \cos(e^x) \rvert,$	9. $y = \cos(x^2),$
10. $y = \ln(\varphi(x)),\ \varphi(x) > 0,$	11. $y = \ln(\coth^2 x),\ x \neq 0,$	12. $y = (1 + x^2)^{\sin x},$
13. $y = \dfrac{1}{(\cos(\ln x))^2},\ x > 0,$	14. $y = \ln \left\lvert \sin\left(x\, \dfrac{5x^2 - 2}{x^2 + 1} \right) \right\rvert,$	15. $y = e^{x^3}.$

Welche Deffinitionsbereiche haben die obigen Funktionen?

Aufgabe 1.103. Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich an und bilden Sie die erste und zweite Ableitung folgender Funktionen:

$$\frac{1}{2} e^{2x}, \quad e^{-x}\, x^2, \quad \ln(1 - 4x), \quad e^{-2x}\, \ln x;$$

$$\frac{1}{x\, \ln x}, \quad \ln \frac{1 - x^2}{1 - 2x}, \quad \frac{x}{\ln x^2}, \quad \ln \frac{x(1 - 2x)}{x^2 - 1}.$$

1.15. **Die Hyperbel- und Areafunktionen.** Die *Hyperbelcosinus-Funktion*

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$$

ist eine gerade Funktion ohne Nullstellen.

Die *Hyperbelsinus-Funktion*

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$$

ist eine ungerade Funktion mit Nullstelle $x_0 = 0$.

Diese Funktionen sind stetig für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gelten stets folgende Identitäten

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x},\ x \in \mathbb{R}, \quad \sinh x = \begin{cases} \sqrt{\cosh^2 x - 1},\ x \geq 0, \\ -\sqrt{\cosh^2 x - 1},\ x < 0. \end{cases}$$

Die *Hyperbeltangens-Funktion*

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ist eine ungerade stetige Funktion mit Nullstelle $x_0 = 0$.

Es gilt $|\tanh x| < 1,\ x \in \mathbb{R}$, d.h. die Geraden $y = 1$ und $y = -1$ sind **waagerechte Asymptoten** für den Hyperbeltangens, da

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = +1, \quad \lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1.$$

Die *Hyperbelcotangens-Funktion*

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\tanh x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist eine ungerade stetige Funktion ohne Nullstellen.

Es gilt $|\coth x| > 1,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. die Geraden $y = 1$ und $y = -1$ sind **waagerechte Asymptoten** für den Hyperbelcotangens.

Die Gerade $x = 0$ ist eine **senkrechte Asymptote** für den Hyperbelcotangens, da

$$\lim_{x \to 0^+} \coth x = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \coth x = -\infty.$$

Die Gleichungen

$$x = \pm \cosh t, \quad y = \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}$$

sind eine Parameterdarstellung der gleichseitigen (mit zueinander senkrechten Asymptoten) Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

Die Umkehrung $x = \operatorname{Arsinh} y$ der Hyperbelsinus-Funktion $y = \sinh x$ heißt *Area-sinus-hyperbolicus-Funktion.*

Es gelten die Identitäten

$$\sinh(\operatorname{Arsinh} y) = y,\ y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arsinh}(\sinh x) = x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Führen wir die Umkehrung an der Gleichung $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ durch und lösen anschließend nach x auf, so erhalten wir schrittweise

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \ \Rightarrow\ x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \operatorname{Arsinh} y.$$

Die Umkehrung $x = \operatorname{Arcosh} y$ der auf das Intervall $\mathbb{R}_0^+ := \{x |\, x \geq 0\}$ eingeschränkten Hyperbelcosinus-Funktion $y = \cosh x$ heißt *Area-cosinus- hyperbolicus-Funktion.*

Die Äquivalenz $y = \cosh x \ \Leftrightarrow\ x = \operatorname{Arcosh} y$ führt auf die Umkehr-Identitäten

$$\cosh(\operatorname{Arcosh} y) = y,\ y \geq 1, \quad \operatorname{Arcosh}(\cosh x) = x,\ x \geq 0.$$

Die *logarithmischen Darstellungen* von $\operatorname{Arcosh} x$ sind

$$y = \operatorname{Arcosh} x = \begin{cases} \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \ x \in [1, +\infty), \ y < 0; \\ \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \ x \in [1, +\infty), \ y > 0; \\ \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \ x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

Die Umkehrung $x = \operatorname{Artanh} y$ der Hyperbeltangens-Funktion $y = \tanh x, \ x \in \mathbb{R}, \ y \in (-1, 1)$, heißt *Area-tangens-hyperbolicus-Funktion.*

Die Geraden $x = 1$ und $x = -1$ sind **senkrechte Asymptoten** für $y = \operatorname{Artanh} x$:

$$\lim_{x \to 1^-} \operatorname{Artanh} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} \operatorname{Artanh} x = -\infty.$$

Es gelten folgende Umkehr-Identitäten

$$\tanh(\operatorname{Artanh} x) = x, \ |x| < 1, \quad \operatorname{Artanh}(\tanh x) = x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Löst man die Gleichung

$$\tanh y = x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

nach y auf, so erhält man die *logarithmische Darstellung* von $\operatorname{Artanh} x$, nämlich

$$e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \ |x| < 1 \ \Rightarrow \ y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \operatorname{Artanh} x, \ |x| < 1.$$

Die Umkehrung $x = \operatorname{Arcoth} y$ der Hyperbelcotangens-Funktion $y = \coth x, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ |y| > 1$, heißt *Area-cotangens-hyperbolicus-Funktion.*

Für große $|x|$-Werte ist die x-Achse **waagerechte Asymptote** für $y = \operatorname{Arcoth} x$.

Es gelten folgende Umkehr-Identitäten

$$\coth(\operatorname{Arcoth} x) = x, \ |x| > 1, \quad \operatorname{Arcoth}(\coth x) = x, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Löst man die Gleichung

$$\coth y = x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$$

nach y auf, so erhält man die *logarithmische Darstellung* von $\operatorname{Arcoth} x$, nämlich

$$e^y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \ |x| > 1 \ \Rightarrow \ y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \operatorname{Arcoth} x, \ |x| > 1.$$

Aufgabe 1.104. Beweisen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Satz 1.105. *Die durch* $y = \operatorname{Arsinh} x, \ x \in \mathbb{R}$, *und* $y = \operatorname{Arcosh} x, \ x \in [1, \infty)$; $y = \operatorname{Artanh} x, \ x \in (-1, 1)$, *und* $y = \operatorname{Arcoth} x, \ |x| > 1$ *erklärten Area-Funktionen sind im Innern ihrer Definitionsbereiche übreall differenzierbar und ihre Ableitungen dort sind*

$$(\operatorname{Arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\operatorname{Arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \ x > 1;$$

$$(\operatorname{Artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \ |x| < 1, \quad (\operatorname{Arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \ |x| > 1.$$

1.16. **Die Differentialoperatoren.** Ist $y = f(x)$ eine ableitbare Funktion und interpretiert man das Zeichen $\dfrac{d}{dx}$ als *Differentialoperator*, so kann man schreiben

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(y) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x)).$$

Dann ist für beliebige, nicht negative ganze Zahlen p und q

$$\frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{d^q}{dx^q}(f(x))\right) = \frac{d^{p+q}}{dx^{p+q}}(f(x)),$$

falls die rechtsseitige Ableitung überhaupt existiert.

Die Ableitungsregeln können auch mit Differentialoperatoren beschrieben werden:

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)+g(x)] = \frac{d^n}{dx^n}[f(x)] + \frac{d^n}{dx^n}[g(x)], \quad \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)].$$

Es hat sich als recht vorteilhaft erwiesen, den Differentialoperator $\frac{d}{dx}$ mit $\mathcal{D}$ abzukürzen, also $\mathcal{D}(y) = \mathcal{D}(f(x)) := \dfrac{d}{dx}(f(x))$, und allgemein $\mathcal{D}^k(y) = \mathcal{D}^k(f(x)) = \dfrac{d^k}{dx^k}(f(x)),\ k \in \mathbb{N}$ zu setzen, wobei $\mathcal{D}^0 y = y$ sein soll. Damit kann man Ausdrüke der Form

$$\mathcal{L}(y) = a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + ... + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y,$$

in denen die $a_k,\ k = 1, 2, ..., n$, konstante (reelle) Koeffizienten bedeuten, in der folgenden Gestalt schreiben

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y) \quad &= a_n \frac{d^n}{dx^n}(y) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(y) + ... + a_2 \frac{d^2}{dx^2}(y) + a_1 \frac{d}{dx}(y) + a_0\, y \\ &= (a_n\, \mathcal{D}^n + a_{n-1}\, \mathcal{D}^{n-1} + ... + a_2\, \mathcal{D}^2 + a_1\, \mathcal{D}^1 + a_0\, \mathcal{D}^0)\, y.\end{aligned}$$

Den Klammerinhalt kann man als **Polynom in** $\mathcal{D}$ auffassen, das auf y angewandt, den Ausdruck $\mathcal{L}(y)$ ergibt.

Erklärung 1.106. Ein Ausdruck der Form

$$P(\mathcal{D}) = a_n\, \mathcal{D}^n + a_{n-1}\, \mathcal{D}^{n-1} + ... + a_2\, \mathcal{D}^2 + a_1\, \mathcal{D}^1 + a_0\, \mathcal{D}^0$$

mit konstanten $a_k,\ k = 1, 2, ..., n$, und $a_n \neq 0$ heiße ein *Operatorpolynom n-ter Ordnung*, seine Anwendung $\mathcal{L}(y) = P(\mathcal{D})(y)$ auf eine n-mal differenzierbare Funktion $y = f(x)$ ein *lineares Differentialpolynom n-ter Ordnung*.

Der höchste auftretende Exponent von $\mathcal{D}$ wird die *Ordnung* des Polynomes genannt. Sämtliche Ableitungen kommen höchstens in der 1^{ten} potenz vor. $(y')^2$, $(y")^3$ usw. treten hier nicht auf.

Beispiel 1.107. Es seien $y = \sin x$ und $\mathcal{L}(y)$ das lineare Differentialpolynom

$$\mathcal{L}(y) = (\mathcal{D}^3 - 2\mathcal{D}^2 + 3\mathcal{D} - 5)y.$$

Bestimmen Sie $\mathcal{L}(\sin x)$.

Lösung.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin x) &= (\mathcal{D}^3 - 2\mathcal{D}^2 + 3\mathcal{D} - 5)(\sin x)\\ &= \mathcal{D}^3(\sin x) - 2\mathcal{D}^2(\sin x) + 3\mathcal{D}(\sin x) - 5\sin x\\ &= (\sin x)''' - 2(\sin x)'' + 3(\sin x)' - 5(\sin x)\\ &= -\cos x + 2\sin x + 3\cos x - 5\sin x\\ &= 2\cos x - 3\sin x.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.108. (1) Das Operatorpolynom $P(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 - \mathcal{D} - 2$, angewandt auf die Exponentialfunktion $y = e^{-x}$, ergibt 0 für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) Hat das Operatorpolynom $P(\mathcal{D}) = a_2\,\mathcal{D}^2 + a_1\,\mathcal{D} + a_0$ des allgemeinen linearen Differentialpolynoms 2^{ter} Ordnung $\mathcal{L}(y) = P(\mathcal{D})(y)$ die beiden reellen und voneinander verschiedenen Nullstellen α_1 und α_2 (d.h. $a_2\alpha_k^2 + a_1\alpha_k + a_0 \equiv 0,\ k = 1, 2$), so erzwingen alle Funktionen der Gestalt $y = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x}$ mit beliebigen Konstanten A_1, A_2 ein identisches Verschwinden des Differentialpolynoms.

(3) Berechnen Sie

$$\mathcal{D}(e^{-\sin^2 x}),\quad \mathcal{D}^2(\arctan x),\quad \mathcal{D}^3(\sinh(x^2)),$$

$$(\mathcal{D}^2 - 7\mathcal{D} + 3)(\ln x),\quad (\mathcal{D}^3 + 5\mathcal{D}^2 - 7\mathcal{D} + 12)(e^{-x}),\quad (\mathcal{D}^4 + 2\mathcal{D}^2 - 1)\sum_{i=0}^{5} a_i x^i.$$

(4) Untersuchen Sie, ob die Gleichung $P(\mathcal{D})y = g(x)$ erfüllt ist, wenn für das Operatorpolynom $P(\mathcal{D}) = \mathcal{D}^2 + 4\mathcal{D} + 1$, für die Funktion $g(x) = \sinh(2x)$, sowie für die Funktion

$$y(x) = e^{-2x}[c_1\cos(\sqrt{3}x) + c_2\sin(\sqrt{3}x)] - \frac{5}{39}\sinh(2x) + \frac{8}{39}\cosh(2x)$$

genommen wird.

(5) Beweisen Sie, daß

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^p) = n\,!\binom{p}{n}x^{p-n},\ n \in \mathbb{N},\qquad \frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)\,!}{x^n},\ n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(a^x) = a^x(\ln a)^n,\ n \in \mathbb{N},\qquad \frac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N},\qquad \frac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sinh x) = \begin{cases}\cosh x,\ n = 2k-1\\ \sinh x,\ n = 2k,\end{cases}\qquad \frac{d^n}{dx^n}(\cosh x) = \begin{cases}\sinh x,\ n = 2k-1\\ \cosh x,\ n = 2k.\end{cases}$$

Bemerkenswerte Differentiale

Funktion	Ableitung	Differential
Sinusfunktion	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x\, dx$
Kosinusfunktion	$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x\, dx$
Tangensfunktion	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(\tan x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$
Kotangensfunktion	$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$d(\cot x) = \frac{-dx}{\sin^2 x}$
Arkus – Sinus – Funktion	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
Arkus – Kosinus – Funktion	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$
Arkus – Tangens – Funktion	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$
Arkus – Kotangens – Funktion	$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	$d(\operatorname{arccot} x) = \frac{-dx}{1+x^2}$
Exponentialfunktion	$(a^x)' = a^x \ln a$	$d(a^x) = a^x \ln a\, dx$
Logarithmusfunktion	$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$	$d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e\, dx$
Hyperbelsinus – Funktion	$(\sinh x)' = \cosh x$	$d(\sinh x) = \cosh x\, dx$
Hyperbelkosinus – Funktion	$(\cosh x)' = \sinh x$	$d(\cosh x) = \sinh x\, dx$
Hyperbeltangens – Funktion	$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$d(\tanh x) = \frac{dx}{\cosh^2 x}$
Hyperbelkotangens – Funktion	$(\coth x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$	$d(\coth x) = \frac{-dx}{\sinh^2 x}$
Area – Sinus – Hyperbolicus	$(\operatorname{Arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$d(\operatorname{Arsinh} x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$
Area – Kosinus – Hyperbolicus	$(\operatorname{Arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$d(\operatorname{Arcosh} x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
Area – Tangens – Hyperbolicus	$(\operatorname{Artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$d(\operatorname{Artanh} x) = \frac{dx}{1-x^2}$
Area – Kotangens – Hyperbolicus	$(\operatorname{Arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$d(\operatorname{Arcoth} x) = \frac{dx}{1-x^2}$

1.17. **Grenzwert-Aufgaben.** *Erste Grundaufgabe*: Bestimmung des Grenzwertes eines Bruches, dessen Zähler und Nenner beide gegen Null streben.

Regel von de l'Hospital (1696)

Zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien in einer rechtsseitigen Umgebung einer Stelle a, doch nicht notwendig an dieser Stelle a selbst, etwa in $a < x \leq a+d,\ d > 0$, definiert, und es strebe für $x \to a^+$ $\varphi(x)$ gegen Null und $\psi(x)$ gegen Null. Dann hat der Quotient beider Funktionen immer dann einen bestimmten eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert, wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in $a < x \leq a+d$ differenzierbar sind, wenn dort $\psi'(x) \neq 0$ ist und der Grenzwert

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

existiert. Es ist dann nämlich $\psi(x) \neq 0$ für $a < x \leq a+d$ und

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Beispiel 1.109. Sind p und q zwei natürliche Zahlen, so ist für beliebiges $a \neq 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \lim_{x\to a} \left(\frac{p}{q}\, x^{p-q}\right) = \frac{p}{q}\, a^{p-q}.$$

Beispiel 1.110. Sind α und β beliebige reelle Zahlen, so ist für $a > 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\alpha}{\beta}\, x^{\alpha-\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta}\, a^{\alpha-\beta}.$$

Beispiel 1.111. Sind a und b irgend zwei positive Zahlen, so ist entsptechend

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln \frac{a}{b}.$$

Beispiel 1.112. Ähnlich ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

Beispiel 1.113. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\frac{\pi}{2} - \arcsin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Beispiel 1.114. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Beispiel 1.115. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$

Beispiel 1.116. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos\frac{x}{2}}{1 - \cos x} = \frac{1}{4}.$

Satz 1.117. *Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x > a$ definiert und differenzierbar, ist dort $\psi'(x) \neq 0$ und strebt für $x \to \infty$ $\varphi(x)$ gegen Null und $\psi(x)$ gegen Null, so ist*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

sicher immer dann, wenn der rechts stehende Grenzwert einen bestimmten eigentlichen oder uneigentlichen Wert hat.

Beispiel 1.118. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1.$

Zweite Grundaufgabe: Bestimmung des Grenzwertes eines Bruches, dessen Nenner gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt.

Regel von de l'Hospital

Sind die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ beide für $x > a$ definiert und differenzierbar, ist dort $\psi'(x) \neq 0$ und strebt für $x \to \infty$ $\psi(x)$ gegen ∞, so ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

sicher immer dann, wenn der rechts stehende Grenzwert einen bestimmten eigentlichen oder uneigentlichen Wert hat.

Beispiel 1.119. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

Beispiel 1.120. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x} = \infty.$

Zurückführung anderer Aufgaben auf die Grundaufgaben

I. Es strebe $\varphi(x)$ gegen ∞ und $\psi(x)$ gegen ∞, wenn x gegen a strebt. Dann gilt

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x) - \psi(x)) = \lim_{x\to a} \psi(x) \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right).$$

II. Es strebe $\varphi(x)$ gegen 0 und $\psi(x)$ gegen ∞, wenn x gegen a strebt. Dann gilt

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x)\,\psi(x)) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}},$$

oder

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x)\,\psi(x)) = \lim_{x\to a} \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Beispiel 1.121. (1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0.$

(2) $\alpha \in \mathbb{R}^+ :$ $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^\alpha \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = 0.$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^\alpha e^{-x}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = ?$

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)} = 1.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

(6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\dfrac{e}{2}$.

(7) $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \to 0$ für $x \to 0$.

(8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

(9) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Aufgabe 1.122. Ermitteln Sie die Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - x}{\ln x},\ a > 0,\ x > 0, \qquad \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin \frac{2}{x}}{\tan \frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\tan \frac{\pi x}{2}},\ x > 1, \qquad \lim_{x\to 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{2x}};$$

$$\lim_{x\to\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right), \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right), \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\cos x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(n^2 \ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)\right), \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x - 1)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to a\,(x\neq a)} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}, \qquad \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\tan x}{x}};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \tanh x \sqrt{x^2+1}}{x^2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{x+1}{x-1}\right), \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sinh^2 \sqrt{x}};$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^3, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x \sin x}, \qquad \lim_{x\to -\infty} x\, e^x,$$

$$\lim_{y\to 0^+} y \ln y, \qquad \lim_{x\to -\infty} x^5 \ln x^2, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\ln x}.$$

1.18. **Aufgaben.**

Aufgabe 1.123. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$$

im jeweils größten Definitionsbereich D. Der zu f gehörende Graph wird mit G bezeichnet.

a) Geben Sie D an und untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ im Unendlichen und an der Stelle $x = 0$.
b) Untersuchen Sie die Funktion auf Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte und geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.
c) Geben Sie den Wertebereich dieser Funktion an.
d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

Aufgabe 1.124. Zeigen Sie, daß die Funktion $g(x) = (\ln x)^2,\ 0 < x \le 1$ umkehrbar ist. Bestimmen Sie für die Umkehrfunktion g^{-1} den Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge. Skizzieren Sie die Graphen von g^{-1} und g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Aufgabe 1.125. Gegeben sind die Funktionen
$$f(x) = x - x\,\ln x,\ x > 0; \quad g(x) = \frac{1}{2}x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$
Berechnen Sie den Wert von x, für den die Differenz $g(x) - f(x)$ minimal wird und berechnen Sie diesen minimalen Abstand.

Aufgabe 1.126. Einem Patienten wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bestimmte Menge eines Medikaments verabreicht. Die Funktion
$$f(x) = 10(e^{-\frac{x}{2}} - e^{-x})$$
beschreibt die Konzentration dieses Medikaments (Anzahl der Milliliter pro Liter Blut) nach x Stunden. Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Konzentration auf 75% ihres Höchstwertes abgesunken ist.

Aufgabe 1.127. Für jede reelle Zahl t, $t \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch
$$y = f_t(x) = (t - x)e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$
Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch. Skizziere die Graphen von f_1 und f_2 in ein und dasselbe Koordinatensystem.

Aufgabe 1.128. Für jede reelle Zahl t, $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch
$$y = f_t(x) = t\,x\,e^{-tx+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch. Skizziere die Graphen von f_1 und f_1^{-1} in ein und dasselbe Koordinatensystem.

Aufgabe 1.129. Gegeben ist eine Funktion f durch
$$f(x) = x\,e^{2-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuche K auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
b) Bestimme die Gleichung der Wendetangente.
c) Zeichne K für $-0,5 \leq x \leq 6$.
d) Das Schaubild der 1.Ableitung von f sei C. Zeichne C in das vorhandene Achsenkreuz ein für $0,25 \leq x \leq 6$.
e) Die Gerade $x = z$ mit $z > 0,5$ schneidet die kurve K im Punkt P und die Kurve C im Punkt Q. Für welchen Wert von z hat die Länge der Strecke PQ ein relatives Maximum?
f) Es sei $B(u, v)$ ein Punkt auf K. Für welche u geht die Kurventangente in B durch den Punkt $T(-2, 0)$?

Aufgabe 1.130. Gegeben ist die Funktion f durch
$$f(x) = \frac{5e^x - 4}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Ihr Schaubild sei K.

Untersuchen und zeichnen Sie K.

Zeigen Sie, daß f umkehrbar ist. Geben Sie die Definitionsmenge, Wertemenge und eine Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 1.131. Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = x\,(\ln x)^2, \quad x > 0.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Führen Sie eine Kurvenuntersuchung durch.
   Zeichnen Sie K.

b) Die Tangente an K im Kurvenpunkt B schneidet die y-Achse im vom Koordinatenursprung O verschiedenen Punkt P. Bestimmen Sie die Abszisse von B so, daß die Strecken BP und BO gleich lang sind.

c) Die Funktion g sei im offenen Intervall $\mathfrak{J}$ mindestens dreimal differenzierbar und es gelte $g(x) > 0$ für $x \in \mathfrak{J}$. Außerdem sei x_0 eine Wendestelle von g. Untersuchen Sie, ob x_0 eine Wendestelle von h mit $h(x) = \ln(g(x)),\ x \in \mathfrak{J}$ sein muß.

Aufgabe 1.132. Für jede reelle Zahl $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = x\,e^{1-tx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph sei G_t.

a) Untersuchen Sie den Graphen G_t auf Schnittpunkte mit den Achsen, lokale Extrempunkte, Wendepunkte und Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f_t(x)$ in Abhängigkeit von t. Geben Sie den Wertebereich der Funktion in Abhängigkeit von t an.

b) Zeichnen Sie den Graphen $G_{0,5}$ im Intervall $-0,5 < x < 7$.

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve für die Wendepunkte aller Graphen G_t. Geben Sie für G_t die Gleichung der gemeinsamen Wendetangente t_w an.

d) Auf dem Graphen G_t liegt der Punkt $P(v, f_t(v))$ mit $v > 0$. Werden durch diesen Punkt Parallelen zu den beiden Koordinatenachsen gezogen, so bilden diese Parallelen mit den Achsen ein Rechteck. Für welches v wird der Flächeninhalt des Rechtecks maximal? Geben Sie diesen Flächeninhalt an.

Aufgabe 1.133. Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$f_a(x) = -x\,\ln(ax^2), \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad x \in D_{f_a}.$$

a) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen f_a an. Zeigen Sie, daß die Funktionen f_a symmetrisch zum Koordinatenursprung sind und bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und Wendepunkte.

Weisen Sie die Art der Extrema nach. Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, auf deren Graphen alle lokalen Extrempunkte der Funktionen f_a liegen.

b) Zeigen Sie, daß die Graphen der Schar f_a keine gemeinsamen Punke besitzen.

c) Zeichnen Sie den Graphen G_4 im Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

d) Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ existiert eine Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Schnittpunkt $S(x > 0, 0)$ mit der x-Achse. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente.

Durch die x-Achse, die Tangente t_a und durch die Gerade der Ortskurve der lokalen Maximumpunkte wird für jedes a ein Dreieck begrenzt. Weisen Sie nach, daß alle so gebildeten Dreiecke zueinander ähnlich sind.

e) Weisen Sie nach, daß die Ableitung der Funktion

$$F_a(x) = -\frac{x^2}{2}\,(\ln(ax^2) - 1), \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad x \neq 0$$

mit der Funktion $f_a(x)$ übereinstimmt.

Aufgabe 1.134. Gegeben sind zwei Funktionen durch

$$f(x) = -x \ln x,\ x \in \mathbb{R}^+; \quad g(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Wert für x, für den die Differenz $g(x) - f(x)$ minimal wird und berechnen Sie diesen minimalen Abstand.

Aufgabe 1.135. Gegeben sind zwei Funktionen durch

$$f(x) = 1 - x^2 + \ln x,\ x \in \mathbb{R}^+; \quad g(x) = x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Wert für x, für den die Differenz $g(x) - f(x)$ minimal wird und berechnen Sie diesen minimalen Abstand.

Aufgabe 1.136. Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^x + x,\ x \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Funktionen $g(x) = e^x$ und $h(x) = -x$ in einem Koordinatensystem. Schließen Sie aus der Skizze, daß die Funktion f genau eine Nullstelle ξ hat und diese im Intervall $(-1, 0)$ liegt.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktion f eine Nullstelle $\xi \in (-1, 0)$ hat, indem Sie dazu den **Zwischenwertsatz** benutzen: *Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

(c) Zeigen Sie, daß die Funktion f streng monoton wachsend ist. Kann f mehrere Nullstellen haben?

Aufgabe 1.137. Diskutieren Sie folgende Funktionen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}; \qquad g(x) = e^{-x} \sin x; \qquad h(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}.$$

(Lokale und globale Extrema, Wendepunkte, Nullstellen, Asymptoten).

Aufgabe 1.138. Gegeben ist die Funktion

$$f_a(x) = \ln \frac{4x - a}{ax^2}, \quad a \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{D}_a.$$

(a) Geben Sie $\mathbb{D}_a$ an.

(b) Untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Grenzen des Definitionsbereichs.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a. Wie hängt die Anzahl der Nullstellen von a ab?

(d) Haben die Graphen der Funktionen f_a Extrempunkte? Von welcher Art sind sie und welche Koordinaten haben sie?

(e) Die Menge der Extrempunkte bildet die Kurve K. Ermitteln Sie die Gleichung der Kurve K. Sind alle Punkte von K auch Extrempunkte der Scharkurven?

(f) Wie viele Punkte hat der Graph der Funktion f_a mit dem Graph der Funktion

$$h(x) = \ln \frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

gemeinsam?

Aufgabe 1.139. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a(x) = \frac{1 - a\,e^x}{1 + a\,e^x}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \in \mathbb{D}_a.$$

(a) Geben Sie $\mathbb{D}_a$ mit einer Fallunterscheidung bezüglich a an.
(b) Welche Funktionen der Schar besitzen Nullstellen?
(c) Wie verhält sich $f_a(x)$, wenn x gegen die Grenzen des Definitionsbereichs strebt?
(d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_a.
(e) Welches Verhalten zeigt $f_a'(x)$ für $|x| \to \infty$?
(f) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Schnittpunktes S_a der den Funktionen f_a und f_a' zugeordneten Graphen für $a > 0$.
(g) Die Menge der Schnittpunkte S_a bildet eine Kurve K. Berechnen Sie die Kurvengleichung von K.
(h) Für welche Werte von a sind die zugehörigen Graphen von f_a punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung?

2. Die Integralrechnung

Die Aufgabe der Differentialrechnung bestand im wesentlichen darin, von einer gegebenen (differenzierbaren) Funktion $y = f(x)$ die Ableitung $y' = f'(x)$ zu ermitteln.

Die Aufgabe der Integralrechnung ist die umgekehrte: Zu einer gegebenen (stetigen) Ableitungsfunktion $f(x) = F'(x)$ soll die ursprüngliche *Stammfunktion* $F(x)$, aus der die gegebene Funktion $f(x)$ durch Ableiten hervorgegangen ist, ermittelt werden.

2.1. Das unbestimmte Integral.

In den einfachsten Fällen kann man die Stammfunktion $F(x)$ sofort schreiben, wenn $F'(x)$ gegeben ist:

$F'(x)$ gegeben	e^x	$2x$	$\sin x + \cos x$	$1/x$	a
$F(x)$ gesucht	e^x	x^2	$-\cos x + \sin x$	$\ln x$	ax

Im allgemeinen wird die Bestimmung von Stammfunktionen nicht so einfach sein.

Hat man $F(x)$ gefunden, so ist damit auch $F(x) + C$, worin C eine beliebige Konstante ist, eine Stammfunktion, denn beim Ableiten fällt diese wieder heraus

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x).$$

Erklärung 2.1. Jede differenzierbare Funktion $F(x)$, deren Ableitung $F'(x)$ gleich einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ ist, heißt eine *Stamm-* oder *Integralfunktion* von $f(x)$ und man schreibt

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Die Menge aller Integralfunktionen von $f(x)$ ist

$$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

und heißt *das unbestimmte Integral* von $f(x)$. C wird die *Integrationskonstante* genannt.

Erläuterungen.

(1) $\int f(x)\,dx$ gesprochen: Integral über f von x dx.
(2) $f(x)$ heißt auch *Integrand*; die Rechenoperation wird *Integrieren* genannt.

(3) Differenzieren und Integrieren sind umgekehrte Aufgabenstellungen.

(4) Schreibt man die Ableitung $F'(x)$ als Differentialquotient $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, so folgt $dF(x) = f(x)\,dx$. Beiderseitige Integration ergibt dann $\int dF(x) = \int f(x)\,dx$. Andererseits war aber auch $F(x) = \int f(x)\,dx$, so daß sich für das Integral- und Differentialzeichen die Identität $\int dF(x) \equiv F(x)$ ergibt.

Z.B. $\int dx \equiv x$, $\int d(\sin x) = \sin x$, $\int d(\ln x) = \ln x$.

Kann man den Integranden als Differential einer Funktion $F(x)$ schreiben, so hat man damit also die Integralfunktion bereits gefunden.

(5) Der Gesamtheit der Funktionen des unbestimmten Integrals $F(x) + C$ entspricht geometrisch eine Menge von Bildkurven (die sogenannten Integralkurven). Dabei wird jedem speziellen C-Wert eineindeutig eine Integralkurve zugeordnet.

Da sich zwei Kurven $F(x) + C_1$ und $F(x) + C_2$ durch Parallelverschiebung in y-Achsen-Richtung zur Deckung bringen lassen, stellt das unbestimmte Integral demnach geometrisch eine Schar unendlich vieler untereinander kongruenter Integralkurven dar.

Satz 2.2. Faktorregel. *Ein konstanter Faktor $a \in \mathbb{R}$ kann beliebig vor oder hinter das Integral gesetzt werden*

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx.$$

Beweis. Wir setzen $F'(x) = af(x) \;\Rightarrow\; F(x) = \int af(x)\,dx$. Mit der Faktorregel der Differentialrechnung erhalten wir

$$\frac{1}{a}F'(x) = \left(\frac{1}{a}F(x)\right)' = f(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{a}F(x) = \int f(x)\,dx \;\Rightarrow\; F(x) = a\int f(x)\,dx = \int af(x)\,dx.$$

□

Satz 2.3. Summenregel. *Eine Summe von Funktionen kann man gliedweise integrieren, bzw. das Integral einer Summe ist gleich der Summe der Integrale*

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Beweis. Setzt man hier

$$F'(x) := f(x) \;\Rightarrow\; F(x) = \int f(x)\,dx, \quad G'(x) := g(x) \;\Rightarrow\; G(x) = \int g(x)\,dx,$$

so ergibt sich mit der Summenregel der Ableitungsrechnung

$$F'(x) + G'(x) = (F(x) + G(x))' = f(x) + g(x) \;\Rightarrow\; F(x) + G(x) = \int (f(x) + g(x))\,dx$$

$$\Rightarrow\; \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x) + g(x))\,dx.$$

□

Die Grundintegrale

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0;$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C; \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C;;$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}; \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z};$$
$$\int e^x\,dx = e^x + C; \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\ |x| < 1; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C,\ |x| < 1;$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C; \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = -\mathrm{arccot}\, x + C;$$
$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C; \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C;$$
$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C,\ x \neq 0; \qquad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C,\ |x| > 1;$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C,\ |x| < 1; \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C,\ |x| > 1.$$

Beispiel 2.4. Durch direkte Integration erhält man:

1. $\displaystyle\int (x^3 + 4x + \frac{1}{x^2} - 3)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - \frac{1}{x} - 3x + C;$
2. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}\right) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2} + C;$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos\alpha}{1+t^2}\,dt = \cos\alpha \arctan t + C,\ \alpha = const \in \mathbb{R};$
4. $\displaystyle\int \frac{1 - xe^{\alpha+x}}{x}\,dx = \ln|x| - e^{\alpha+x} + C,\ \alpha = const \in \mathbb{R};$
5. $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \tan x - x + C.$

Aufgabe 2.5. (1) Folgende unbestimmten Integrale sind unmittelbar zu ermitteln:

a) $\int (3x-5)^2 dx,$ *b*) $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 5x + 10}{4x^3}\,dx;$

c) $\displaystyle\int \frac{10x^2 - 7x - 12}{2x-3}\,dx,$ *d*) $\int \sin(x-a)\,dx;$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x},$ *f*) $\displaystyle\int \frac{\cosh^2 x}{\sinh^2 x}\,dx.$

(2) Welche Integralfunktion von $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x}}$ verläuft durch den Punkt $P(3, -2)$?

(3) Welche Funktion hat $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ zur Ableitung und enthält den Punkt $P(0, 1)$?

(4) Es gilt einerseits

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int d \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

und andererseits

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2} \int d \cos^2 x = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C,$$

aber offensichtlich

$$\frac{1}{2} \sin^2 x + C \neq -\frac{1}{2} \cos^2 x + C.$$

Wie erklärt sich dieser (scheinbare) Widerspruch?

2.2. **Formale Integrationsmethoden.** Im folgenden betrachten wir die wichtigsten formalen Integrationsmethoden. Diese führen jeweils für bestimmte Typen von Funktionen zum Ziele. Führt keine dieser Methoden zum Ziel, so muß man Näherungsmethoden einsetzen.

2.2.1. *Die Substitutionsmethode.* **Prinzip**: In vielen Fällen kann ein gegebenes Integral $\int f(x) \, dx$ auf ein einfaches oder sogar ein bekanntes Integral zurückgeführt werden, wenn man statt der ursprünglichen Integrationsveränderlichen x mittels der **Substitutionsgleichung** $x = \varphi(t)$ und dem daraus abgeleiteten Differential $dx = \varphi'(x) \, dt$ eine neue Variable t einführt. Es wird dann

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int g(t) \, dt \quad \text{mit} \quad g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Hat man das auf t transformierte Integral formal gelöst, so daß also

$$\int g(t) \, dt = G(t) + C$$

ist, so muß man anschließend wieder von t auf x **resubstituieren**. Dies geschiet anhand der Substitutionsgleichung, die nach t aufzulösen ist

$$x = \varphi(t) \;\Leftrightarrow\; t = \psi(x) \;\Rightarrow\; \int f(x) \, dx = \int g(t) \, dt = G(\psi(x)) + C.$$

Man darf also **nur** solche Funktionen $\varphi(t)$ substituieren, welche eine (auch formal herstellbare) Umkehrfunktion besitzen.

Zulässige Substitutionen

1. Typus: $\int f(ax + b) \, dx, \; a = const \neq 0, \; b = const$

Substitution: $ax + b = t \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{a} \, dt.$

Damit ergibt sich $\int f(ax + b) \, dx = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int f(t) \, dt.$

Beispiel 2.6.

$$\int (5x-4)^4\,dx = \frac{1}{5}\int t^4\,dt = \frac{1}{25}(5x-4)^5 + C,$$

Substitution: $5x-4=t,\ dx=\frac{1}{5}\,dt.$

Beispiel 2.7.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-2x)^2} + C,$$

Substitution: $1-2x=t,\ dx=-\frac{1}{2}\,dt.$

Beispiel 2.8.

$$\int \cos(a\varphi-\varphi_0)\,d\varphi = \frac{1}{a}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a}\sin(a\varphi-\varphi_0) + C,$$

Substitution: $a\varphi-\varphi_0=t,\ d\varphi=\frac{1}{a}\,dt.$

Beispiel 2.9.

$$\int \frac{3\alpha\pi}{2-\frac{1}{3}u}\,du = -9\alpha\pi\int\frac{dt}{t} = -9\alpha\pi\ln\left|2-\frac{1}{3}u\right| + C,$$

Substitution: $2-\frac{1}{3}u=t,\ du=-3\,dt.$

Beispiel 2.10.

$$\int \frac{dy}{\sinh^2\frac{y}{2}} = 2\int\frac{dt}{\sinh^2 t} = -2\coth\frac{y}{2} + C,$$

Substitution: $\frac{y}{2}=t,\ dy=2\,dt.$

Aufgabe 2.11.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)^4}$, 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x}}$, 3. $\displaystyle\int\frac{3e^{x-2}}{4e^{2x+1}}\,dx$;

4. $\displaystyle\int \sqrt[3]{p^{2q-1}}\,dq$, 5. $\displaystyle\int\sqrt[3]{p^{2q-1}}\,dp$, 6. $\displaystyle\int (e^{4-3y})^5\,dy$;

7. $\displaystyle\int\frac{3dt}{4t-5}$, 8. $\displaystyle\int\sin\frac{\alpha-1}{4}\cos\frac{\alpha-1}{4}\,d\alpha$, 9. $\int 4e^{2x-3}\,dx$;

10. $\int\sqrt[n]{(1-x)^m}\,dx$, 11. $\displaystyle\int\sin\frac{\alpha}{3}\,d\alpha$, 12. $\displaystyle\int 2^{2-\frac{x}{2}}\,dx$.

2. Typus: $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$

Der Integrand besteht aus einer mittelbaren Funktion, multipliziert mit der Ableitung ihrer inneren Funktion.

Substitution: $\varphi(x)=t \Rightarrow \varphi'(x)\,dx=dt.$

Damit ergibt sich für das Integral $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt.$

Noch schneller führt die folgende **Differential-Transformation** zum Ziel:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x).$$

Beispiel 2.12.

$$\int \cos^5 x \sin x \, dx = -\int t^5 \, dt = -\frac{1}{6}\cos^6 x + C,$$

Substitution: $\cos x = t, \ -\sin x \, dx = dt.$

Beispiel 2.13.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \, dx = \int \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} \ln x \sqrt{\ln x} + C, \ x > 1,$$

Substitution: $\ln x = t, \ \dfrac{dx}{x} = dt.$

Beispiel 2.14.

$$\int \frac{(\arctan x)^2}{1 + x^2} \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{1}{3}(\arctan x)^3 + C,$$

Substitution: $\arctan x = 7, \ \dfrac{dx}{1 + x^2} = dt.$

Beispiel 2.15.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int (1 + t^2) \, dt = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C,$$

Substitution: $\tan x = t, \ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt.$

Aufgabe 2.16.

1. $\displaystyle\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx,$	2. $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\sqrt[3]{(\ln(\sin x))^2}} \, dx,$	3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x};$
4. $\displaystyle\int (4x^3 - 24x + 5)^7 (x^2 - 2) \, dx,$	5. $\displaystyle\int x\sqrt{5 + x^2} \, dx,$	6. $\displaystyle\int 6xe^{-x^2} \, dx;$
7. $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx,$	8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tan x}}$	9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^4 x};$
10. $\displaystyle\int x(\cos(x^2) - \sin(x^2)) \, dx,$	11. $\displaystyle\int \sin(2x) e^{\sin^2 x} \, dx,$	12. $\int \tan x \, dx.$

3. Typus: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$

Aufgabe 2.17.

1. $\int \cot x \, dx,$	2. $\int \tanh x \, dx,$	3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x};$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x},$	5. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx,$	6. $\displaystyle\int \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2 + 1} \, dx;$
7. $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx,$	8. $\displaystyle\int \frac{4\sin(2x)}{5 - 3\sin^2 x} \, dx.$	

4. Typus: $\int \sin^2 x\,dx, \quad \int \cos^2 x\,dx, \quad \int \sinh^2 x\,dx, \quad \int \cosh^2 x\,dx$

Für das erste Integral benutzen wir die Identität $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$:

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

Für das zweite Integral benutzen wir die Identität $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$:

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2x))\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

Für die Hyperbelfunktionen gelten die Gleichungen

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x), \quad \sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x$$

und auch

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh(2x)-1), \quad \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh(2x)+1).$$

Für das dritte Integral erhalten wir dann:

$$\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cosh(2x)-1)\,dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sinh(2x) + C.$$

Für das vierte Integral erhalten wir:

$$\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cosh(2x)+1)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sinh(2x) + C.$$

Aufgabe 2.18. Lösen Sie:

$$\int \sin^2\left(\frac{x}{3}\right)\,dx, \quad \int \sin^3 x\,dx, \quad \int \tan^3\varphi\,d\varphi, \quad \int \cos^4 t\,dt, \quad \int \cosh^2(ax+b)\,dx.$$

5. Typus: $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad |x|<a$

Substitution: $x = a\sin t \;\Rightarrow\; dx = a\cos t\,dt,\; t = \arcsin\frac{x}{a}$.
Mit diesem Ansatz erhält man für das Integral

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t) + C.$$

Resubstituiert man wieder auf x, so ist

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

und damit ergibt sich

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}) + C.$$

Mit der gleichen Substitution folgt für das zweite Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int dt = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Beispiel 2.19.

$$J=\int\sqrt{-4x^2+12x+7}\,dx=\int\sqrt{-(2x-3)^2+16}\,dx.$$

Erste Substitution: $t=2x-3,\ dx=\frac{1}{2}\,dt\ \Rightarrow\ J=\frac{1}{2}\int\sqrt{4^2-t^2}\,dt.$
Zweite Substitution: $t=4\sin\varphi,\ dt=4\cos\varphi\,d\varphi,\ \varphi=\arcsin\frac{t}{4}=\arcsin\frac{2x-3}{4}\ \Rightarrow$

$$J=4(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)+C=4\arcsin\frac{2x-3}{4}+\frac{2x-3}{4}\sqrt{-4x^2+12x+7}+C.$$

Beispiel 2.20.

$$J=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-3x^2}}.$$

Substitution: $\sqrt{3}x=\sin t,\ dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\,dt,\ t=\arcsin(\sqrt{3}x)\ \Rightarrow$

$$J=-\sqrt{3}\cot t+C=-\frac{1}{x}\sqrt{1-3x^2}+C,$$

da

$$\cot(\arcsin z)=\frac{\cos(\arcsin z)}{\sin(\arcsin z)}=\frac{\sqrt{1-(\sin(\arcsin z)^2)}}{z}=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$$

gilt.

Aufgabe 2.21. Lösen Sie folgende Integrale:

$$\int 3x\sqrt{5-x^2}\,dx,\qquad \int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx,\ |x|<a,\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}.$$

6. Typus: $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx,\qquad \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\qquad |x|>a>0$

Substitution: $x=a\cosh t\ \Rightarrow\ dx=a\sinh t\,dt,\ t=\operatorname{Arcosh}\frac{x}{a}.$
Für das erste Integral erhalten wir

$$J=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=a^2\int\sinh^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}(\sinh t\cosh t-t)+C.$$

Beachtet man die Darstellung der Area-Funktion als Logarithmusfunktion, hier

$$t=\operatorname{Arcosh}\frac{x}{a}=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|,$$

so ergibt sich

$$J=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C_0,\quad C_0=C+\frac{a^2}{2}\ln a.$$

Mit der gleichen Substitution folgt für das zweite Integral

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=t+c=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C_0,\quad C_0=C-\ln a.$$

Beispiel 2.22.

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a^2}\sqrt{x^2-a^2} + \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|\right) + C.$$

Beispiel 2.23.

$$\int \sqrt{x^2-6x+4}\,dx = \int \sqrt{(x-3)^2-5}\,dx = J.$$

Erste Substitution: $x-3=t,\ dx=dt.$
Zweite Substitution: $t=\sqrt{5}\cosh u,\ dt=\sqrt{5}\sinh u\,du\ \Rightarrow$

$$J = \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x+4} - \frac{5}{2}\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+4}| + C.$$

Beispiel 2.24.

$$\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{x^2-8}} = 3\int \frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2-8}} = 3\int d\sqrt{x^2-8} = 3\sqrt{x^2-8} + C.$$

Aufgabe 2.25. Lösen Sie folgende Integrale:

$$\int \frac{6x-7}{\sqrt{4x^2-12x+5}}\,dx, \qquad \int (x-5)\sqrt{(x^2-10x+21)^5}\,dx.$$

7. Typus: $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx, \qquad \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Substitution: $x=a\sinh t\ \Rightarrow\ dx=a\cosh t\,dt,\ t=\operatorname{Arsinh}\frac{x}{a}=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}\right).$

Beispiel 2.26.

$$J = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sinh^2 t} = -\frac{1}{2}\coth t + C = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + C.$$

Beispiel 2.27.

$$J = \int \sqrt{9x^2-6x+10}\,dx = \int \sqrt{(3x-1)^2+9}\,dx.$$

Erste Substitution: $3x-1=t,\ dx=\frac{1}{3}\,dt.$
Zweite Substitution: $t=3\sinh u,\ dt=3\cosh u\,du\ \Rightarrow$

$$J = \frac{3x-1}{6}\sqrt{9x^2-6x+10} + \frac{3}{2}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+10}) + C.$$

Aufgabe 2.28. Lösen Sie:

$$\int \sqrt{49x^2-56x+27}\,dx, \qquad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}.$$

2.2.2. *Die Methode der Produktintegration.* (Andere Bezeichnungen sind: Teilintegration, partielle Integration.)

Diese Integrationsregel ist eine unmittelbare Folge der Ableitungsregel für ein Produkt zweier Funktionen $u = u(x)$ und $v = v(x)$, nämlich $d(uv) = v\,du + u\,dv$. Beiderseitige Integration ergibt

$$\int d(uv) = uv = \int v\,du + \int u\,dv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx$$

und

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Dies ist die Formel der *Produktintegration.* Mit dieser Formel kann man das Integral $\int u\,dv = \int u(x)v'(x)\,dx$ zurückführen auf die Bestimmung des Integrals $\int v\,du = \int v(x)u'(x)\,dx$, falls die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ differenzierbar sind und die Funktion $v'(x)$ geschlossen integriert werden kann.

Beispiel 2.29. Zu bestimmen ist $J = \int x\cos x\,dx$.

Man setze $u = x,\ dv = \cos x\,dx$ und erhalte dann $du = dx,\ v = \sin x$ und

$$J = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Beispiel 2.30. Zu bestimmen ist $J = \int (3x-7)e^{-x}\,dx$.

Man setze $u = 3x - 7,\ dv = e^{-x}\,dx$, rechne aus $du = 3\,dx,\ v = -e^{-x}$ und erhalte

$$J = -(3x-7)e^{-x} + \int 3e^{-x}\,dx = -(3x-4)e^{-x} + C.$$

Beispiel 2.31. Zu bestimmen ist $J = \int e^{mx}\cos(nx)\,dx$.

Wir setzen $u = e^{mx},\ dv = \cos(nx)\,dx$, rechnen aus $du = me^{mx}\,dx,\ v = \frac{1}{n}\sin(nx)$ und erhalten

$$J = \frac{1}{n}e^{mx}\sin(nx) - \frac{m}{n}\int e^{mx}\sin(nx)\,dx.$$

Das verbleibende Integral $J_1 = \int e^{mx}\sin(nx)\,dx$ hat eine ähnliche Struktur wie das gegebene. Wir setzen $u_1 = e^{mx},\ dv_1 = \sin(nx)\,dx$, rechnen aus $du_1 = me^{mx},\ v_1 = -\frac{1}{n}\cos(nx)$ und erhalten

$$J_1 = -\frac{1}{n}e^{mx}\cos(nx) + \frac{m}{n}J \ \Rightarrow$$

$$J = \frac{1}{n}e^{mx}\sin(nx) - \frac{m}{n}\left(-\frac{1}{n}e^{mx}\cos(nx) + \frac{m}{n}J\right).$$

Daraus folgt

$$J = \frac{m\cos(nx) + n\sin(nx)}{m^2+n^2}\,e^{mx} + C, \quad J_1 = \frac{m\sin(nx) - n\cos(nx)}{m^2+n^2}\,e^{mx} + C.$$

Beispiel 2.32. Zu bestimmen ist $J = \int x^3\cosh x\,dx$.

Wir setzen $u = x^3,\ dv = \cosh x\,dx$, rechnen aus $du = 3x^2\,dx,\ v = \sinh x$ und erhalten

$$J = x^3\sinh x - 3\int x^2\sinh x\,dx.$$

Wir setzen $J_1 = \int x^2 \sinh x\, dx,\ u_1 = x^2,\ dv_1 = \sinh x\, dx$, rechnen aus $du_1 = 2x\, dx,\ v_1 = \cosh x$ und erhalten

$$J_1 = x^2 \cosh x - 2 \int x \cosh x\, dx.$$

Wir setzen $J_2 = \int x \cosh x\, dx,\ u_2 = x,\ dv_2 = \cosh x\, dx$, rechnen aus $du_2 = dx,\ v_2 = \sinh x$ und erhalten

$$J_2 = x \sinh x - \int \sinh x\, dx = x \sinh x - \cosh x + C,$$

$$J = x^3 \sinh x - 3x^2 \cosh x + 6x \sinh x - 6 \cosh x + C.$$

Beispiel 2.33. Zu bestimmen ist $J = \int \arctan x\, dx$.

Wir setzen $u(x) = \arctan x,\ dv = dx$, rechnen aus $du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = x$ und erhalten

$$J = x \arctan x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C.$$

Beispiel 2.34. Zu bestimmen ist $J = \int \arcsin x\, dx$.

Wir setzen $u = \arcsin x,\ dv = dx$, rechnen aus $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x$ und erhalten

$$J = x \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \int d\sqrt{1-x^2} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Beispiel 2.35. Zu bestimmen ist $J = \int \ln x\, dx$.

Wir setzen $u = \ln x,\ dv = dx$, rechnen aus $du = \frac{dx}{x},\ v = x$ und erhalten

$$J = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Aufgabe 2.36. Lösen Sie:

$$\int \sqrt{x} \ln x\, dx, \quad \int x^3 e^x\, dx, \quad \int \sin(\ln x)\, dx, \quad \int \operatorname{arccot} x\, dx, \quad \int x \arcsin x\, dx,$$

Aufgabe 2.37. Beweisen Sie:

$$\int (x-1) x^{-2} e^x\, dx = x^{-1} e^x + C.$$

Anleitung: $u = (x-1)e^x,\ dv = x^{-2}\, dx$.

2.2.3. *Integration durch Partialbruchzerlegung.* Es seien

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i,\ a_i \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \sum_{s=0}^{n} b_s x^s,\ b_s \in \mathbb{R}, \quad J = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx.$$

Wenn $Grad\, P(x) \geq Grad\, Q(x)$ ist, so wird der Polynombruch durch Ausdividieren in ein Polynom und eine echt gebrochen-rationale Funktion zerlegt, also

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

worin $S(x)$ und $R(x)$ Polynome sind und $Grad\, R(x) < Grad\, Q(x)$ gilt.

Prinzip: Der echte Polynombruch wird in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt und jeder Partialbruch einzeln integriert.

Die Aufspaltung in Partialbrüche erfordert zunächst die Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms. Wir unterscheiden folgende Fälle:

I^{ter} **Fall**: *Das Nennerplynom hat lauter einfache reelle Nullstellen.*

Vorgelegt: $J = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ mit $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ und $Grad\,P(x) < Grad\,Q(x)$.

Ansatz: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$.

Die Koeffizienten $A_1, A_2, ..., A_n$ werden in diesem Fall am leichtesten dadurch bestimmt, daß man die Ansatzgleichung mit dem Hauptnenner durchmultipliziert und dann für x nacheinander die Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n$ einsetzt. Sind die A_i, $i = 1, ..., n$ bestimmt, so lautet das Ergebnis

$$J = A_1 \ln|x-x_1| + A_2 \ln|x-x_2| + ... + A_n \ln|x-x_n| + C.$$

Beispiel 2.38. Zu bestimmen ist $J = \int \frac{4x-9}{x^2-8x+15}\,dx$.

I^{ter} **Schritt**: Nennerpolynom-Nullstellen-Bestimmung

$$x^2-8x+15 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 5,\; x_2 = 3 \;\Rightarrow\; x^2-8x+15 = (x-5)(x-3).$$

II^{ter} **Schritt**: Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{4x-9}{x^2-8x+15} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$$

und Koeffizientenbestimmung

$$4x-9 \equiv A_1(x-3) + A_2(x-5) \quad \Rightarrow \quad \frac{4x-9}{x^2-8x+15} = \frac{11}{2(x-5)} - \frac{3}{2(x-3)}.$$

III^{ter} **Schritt**: Integration der Partialbrüche

$$J = \frac{11}{2}\ln|x-5| - \frac{3}{2}\ln|x-3| + C.$$

Beispiel 2.39. Zu bestimmen ist $J = \int \frac{2x^4-x^2-5x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$.

I^{ter} **Schritt**: Ausführung der Division

$$(2x^4-x^2-5x+1) : (x^3-x^2-2x) = 2x+2+\frac{5x^2-x+1}{x^3-x^2-2x}.$$

II^{ter} **Schritt**: Nennerpolynom-Nullstellen-Bestimmung

$$x^3-x^2-2x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 2,\; x_3 = -1 \;\Rightarrow\; x^3-x^2-2x = x(x-2)(x+1).$$

III^{ter} **Schritt**: Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{5x^2-x+1}{x^3-x^2-2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+1}$$

und Koeffizientenbestimmung

$$5x^2 - x + 1 \equiv A_1\,(x-2)(x+1) + A_2\,x(x+1) + A_3\,x(x-2) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{19}{6(x-2)} + \frac{7}{3(x+1)}.$$

IV^{ter} **Schritt**: Integration

$$J = x^2 + 2x - \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{19}{6}\ln|x-2| + \frac{7}{3}\ln|x+1| + C.$$

II^{ter} **Fall**: *Das Nennerplynom hat lauter reelle Nullstellen, die auch mehrfach auftreten.*

Vorgelegt: $J = \displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ mit $Q(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r}$, $k_1+k_2+...+k_r = Grad\,Q(x)$ und $Grad\,P(x) < Grad\,Q(x)$.

Ansatz:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}\\ &+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}\\ &+ ...\\ &+ \frac{A_{r1}}{x-x_r} + \frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2} + ... + \frac{A_{rk_r}}{(x-x_r)^{k_r}}.\end{aligned}$$

Beispiel 2.40. Zu bestimmen ist $J = \displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}\,dx.$

Der Ansatz lautet

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + + \frac{A_{21}}{x+1} \quad \Rightarrow$$

$$J = -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.$$

Beispiel 2.41. Zu bestimmen ist

$$J = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 4}{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16}\,dx = \int \frac{x^3 - 2x^2 + x - 4}{(x-2)^4}\,dx.$$

$$\Rightarrow \quad J = \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \frac{5}{2(x-2)^2} + \frac{2}{3(x-2)^3} + C.$$

III^{ter} **Fall**: *Das Nennerplynom besitzt lauter einfache komplexe Nullstellen.*

Es werden je zwei zueinander konjugiert komplexe Nullstellen zu einem quadratischen Faktor zuszmmengefaß.

Vorgelegt: $J = \displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ mit $Q(x) = ((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)((x-\alpha_2)^2+\beta_2^2)...((x-\alpha_p)^2+\beta_p^2)$, $2p = n$, und $Grad\,P(x) < Grad\,Q(x) = n$.

Ansatz: $\displaystyle\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{A_2x + B_2}{(x-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + ... + \frac{A_px + B_p}{(x-\alpha_p)^2 + \beta_p^2}.$

$$\Rightarrow \quad J_1 := \int \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2}\, dx = \frac{A_1}{2} \ln((x-\alpha_1)^2 + \beta_1^2) + \frac{\alpha_1 A_1 + B_1}{\beta_1} \arctan \frac{x-\alpha_1}{\beta_1} + C_1$$

usw.

Beispiel 2.42.

$$J = \int \frac{6x-11}{x^2-8x+25}\, dx \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 25 = (x-4)^2 + 9 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{6x-11}{x^2-8x+25} = 3\frac{2(x-4)}{(x-4)^2+9} + \frac{13}{(x-4)^2+9} \quad \Rightarrow$$

$$J = 3\ln(x^2-8x+25) + \frac{13}{3} \arctan \frac{x-4}{3} + C.$$

Beispiel 2.43.

$$J = \int \frac{(2x-7)}{(x^2+1)(x^2-2x+4)}\, dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(2x-7)}{(x^2+1)((x-1)^2+3)} = \frac{-8x-25}{13(x^2+1)} + \frac{8x+9}{13((x-1)^2+3)} \quad \Rightarrow$$

$$J = \frac{4}{13} \ln \frac{x^2-2x+4}{x^2+1} - \frac{25}{13} \arctan x + \frac{17}{13\sqrt{3}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Aufgabe 2.44. Lösen Sie

$$\int \frac{-3x+23}{x^2+x-12}\, dx, \quad \int \frac{x^2+4}{x^3-x}\, dx \quad \int \frac{dx}{x^2+7x+15}, \quad \int \frac{dx}{9x^2-6x-8},$$

$$\int \frac{-x^2-14x-9}{(x^2-1)^2}\, dx, \quad \int \frac{18x-13}{x^2+14x+58}\, dx.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.45. Lösen Sie folgende Integrale:

$$\int (x^3 - 2x^2 + x - 1)\, dx, \qquad \int (x^4+1)^2\, dx, \qquad \int \frac{(2x+1)(x^2-1)}{5x}\, dx,$$

$$\int \left(\sqrt{x\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[6]{x} \right) dx, \qquad \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2x} \right)^3 dx, \qquad \int x(x+1)(x+2)\, dx,$$

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx, \qquad \int \frac{x^2-4x+2}{\sqrt[3]{x}}\, dx, \qquad \int (1+\sqrt[4]{x})^4\, dx,$$

$$\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\, dx, \qquad \int e^{-2x}\, dx, \qquad \int 2e^{4+3x}\, dx$$

Aufgabe 2.46. Führen Sie jeweils die Integration durch:

$$\int \tan^2 x\,dx, \qquad \int \cot^2 x\,dx, \qquad \int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx,$$
$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx, \qquad \int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x\,\cos^2 x}\,dx,$$
$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\,\cos^2 x}\,dx, \qquad \int \tan x\,dx, \qquad \int \cot x\,dx$$

Aufgabe 2.47. Rechnen Sie aus:

$$\int 2^{3x}\,3^{2x}\,dx, \qquad \int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)dx, \qquad \int 5^{1-3x}\,dx$$

Aufgabe 2.48. Integrieren Sie:

$$\int \sin(ax+b)\,dx, \qquad \int \cos(ax+b)\,dx, \qquad \int \cos^2(ax+b)\,dx,$$
$$\int \sin^2(ax+b)\,dx, \qquad \int \frac{1}{x-a}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(a-x)^2}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{(1+x)^4}\,dx, \qquad \int x\sqrt{1-x}\,dx$$

Aufgabe 2.49.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}-3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx, \qquad \int \frac{x^2}{(1-x)^3}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx,$$
$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx, \qquad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx, \qquad \int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$$

Aufgabe 2.50.

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(x+1)(2-x)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx, \qquad \int x\,e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}\,dx$$

Aufgabe 2.51.

$$\int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(1-x)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(1+x^3)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{(1-x^4)}\,dx, \qquad \int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt[4]{x}}\,dx,$$
$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}\,dx, \qquad \int e^{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx,$$
$$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx, \qquad \int \frac{1}{1+e^x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Aufgabe 2.52.

$$\int \frac{1}{3+\cos^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\cos x}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx, \qquad \int \cos 2x\,\cos 5x\,dx, \qquad \int \sin 2x\,\cos 5x\,dx,$$
$$\int \sin^4 x\,\cos x\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx,$$
$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt[5]{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}}\,dx$$

Aufgabe 2.53.

$$\int \sqrt[3]{\sin x}\cos^3 x\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{\sqrt{2+2\cos x+\cos^2 x}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$
$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int \frac{\ln\arccos x}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$
$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx, \qquad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx, \qquad \int \frac{1}{1+e^x+e^{2x}+e^{3x}}\,dx$$

Aufgabe 2.54.

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx, \qquad \int \arccos^2 x\,dx, \qquad \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx, \qquad \int x^2 \arccos x\,dx,$$
$$\int x^2 e^x\,dx, \qquad \int (6x+5)\arctan x\,dx, \qquad \int x \ln(1+\frac{1}{x})\,dx,$$
$$\int x\sin\sqrt{x}\,dx, \qquad \int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx, \qquad \int 3^x \cos x\,dx,$$
$$\int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx, \qquad \int \arctan\sqrt{2x-1}\,dx, \qquad \int x\arctan^2 x\,dx,$$
$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx, \qquad \int \sin(\ln x)\,dx, \qquad \int \cos(\ln x)\,dx$$

2.3. **Das bestimmte Integral.** Das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion $y = f(x),\ x \in \mathcal{I}$ wurde durch die Gleichung $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ erklärt, falls für die Funktion $F(x)$ die damit gleichwertige Beziehung $F'(x) = f(x)$ bestehe. Die unbestimmte Integrationskonstante C, die dem Integral den Namen gibt, fällt heraus, wenn man nacheinander für x zwei reelle Werte, etwa $a \in \mathcal{I}$ und $b \in \mathcal{I}$, einsetzt und anschließend subtrahiert:

$$x = a: \int f(x)\,dx_{|x=a} = F(a) + C, \qquad x = b: \int f(x)\,dx_{|x=b} = F(b) + C$$
$$\Rightarrow$$
$$\int f(x)\,dx_{|x=b} - \int f(x)\,dx_{|x=a} = F(b) - F(a).$$

Man erklärt auf diese Weise einen eindeutigen Zahlenwert, wobei für die links stehende Integraldifferenz abkürzend

$$\int f(x)\,dx_{|x=b} - \int f(x)\,dx_{|x=a} = \int_a^b f(x)\,dx$$

und für die rechts stehende Funktionsdifferenz

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

geschrieben wird.

Erklärung 2.55. Der eindeutige Ausdruck

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

wird das *bestimmte Integral* der stetigen Funktion $f(x),\ x \in \mathcal{I} \equiv [a,b]$, genannt; a heißt die *untere*, b die *obere* Integrationsgrenze.

Beispiel 2.56.

$$\int_1^2 (3x^2+1)\,dx = [x^3+x]_1^2 = 8.$$

Beispiel 2.57.

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi} = 0.$$

Beispiel 2.58.

$$\int_{-1}^{1} e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-2x}\right]_{-1}^{1} = \sinh 2.$$

Beispiel 2.59.

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \left[\sqrt{x}\right]_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}), \quad a \in \mathbb{R}^+, \ b \in \mathbb{R}^+.$$

Beispiel 2.60.

$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{2x+7} = \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} \frac{d(2x+7)}{2x+7} = \frac{1}{2} \left[\ln(2x+7)\right]_{-3}^{-1} = \ln \sqrt{5}.$$

Beispiel 2.61. Das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ kann auf diese Weise **nicht** behandelt werden, da der Integrand $f(x) = \frac{1}{x^2}$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ nicht durchweg stetig ist. (Bei $x = 0$ liegt eine Unendlichkeitsstelle!)

2.3.1. *Sätze über die Integrationsgrenzen.* Für die Grenzen des bestimmten Integrals gelten einige wichtige Sätze, die im folgenden erläutert werden.

Satz 2.62. *Vertauscht man die Integrationsgrenzen, so ändert der Integralwert sein Vorzeichen:*

$$\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx.$$

Beweis: Ist $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$, so ergibt sich

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = -\left[F(a) - F(b)\right] = -\int_b^a f(x) \, dx.$$

□

Die Gleichung $\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^a f(x) \, dx = 0$ kann wie folgt verstanden werden: Integriert man zuerst von a nach b und anschließend von b nach a, also auf der x-Achse die Strecke (a, b) einmal hin und zurück, so ist für diesen geschlossenen Integrationsweg der Wert des Integrals gleich Null.

Satz 2.63. *Man kann den Integrationsweg in beliebig endlich viele Teilwege (aus dem Definitionsbereich des Integranden) aufspalten und über jeden Teilweg einzeln integrieren, ohne daß sich dadurch der Wert des Integrals ändert:*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Beweis: Gilt für die linke Seite $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, so folgt für die rechte Seite

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a),$$

womit die Übereinstimmung bereits gezeigt ist. $\square$

Überdies darf c auch außerhalb der Strecke (a, b) liegen. Setzt man $c = a$, so folgt hiraus speziell

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^a f(x)\,dx \equiv 0.$$

Satz 2.64. *Wird bei einem bestimmten Integral die Veränderliche x auf Grund der Substitution*

$$x = \varphi(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \Phi(x)$$

auf die Veränderliche t transformiert, so gilt

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{t=\Phi(a)}^{t=\Phi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis: Die Funktion $x = \varphi(t)$ stellt zusammen mit $t = \Phi(x)$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von x- und t-Werten dar, d.h. $\Phi = \varphi^{-1}$ ist die Umkehrfunktion zu φ. Zu $x = a$ und $x = b$ gehören deshalb eindeutig bestimmte t-Werte, die sich aus $t = \Phi(x)$ mittels $x = a \Leftrightarrow t = \Phi(a), \quad x = b \Leftrightarrow t = \Phi(b)$ berechnen lassen.

Auf diese Weise werden also die zunächst auf x bezogenen Integrationsgrenzen ebenfalls auf t transformiert, und die Resubstitution auf x entfällt. $\square$

Aufgabe 2.65. Rechnen Sie aus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx, \quad \int_0^3 \frac{dx}{4x^2+9}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{4x^2-9}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Aufgabe 2.66. Ermitteln Sie:

$$\int_0^2 f(x)\,dx,\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1], \\ \sqrt{x}, & x \in [1,2]; \end{cases} \quad \int_0^2 |1-x|\,dx; \quad \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx.$$

2.3.2. *Das Flächenproblem.* Ist $F(x)$ die Stammfunktion der in einem Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ stetigen Funktion $f(x)$, so läßt sich die Beziehung

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

auch durch die Formel

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \quad a \in \mathcal{I}$$

zum Ausdruck bringen.

Das klassische geometrische Problem, welches zum Begriff des bestimmten Integrals führte, ist das sogensnnte *Flächenproblem.* Darunter versteht man die Aufgabe, den Inhalt einer beliebig begrenzten Fläche zu bestimmen. Für **geradlinig begrenzte** Flächen war dies bereits den alten Griechen gelungen, indem sie eine Zerlegung in Dreieckflächen vornahmen (die sogenannte *Triangulierung* der Polygone).

Bei **krummlinig begrenzten** Flächenstücken kommt man indies ohne den Begriff des Grenzwertes nicht aus.

Wir betrachten zunächst solche Flächen, die von einem Kurvenstück, zwei zur x-Achse senkrechten Geraden und der x-Achse selbst begrenzt werden.

Satz 2.67. Hauptsatz der Integralrechnung. *Ist $y = f(x)$ eine in $a \leq x \leq b$ stetige Funktion, die in diesem Intervall nicht negativ wird, so wird der von der Bildkurve, den Ordinaten $f(a) > 0$ und $f(b) > 0$ sowie der x-Achse eingeschlossene Flächeninhalt $\mathfrak{I}$ durch das bestimmte Integral $\mathfrak{I} = \int_a^b f(x)\,dx$ angegeben.*

Beweis. Wir nehmen an, daß $y = f(x)$ in $a \leq x \leq b$ monoton steigend ist. Zunächst betrachten wir die zwischen den senkrechten Geraden $x = a$ und $x = x$ liegende Fläche. Denkt man sich a fest und x variabel, so ist der Inhalt offenbar eine Funktion von x und kann mit $\mathfrak{I}(x)$ bezeichnet werden (sog. *Inhaltsfunktion*). Für $x = a$ ist dann $\mathfrak{I}(x) = \mathfrak{I}(a) = 0$, für $x = b$ wird $\mathfrak{I}(x)$ gleich der gesuchten Fläche $\mathfrak{I}(b) = \mathfrak{I}$.

Wir wollen den analytischen Zusammenhang zwischen der **Kurvenfunktion** $f(x)$ und der **Inhaltsfunktion** $\mathfrak{I}(x)$ herstellen.

Entnehmen wir aus der Abbildung die Ungleichung

$$hf(x) < \mathfrak{I}(x+h) - \mathfrak{I}(x) < hf(x+h), \quad h > 0, \quad a < x + h \leq b.$$

Anschaulich besagt diese, daß der zwischen x und $x + h$ liegende Flächenstreifen zwischen dem einbeschriebenen Rechteck der Höhe $f(x)$ und dem umbeschriebenen Rechteck der Höhe $f(x + h)$ liegt. Dividiert man die Ungleichung auf allen Seiten durch das Inkrement h, so wird

$$f(x) < \frac{\mathfrak{I}(x+h) - \mathfrak{I}(x)}{h} < f(x+h).$$

In der Mitte steht der Differenzquotient der Inhaltsfunktion $\mathfrak{I}(x)$. Läßt man h gegen Null streben, so gilt auf Grund der Stetigkeit von $f(x)$

$$\lim_{h\to 0} f(x) = f(x), \quad \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

und mit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathfrak{I}(x+h) - \mathfrak{I}(x)}{h} = \mathfrak{I}'(x)$$

also

$$\mathfrak{I}'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{I}(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Die Integrationskonstante C ist in diesem Fall jedoch eindeutig bestimmbar, denn es handelt sich um eine konkrete Fläche:

$$x = a: \ \mathfrak{I}(a) = 0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a).$$

$$x = b: \ \mathfrak{I}(b) = \mathfrak{I} = F(b) + C = F(b) - F(a),$$

d.h. es ist

$$\mathfrak{I} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

2.3.3. *Bemerkungen und Ergänzungen.*

(1) Der Beweis kann auf beliebige, in $a \leq x \leq b$ stetige Funktion erweitert werden, sofern $f(x)$ dort keine reellen Nullstellen hat.

(2) Nimmt man $a < b$ an, so ergibt sich der Flächeninhalt $\mathfrak{I}$ **positiv**, wenn die Bildkurve in $a \leq x \leq b$ ganz über die x-Achse liegt und **negativ**, wenn die Bildkurve in $a \leq x \leq b$ ganz unter der x-Achse liegt. Im letzteren Fall ist der absolute Flächeninhalt

$$\mathfrak{I}_{abs} = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|.$$

(3) Liegt die Bildkurve der Funktion $y = f(x)$ im Innern des Integrationswegs teils über und teils unter der x-Achse, und will man die Summe der Flächen zwischen Kurve und x-Achse haben, so hat man zunächst sämtliche in $a < x < b$ gelegenen reellen Nullstellen von $f(x)$ zu bestimmen und dann über jede zwischen diesen liegende Teilfläche einzeln zu integrieren; z.B. ist $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ und $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$, so ist

$$\mathfrak{I} = \left| \int_a^{x_1} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{x_3}^{b} f(x)\, dx \right|.$$

(4) Wird eine zwischen $x = a$ und $x = b$ gelegene Fläche von den Bildkurven der Funktionen $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ begrenzt, so gilt für deren Inhalt

$$\mathfrak{I} = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx$$

unabhängig davon, ob die zwei Kurven teilweise oder ganz über oder unter der x-Achse liegen. Die Kurven dürfen sich jedoch in $a < x < b$ nicht schneiden.

Wird eine gesuchte Fläche **nur** von zwei Kurvenbögen begrenzt, so sind die Schnittpunktsabszissen $\overline{x}_1$ und $\overline{x}_2$ zu ermitteln und als Integrationsgrenzen zu nehmen

$$\mathfrak{I} = \int_{\overline{x}_1}^{\overline{x}_2} (f_1(x) - f_2(x))\, dx.$$

(5) Ist die Kurvenfunktion in einer **Parameterdarstellung** $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \mathcal{I}$ gegeben, so ist zunächst $f(x)\, dx = y(t)\dot{x}(t)\, dt$, wobei $\dot{x}(t) := \dfrac{dx}{dt}$ ist, und für die Integrationsgrenzen a und b sind jetzt diejenigen Werte t_1 bzw. t_2 zu setzen, für welche $x(t_1) = a,\ x(t_2) = b$ gilt. Demnach lautet die Formel

$$\mathfrak{I} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\dot{x}(t)\, dt.$$

(6) Liegt die Kurvenfunktion in **Polarkoordinaten** $r = r(\varphi)$ explizit vor, so kann die Sektorfläche $\widehat{OP_1P_2}$ mit Hilfe des Integrals

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi$$

bestimmt werden. Für die **Sektorflächenfunktion** $S(\varphi)$ gilt nämlich die Ungleichung

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi < S(\varphi+\Delta\varphi) - S(\varphi) < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi,$$

und

$$\frac{1}{2}r^2 < \frac{S(\varphi+\Delta\varphi) - S(\varphi)}{\Delta\varphi} < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2,$$

aus welcher beim Grenzübergang $\Delta\varphi \rightarrow 0$ im Falle der Stetigkeit von $r(\varphi)$ folgt

$$S'(\varphi) = \frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{2}r^2 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi.$$

Rechnet man die Formel mittels

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi; \quad dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi,\ dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

in kartesische Koordinaten um, so ergibt sich

$$y\, dx - x\, dy = -r^2\, d\varphi$$

und mit $r_1\cos\varphi_1 = x_1 = b,\ r_2\cos\varphi_2 = x_2 = a$

$$2S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\, d\varphi = -\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} r^2\, d\varphi = \int_a^b (y\, dx - x\, dy).$$

Ist die Kutve schließlich in einer kartesischen Parameterform gegeben, so wird $y\, dx = u\dot{x}\, dt,\ x\, dy = x\dot{y}\, dt$ und damit gilt die *Leibnizsche Sektorformel*

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b (y\, dx - x\, dy) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt.$$

Hier wurde $x_1 = x(t_1) = b,\ x_2 = x(t_2) = a$ gesetzt.

Beispiele

(1) Das von der Normalparabel und der x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = a > 0$ eingeschlossene Flächenstück $\mathcal{A}$ ergibt sich zu

$$\mathcal{A} = \int_0^a y\, dx = \int_0^a x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}.$$

Andererseits hat das Rechteck $OPQR$ mit $O(0,0)$, $P(a,0)$, $Q(a,a^2)$, $R(0,a^2)$ den Inhalt $a.a^2 = a^3$. Also wird das Rechteck von der Parabel im Verhältnis $1 : 2$ geteilt. (Ein Ergebnis zu dem Archimedes in seiner Arbeit *Die Quadratur der Parabel* gelangte.)

(2) Welche Fläche schließt die Kosinuslinie zwischen $x = 0$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ mit der x-Achse? Auf Grund der Symmetrie ist die gesuchte Fläche

$$\mathcal{A} = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 3\,[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3.$$

(3) Welche Fläche wird von der Wurzelfunktion $y = \sqrt[3]{10(x+2)} - 2$ zwischen $x = -2$ und $x = 3$ mit der x-Achse eingeschlossen?

Man bestimme zuerst die Nullstelle der Funktion, nämlich

$$\sqrt[3]{10(x+2)} - 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} = -1,2.$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Fläche

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left|\int_{-2}^{-1,2} (\sqrt[3]{10(x+2)} - 2)\,dx\right| + \int_{-1,2}^{3} (\sqrt[3]{10(x+2)} - 2)\,dx \\ &= \left|\frac{3}{40}(10x+20)^{\frac{4}{3}} - 2x\right|_{-2}^{-1,2} + \left[\frac{3}{40}(10x+20)^{\frac{4}{3}} - 2x\right]_{-1,2}^{3} \\ &= 4,615.\end{aligned}$$

(4) Gesucht ist der *Flächeninhalt der Ellipse* mit den Halbachsen a und b.

Wir benutzen die Parameterdarstellung $x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$ und bekommen auf Grund der Symmetrie der Ellipse

$$\frac{1}{4}\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{ab}{2}\left[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{4}\pi \Rightarrow \mathcal{A} = ab\pi.$$

(5) Den *Flächeninhalt des Kreises vom Radius* R kann man durch Spezialisierung des Ellipseninhaltes mit $a = b = R$ erhalten: $\mathcal{A} = R^2\pi$.

Unabhängig von der Ellipse kommt man am schnellsten zu diesem Ergebnis, wenn man den Kreis um O mit Radius R in Polarkoordinaten anschreibt und dann die Sektorflächenformel heranzieht:

$$r := R, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\,d\varphi = \frac{1}{2}R^2\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = R^2\pi.$$

(6) Gesucht ist die Sektorfläche $\widehat{OP_1P_2}$ mit $P_1(x_0,\tau),\ P_2(x_0,-\tau),\ \tau = \sqrt{x_0^2 - 1}$ für die gleichseitige Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$.

Wir setzen die Hyperbelgleichung in der Parameterdarstellung an $x = \cosh t,\ y = \sinh t$ (rechter Ast) und integrieren mit der Sektorformel zwischen $t_1 = 0$ (der rechte Scheitel) und $t_2 = \tau$ (Punkt P_2). Auf Grund der Symmetrie bezüglich der x-Achse gilt dann mit $x' = \sinh t,\ y' = \cosh t$

$$S = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\tau} (\cosh^2 t - \sinh^2 t)\,dt = \int_0^{\tau} dt = [t]_0^{\tau} = \tau.$$

Andererseits folgt aus $\cosh\tau = x_0$, daß $\tau = S = \operatorname{Arcosh} x_0 = \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1})$, d.h. die gesuchte Hyperbelsektorfläche wird durch die Areafunktion (Flächenfunktion) $y = \operatorname{Arcosh} x$ gemessen.

Bemerkung 2.68. Die Gleichungen $x_0 = \cosh S,\ y_0 = \sinh S$ lehren, daß sich diese Hyperbelfunktionen als Maßzahlen von Strecken an der gleichseitigen Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ darstellen lassen, falls als Argument die Maßzahl der zugehörigen Hyperbelfläche S verstanden wird.

(7) Man berechne die Fläche, welche von der Parabel $y = -x^2 + 2$ und der Kosinuslinie $y = \cos x$ eingeschlossen wird.

Es sind zunächst die Abszissen der Schnittpunkte zu ermitteln; zeichnerisch ergeben sich diese zu $x_1 = -1,33,\ x_2 = 1,33$. Aus Symmetriegründen können wir ansetzen

$$\mathcal{A} = 2\int_0^{1,33} (-x^2 + 2 - \cos x)\,dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + 2x - \sin x\right]_0^{1,33} = 1,81.$$

Aufgabe 2.69. (1) Welchen Flächeninhalt schließen die Kurven mit den Gleichungen

(a) $r = a^2\cos(2\varphi),\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (die Lemniskate);

(b) $x^3 - 16x - 8y = 0,\ x \in [-1, 5]$;

(c) $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t,\ a, b \in \mathbb{R}^+$ (die Astroide) mit der x-Achse ein?

(2) Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graph des natürlichen Logarithmus $y = \ln x$, den waagerechten Geraden TQ und SR und der y-Achse, wenn $T(0, \ln 2),\ Q(4, \ln 2),\ S(0, 2\ln 2),\ R(4, 2\ln 2)$ gilt.

2.4. **Uneigentliche Integrale.** Die Definition des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

wurde auf zwei Voraussetzungen basiert

(1) Integrationsintervall beschränkt, d.h. $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$;

(2) Integrand $f(x)$ stetig in $[a, b]$.

Im folgenden werden wir sehen, daß man eine der Voraussetzungen (1) oder (2) teilweise oder ganz fallen lassen kann, ohne dabei notwendig auf die Existenz des Integrals verzichten zu müßen. Allerdings muß in jedem Einzelfall eine Grenzwertuntersuchung stattfinden.

I^{ter} **Fall**: *Unbeschränktes Integrationsintervall*

Erklärung 2.70. (1) Ist $f(x)$ stetig in $[a, \infty)$, so bedeute

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Integral heißt *uneigentlich* an der oberen Grenze.

(2) Ist $f(x)$ stetig in $(-\infty, b]$, so bedeute

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Das Integral heißt *uneigentlich* an der unteren Grenze.

(3) Ist $f(x)$ stetig in $(-\infty, \infty) \equiv \mathbb{R}$, so bedeute

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Das Integral heißt *uneigentlich* an der unteren und oberen Grenze.

(4) Existiert jeweils der Grenzwert, so sagt man, das uneigentliche Integral *konvergiert*, andernfalls, es *divergiert*.

Notwendig für die Konvergenz dieser Integrale ist die Asymptoteneigenschaft der x-Achse.

Beispiel 2.71.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\left|-\frac{1}{2x^2}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 2.72.

$$\int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\int_4^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_4^b = \lim_{b\to\infty}[2\sqrt{b}-4] = \infty.$$

Das Integral ist divergent.

Beispiel 2.73.

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(1-e^a) = 1.$$

Beispiel 2.74.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan 0) = \pi.$$

Beispiel 2.75.

$$\int_{-\infty}^\infty 2\,xe^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-e^{-x^2}\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x^2}\right]_0^b = -1+1=0.$$

II^{ter} **Fall**: *Unendlichkeitsstelle des Integranden*

Wir gehen von einem beschränkten Integrationsintervall $[a,b]$ aus. Der Integrand sei stetig für alle $x\in[a,b]$, ausgenommen an der Stelle $c\in[a,b]$, die eine Unendlichkeitsstelle von $f(x)$ sein soll, d.h. $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$. Für die zu berechnende Fläche über $[a,b]$ und unter dem Graphen von $f(x)$ bedeutet es, $x=c$ ist eine senkrechte Asymptote des Graphen, die Fläche erstreckt sich bei Annäherung $x\to c$ ins Unendliche. Damit ist $f(x)$ für $x=c$ unstetig, denn $f(c)$ existiert nicht.

Erklärung 2.76. Ist $c\in[a,b]$ Unendlichkeitsstelle der für alle $x\in[a,b]\setminus\{c\}$ stetigen Funktion $f(x)$, so heißen folgende Integrale *uneigentlich*:

(1) $c=a:$ $\quad\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$

(2) $c=b:$ $\quad\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx.$

$$(3)\ a<c<b: \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx.$$

Auch hier spricht man von *Konvergenz* bzw. *Divergenz*, je nachdem das uneigentliche Integral existiert bzw. nicht existiert.

Beispiel 2.77.

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{2+\varepsilon}^4 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[2\sqrt{x-2}]_{2+\varepsilon}^4 = 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\sqrt{2}-\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{2}.$$

Beispiel 2.78.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{-1}^{\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}(\sqrt[3]{-\varepsilon_1}-\sqrt[3]{-1}) + 3\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\varepsilon_2}) = 6.$$

Beispiel 2.79.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cot x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon}\cot x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln|\sin x|]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln(\sin\varepsilon)) = -\infty.$$

Dieses uneigentliche Integral divergiert. Die betrachtete Fläche hat keinen endlich großen Inhalt.

Aufgabe 2.80. Ermitteln Sie

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}},\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x},\quad \int_0^\infty \cos x\,dx,\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}},$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2},\ a\in\mathbb{R}^+,\quad \int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}},\quad \int_0^\infty e^{-x}\sin(px)\,dx,\ p\in\mathbb{R}^+.$$

Aufgabe 2.81. Rechnen Sie aus

$$\int_0^1 \ln x\,dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\,dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx,\quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-1}\,dx.$$

Aufgabe 2.82. Bestimmen Sie

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx,\quad \int_{-\infty}^\infty \arctan x\,dx,\quad \int_0^\infty x^2\ln x\,dx,$$

$$\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(x^2-4)^3}},\quad \int_{-\infty}^\infty e^{2x+1}\,dx.$$

2.5. **Das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe.** Vorgegeben sei eine in $a \leq x \leq b$ stetige Funktion $y = f(x)$, deren Bildkurve monoton steigt (bzw. monoton fällt). Es wird wieder nach dem Inhalt der von der Kurve, der x-Achse und den Senkrechten $x = a$ und $x = b$ eingeschloßenen Fläche gefragt.

Wir werden die Fläche in eine Anzahl von Flächen bekannten Inhalts zerlegen und diese summieren.

Man nimmt zunächst eine Anzahl von Teilpunkten $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ im Integrationsintervall an, wobei wir der Einfachheit halber gleiche Abstände $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ voraussetzen wollen, und bildet die zugehörigen Ordinaten $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), ..., y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(x_n)$.

Wählt man nun als Teilflächen Rechtecke, so kann man einmal die Summe S_E der **einbeschriebenen** Rechtecke, zum anderen die Summe S_U der **umbeschriebenen** Rechtecke berechnen und auf diese Weise den gesuchten Flächeninhalt $\mathfrak{I}$ zwischen zwei Schranken einschließen.

Es gilt $S_E = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} yi\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x, \quad S_U = \sum_{i=1}^{n} y_i\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$

Jede der Summen S_E und S_U stellt bereits einen Nährungswert für $\mathfrak{I}$ dar. Es kommt darauf an, daß man den Unterschied zwischen der **Obersumme** S_U und der **Untersumme** S_E kleiner als jede (noch so kleine positive) Zahl ε halten kann, wenn man nur die Zahl der Teilflächen genügend groß und damit die Breite der Rechteckstreifen genügend klain wählt. Dies ist für eine in $a \leq x \leq b$ **stetige** Funktion stets möglich. Es folgt daraus

$$\mathfrak{I} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Satz 2.83. *Das bestimmte Integral kann als Grenzwert einer Summe dargestellt werden, für welche die Anzahl der Summanden gegen unendlich, jeder einzelne Summand aber gegen Null strebt.*

Es entsteht die wichtige Frage:

Welche Voraussetzungen sind an die Funktion $f(x)$ zu stellen, damit der obige Grenzwert (und damit das bestimmte Integral) existiert?

Es läßt sich zeigen, daß die Stetigkeit von $f(x)$ in $[a, b]$ wohl eine hinreichende Bedingung, aber nicht notwendig ist. Es genügt etwa, von $f(x)$ die Stetigkeit mit Ausnahme von endlich vielen endlichen Sprungstellen in $[a, b]$ zu fordern. Solche Funktionen heißen *stückweise stetig* in $[a, b]$. Andererseits muß $f(x)$ in $[a, b]$ beschränkt sein, da es sonst eine Stelle $x_i \in [a, b]$ gäbe, für die $f(x_i)$ beliebig groß würde. Das aber hätte gegebenfalls zur Folge, daß die oben eingerahmte Summe nicht existiert.

Wir fassen zusammen (für nicht uneigentliche Integrale):

- Die Beschränktheit von $f(x)$ in $[a, b]$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Integrabilität von f in $[a, b]$;
- Die Stetigkeit von $f(x)$ in $[a, b]$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für die Integrabilität von f in $[a, b]$;
- Jede in $[a, b]$ beschränkte und dort stückweise stetige Funktion $f(x)$ ist in $[a, b]$ auch integrierbar.

Aufgabe 2.84. Es soll das Integral $\int_0^b x^2\,dx,\ b \in \mathbb{R}$ als Grenzwert einer Folge von Obersummen bzw. Untersummen bestimmt werden. Hierbei teile man das Integrationsintervall $[0,b]$ in n äquidistante Streifen der Breite $h = \frac{b}{n}$. Bei der Aufstellung von S_E und S_U verwende man $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

2.5.1. *Bestimmung von Bogenlängen.* Es sei $f(x),\ x \in [a,b]$ eine ableitbare Funktion und ihre Ableitung $f'(x)$ eine stetige Funktion. Wir fragen nach der Länge des Kurvenbogens $\widehat{AB} = s$ vom Graphen der Funktion $f(x)$.

Zerlegt man den Bogen $\widehat{AB}$ in eine Summe von Teilbögen mit gleicher Projektion Δx auf der x-Achse, d.h. $\widehat{AB} = \widehat{P_0P_1} + \widehat{P_1P_2} + ... + \widehat{P_iP_{i+1}} + ... + \widehat{P_{n-1}P_n}$, wobei $P_0 = A,\ P_n = B$, so gilt für die zum Teilbogen $\widehat{P_iP_{i+1}}$ gehörende Teilsehne Δs_i

$$\Delta s_i^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \quad \frac{\Delta s_i}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es in jedem Teilbogen mindestens eine Zwischenstelle $x_i + h\Delta x,\ 0 < h < 1$, an der die Sekantensteigung gleich der Tangentensteigung ist, für die also

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x} = f'(x_i + h\Delta x), \quad \Delta s_i = \sqrt{1 + (f'(x_i + h\Delta x))^2}\,\Delta x$$

gilt. Bildet man die Summe dieser Teilsehnen

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i + h\Delta x))^2}\,\Delta x$$

und geht mit $n \to \infty$ ($\Delta x \to 0$), so wird der Grenzwert (falls er existiert) die gesuchte Bogenlänge darstellen. Nach der Summendarstellung des bestimmten Integrals ist dieser Grenzwert aber gleich $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \Delta s_i = s$, und, wegen $x_0 = a,\ x_n = b$,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Liegt die Kurvengleichung in einer Parameterform $x = x(t),\ y = y(t)$ vor, so ist

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt},\ \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2},$$

und folglich

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt,$$

wenn man $x(t_1) = a$ und $x(t_2) = b$ setzt.

Ist schließlich die Kurvengleichung explizit in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ gegeben, so ist

$$x = r\cos\varphi \;\Rightarrow\; dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi \;\Rightarrow\; dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) + r^2\right] d\varphi^2$$

$$\Rightarrow \quad ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi \quad \Rightarrow$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

Beispiel 2.85. Man berechne den Bogen der Normalparabel $y = x^2$ von $x = 0$ bis $x = 2$.

Lösung. Aus $y = x^2$ folgt $y' = 2x$ und $1 + y'^2 = 1 + 4x^2$. Es ist also

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Die Substitution $2x = \sinh t$, $dx = \frac{1}{2}\cosh t\, dt$ führt zu

$$\int \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1 + \sinh^2 t}\, \cosh t\, dt = \frac{1}{2}\int \cosh^2 t\, dt = \frac{1}{4}(t + \sinh t \cosh t).$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten für die Lösung.

I^{ter} **Weg**: Man beläßt die Grenzen, und muß deshalb resubstituieren (wie bei dem unbestimmten Integral) $t = \operatorname{Arsinh}(2x)$, und erhält

$$s = \frac{1}{4}\left[\ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2}) + 2x\sqrt{1 + 4x^2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{4}\left[\ln(4 + \sqrt{17}) + 4\sqrt{17}\right].$$

II^{ter} **Weg**: Man transformiert die Grenzen auf die neue Integrationsveränderliche; die Resubstitution entfällt dann. Die Transformation der Grenzen führt zu

$$x = 2 \quad\Rightarrow\quad \sinh t = 4 \quad\Rightarrow\quad t = \ln(4 + \sqrt{17}),$$

$$x = 0 \quad\Rightarrow\quad \sinh t = 0 \quad\Rightarrow\quad t = 0,$$

$$s = \frac{1}{4}\,[t + \sinh t \cosh t]_{t=0}^{t=\ln(4+\sqrt{17})} = \frac{1}{4}\left[\ln(4 + \sqrt{17}) + 4\sqrt{17}\right].$$

Beispiel 2.86. Man berechne den Umfang eines Kreises vom Radius R.

Lösung. Der einfachste Weg besteht darin, die Kreisgleichung in Polarkoordinaten anzuschreiben, d.h. $r = R$, $r' = 0$ und

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0}\, d\varphi = R\int_0^{2\pi} d\varphi = R[\varphi]_0^{2\pi} = 2R\pi.$$

Beispiel 2.87. Man berechne den Umfang der gleichseitigen Astroide (Sternkurve) mit der Gleichung $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a = const.$

Lösung. Die Kurve ist symmetrisch bezüglich beider Koordinatenachsen. Wir können deshalb für den Umfang $s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$ ansetzen. Dabei wird

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t \sin t,\; \dot{y} = 3a\sin^2 t\cos t,\; \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t$$

und

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t\,dt = 6a\left[\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

Aufgabe 2.88. (1) Welche Länge hat der Graph der Funktion $y = e^x$ zwischen den Punkten $P_1(-1, e^{-1})$ und $P_2(1, e)$?
Anleitung. Berechnen Sie das entsprechende Kurvenstück der Umkehrfunktion $x = \ln y$ von $y = e^{-1}$ bis $y = e$, d.h.

$$s = \int_{e^{-1}}^{e} \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\,dy.$$

Substituieren Sie $y = \sinh t$.

(2) Es ist die Länge eines Bogens der gespitzten Zykloide

$$x(t) = t - \sin t,\ y(t) = 1 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$$

zu berechnen.

(3) Man berechne die Länge der Archimedischen Spirale $r = 2\varphi$, wenn sich der Polarwinkel, von Null beginnend, um zwei Vollwinkel dreht, d.i. $\varphi \in [0, 4\pi]$.

(4) Welche Länge hat das Graphenstück der Funktion $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ zwischen $x = 1$ und $x = 5$?

(5) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve mit der Gleichung $y = \dfrac{2}{\sinh x}$ im Intervall $[1, 5]$.

2.5.2. *Bestimmung von Rauminhalten und Mantelflächen bei Rotationskörpern.* Eine zwischen $x = a,\ x = b$, der Kutve mit der Gleichung $y = f(x)$ und der x-Achse liegende Fläche möge um die x-Achse rotieren. Dabei entsteht eim Umgrehungs- oder Rotationskörper, dessen Volumen $\mathcal{V}$ und Mantel $\mathcal{M}$ bestimmt werden sollen. Zu diesem Zwecke denken wir uns den Körper in eine Summe von Scheiben oder Schichten zerlegt. Jede Scheibe habe zum Volumen $d\mathcal{V}$ (sog. Volumendifferential), als Mantel $d\mathcal{M}$ (sog. Manteldifferential); ferner sei die Scheibendichte dx und die Mantelbreite ds. Dann kann man in erster Näherung $d\mathcal{V}$ als Zylindervolumen mit dem Grundkreisradius y und der Höhe dx, $d\mathcal{M}$ als Kreisringfläche vom mittleren Radius y mit der Breite ds berechnen:

$$d\mathcal{V} = \pi y^2\,dx, \quad d\mathcal{M} = 2\pi y\,ds, \quad ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{V} = \pi\int_a^b y^2\,dx, \qquad \mathcal{M} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Für eine in Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2]$ gegebenen Kurvengleichung lauten die Formeln

$$\mathcal{V} = \pi\int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2\dot{x}\,dt, \qquad \mathcal{M} = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Beispiel 2.89. Man bestimme Volumen und Mantelfläche einer Kugel vom Radius R.

Lösung. Wir lassen eine Halbkreisfläche vom Radius R um die x-Achse rotieren. Seine Gleichung ist $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; demnach erhält man für das Volumen

$$\mathcal{V} = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

und für die Mantelfläche, mit

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad 1 + y'^2 = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{R^2}{y^2},$$

$$\mathcal{M} = 2\pi \int_{-R}^{R} y \frac{R}{y}\, dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 2\pi R [x]_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

Beispiel 2.90. Die durch die *Kettenlinie* (die *Katenoide*) $y = \cosh x$ bestimmte Fläche rotiere um die x-Achse. Man bestimme Volumen und Mantel des endstehenden Drehekörpers zwischen $x = 0$ und $x = a > 0$. Dieser Körper heißt *Katenoid.*

Lösung. Es ergibt sich für das Volumen

$$\mathcal{V} = \pi \int_{0}^{a} \cosh^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} [x + \cosh x \sinh x]_0^a = \frac{\pi}{2}(a + \cosh a \sinh a)$$

und für die Mantelflëche

$$\mathcal{M} = 2\pi \int_0^a \cosh x \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = 2\pi \int_0^a \cosh^2 x\, dx = 2\mathcal{V}.$$

Beispiel 2.91. Die von der Normalparabel $y = \sqrt{x}$ begrenzte Fläche ergibt bei Rotation um die x-Achse eines *Rotationsparaboloides.* Zu bestimmen ist sein Volumen und sein Mantel zwischen $x = 0$ und $x = a > 0$.

Lösung. Wir erhalten für das Volumen

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^a (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{\pi a^2}{2}$$

und für die Mantelfläche

$$\mathcal{M} = 2\pi \int_0^a \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = 2\pi \int_0^a \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, d\left(x + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}(4a + 1)\sqrt{4a + 1}.$$

Aufgabe 2.92.
(1) Gegeben ist die *Einheitshyperbel* $y = \dfrac{1}{x}$. Der zum Intervall $[1, b]$ gehörige Graph dieser Funktion rotiere um die x-Achse. Er erzeugt dann einen Körper, dessen Mantelfläche Teil eines *Hyperboloids* ist. Berechnen Sie das jeweilige Volumen und die jeweilige Mantelfläche des Körpers. Was können Sie für den Fall $b \to \infty$ sagen?

(2) Die *gleichseitige Astroide* $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ rotiere um die x-Achse. Welche Mantelfläche und welches Volumen hat der dabei entstehende Drehekörper?

(3) Die Bildkurve der Funktion $y = 4e^{-\frac{x}{3}}$ rotiert um die x-Achse. Man berechne Volumen und Mantelfläche der dabei entstehenden *Exponentialsäule* zwischen $x = 0$ und $x = \infty$.

2.5.3. *Integralabschätzungen und Mittelwertsatz der Integralrechnung.* Wenn die stetige Funktion $f(x)$ in einem Intervall $a \leq x \leq b$ überall nicht negativ ist, d.h. überall entweder positiv oder Null ist, so ist auch das bestimmte Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ nicht negativ. Ebenso ist dieses Integral nicht positiv, wenn die Funktion in dem Intervall nirgends positiv ist.

Der Beweis dieser Tatsache ergibt sich ohne weiteres aus der Definition des Integrals.

Hieraus entspringt der folgende

Satz 2.93. *Wenn in dem Intervall $a \leq x \leq b$ überall $f(x) \geq g(x)$ ist, so ist auch*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Das Integral der Differenz $f(x) - g(x)$ ist nach der ersten Bemerkung nicht negativ, und nach der Summenregel ist

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Es sei nun M der größte und m der kleinste Wert der Funktion $f(x)$ in dem Intervall $[a, b]$. Dann ist die Funktion $M - f(x)$ in diesem Intervall nicht negativ, und dasselbe gilt für die Funktion $f(x) - m$. Es ergibt sich also nach den obigen Bemerkungen sofort die doppelte Ungleichung

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx,$$

und da

$$\int_a^b m\,dx = (b-a)m, \qquad \int_a^b M\,dx = (b-a)M$$

ist, so folgt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Das betrachtete Integral läßt sich daher darstellen als das Produkt von $(b-a)$ mit einem Wert μ zwischen m und M, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \quad m \leq \mu \leq M.$$

Die genaue Größe dieses Zwischenwerts μ brauchen wir nicht allgemein anzugeben. Wir können aber aussagen, daß er an einer gewissen Stelle ξ des Intervalls, $a < \xi < b$, von der Funktion $f(x)$ angenommen wird, da *eine stetige Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ alle Werte zwischen ihrem dr̈ößten und ihrem kleinsten Wert annimmt.* Wie beim Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist bei vielen Anwendungen die genaue Angabe des Wertes ξ unwichtig. Wir dürfen also $\mu = f(\xi)$ setzen, wo ξ ein solcher Zwischenwert ist, und können dann schreiben

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi), \quad a < \xi < b.$$

In dieser letzten Formulierung bezeichnen wir unsere *Abschätzungsformel* als **Mittelwertsatz der Integralrechnung**.

Der Mittelwertsatz, bzw. die mit ihm gleichbedeutenden Integralabschätzungen liefern uns sofort eine sehr wichtige Einsicht in eine Tatsache:

Det Wert des Integrals ändert sich nur wenig, wenn die Funktion selbst überall wenig geändert wird.

Wir ziehen zu der Kurve $y = f(x)$ die *Parallelkurven* $y = f(x) + \varepsilon$ und $y = f(x) - \varepsilon$. Es wird hieraus sofort klar, daß

$$\int_a^b (f(x) + \varepsilon)\, dx - \int_a^b (f(x) - \varepsilon)\, dx = 2\varepsilon(b - a).$$

Es sei $g(x)$ eine Funktion, für die $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ im ganzen Intervall $[a, b]$ gilt, d.h. die Funktion $g(x)$ verläuft in dem durch die Parallelkurven $f(x) + \varepsilon$ und $f(x) - \varepsilon$ gebildeten Streifen. Die Flächeninhalte, die von den Kurven $f(x)$ und $g(x)$ begrenzt sind, unterscheiden sich voneinander um weniger als den halben Streifeninhalt

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \right| < \varepsilon(b - a).$$

Zusammengefasst: Bei jedem stetigen Integranden $f(x)$ gibt es im Innern des Integrationsintervalls eine Zwischenstelle ξ, für welche die gesuchte Fläche gleich der Rechteckfläche $(b - a)f(\xi)$ ist.

2.6. **Aufgaben.**

Aufgabe 2.94. Für jedes $t \neq 0$ ist f_t eine ganz-rationale Funktion 3. Grades. Ihr Schaubild K_t ist punktsymmetrisch zum ursprung O, hat dort die Tangente $y = tx$ und schneidet die x-Achse außerdem im Punkt $N_t(3t, 0)$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung von f_t. Untersuche K_t auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K_2 im Bereich $-6 \leq x \leq 6$ und $K_{1/2}$ im Bereich $-3 \leq x \leq 3$.

(b) Es sei nun $t > 0$. Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Hochpunkt von K_t begrenzen zusammen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck. Das Schaubild K_t zerlegt das Rechteck in zwei Teilflächen mit den Inhalten $A_1(t)$ und $A_2(t)$. Zeigen Sie, daß das Verhältnis $A_1(t) : A_2(t)$ von t unabhängig ist.

(c) Zu jedem Wert $t > 0$ gibt es einen Wert $t^* < 0$, so daß sich die zugehörigen Schaubilder K_t und K_{t^*} im Ursprung rechtwinklig schneiden, d.h. ihre Tangenten im Ursprung sind senkrecht zieinander. Zeigen Sie, daß dann gilt: $t\, t^* = -1$.
Die Schaubilder K_t und K_{t^*} schneiden sich außer im Ursprung in zwei weiteren Punkten. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

(d) Die Schaubilder K_t und K_{t^*} aus Teilaufgabe (c) schließen für $x \geq 0$ eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von t für $t > 0$.
Für welchen Wert von t wird dieser Inhalt ein Minimum?

Aufgabe 2.95. Der Graph einer ganz-rationalen Funktion 3. Grades besitzt im Punkt $P(1, 0)$ einen Wendepunkt. Die Tangente im Wendepunkt P hat die Steigung $m = -4$. Das bestimmte Integral der Funktion über dem Intervall $[1, 3]$ hat den Wert -4.

(a) Stellen Sie die Funktionsgleichung auf und zeigen Sie damit, daß die Funktion zur Funktionsschar

$$f_t : \; x \;\mapsto\; x^3 - t\,x^2 - x + t \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

gehört.

(b) Alle Funktionen dieser Schar haben bei $x_0 = 1$ eine Nullstelle. Bestimmen Sie die restlichen Nullstellen.

(c) Skizzieren Sie ohne weitere Kurvendiskussion die Graphen der Funktionen f_{-2}, f_0, f_1, f_3 über dem Intervall $[-2, 3]$ soweit wie möglich.

(d) Beschreiben Sie, wie die Funktionsgraphen sich verändern und welche Gemeinsamkeiten sie aufweisen, wenn t die Menge der reellen Zahlen durchläuft (Verlauf, Nullstellen, Extrema, Wendestellen).

(e) Für welchen Wert von t nimmt das bestimmte Integral

$$\mathcal{J}(t) = \int_0^t f_t(x)\,dx$$

seinen größten Wert an?

Aufgabe 2.96. Der Graph der Funktion $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ hat im Ursprung die Steigung $6a$ und bei $x = \frac{5}{3}$ eine Wendestelle. Der Graph der Funktion schließt mit der x-Achse eine Fläche mit $\frac{37}{12}$ FE ein. Bestimme den Funktionsterm.

Aufgabe 2.97. Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = 20\,t\,e^{-\frac{1}{50}\,t^2}.$$

(a) Untersuchen Sie $f(t)$ auf Extrema, Wendepunkte und Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge. Fertigen Sie anhand der Ergebnisse eine Skizze für den Ablauf von $f(t)$ an.

(b) Bei der Förderung von Erdöl hängt die Förderleistung von der Aktivität einer Fördersonde ab, die im Zeitverlauf immer geringer wird, bis schließlich die Sonde ersetzt werden muß. Ist t die Laufzeit der Sonde demessen in Jahren, so wird die Fördermenge zum Zeitpunkt t durch die Funktion der Förderleistung $f(t) = 20\,t\,e^{-\frac{1}{50}\,t^2}$, $\quad t \in [0, \infty)$ beschrieben.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_{max}, zu dem die Förderleistung der Sonde maximal ist. Wie groß ist dann die Fördermenge?

(c) Bestimmen Sie $\int f(t)\,dt$.

(d) Zeigen Sie: $\lim\limits_{u\to\infty} \displaystyle\int_0^u f(t)\,dt = 500\ ME$. Was bedeutet dieses Ergebnis?

(e) Bestimmen Sie die durchschnittliche Fördermenge pro Tag für die ersten 9 Jahre nach der Einsetzung einer neuen Sonde.

(f) Untersuchen Sie anhand der bisherigen Ergebnisse, wie sich die Leistungsgeschwindigkeit im Laufe der Zeit verändert. Begründen Sie dann, warum eine Sonde normalerweise nach ca. 9 Jahren ersetzt wird.

Aufgabe 2.98. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \dfrac{3\,t}{t + e^x}$, $\quad x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_t.

(a) Untersuchen Sie K_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie auf Asymptoten.

Geben Sie die Ortslinie der Wendepunkte aller Kurven K_t an.
Zeichnen Sie K_1 und K_4 für $-2 \leq x \leq 3$ in ein gemeinsames Achsenkreuz ein.

(b) Zeigen Sie: K_4 verläuft ganz oberhalb von K_1.
K_1 und K_4 schneiden aus jeder Geraden $x = u$ mit $u \in \mathbb{R}$ eine Strecke der Länge d aus. Bestimmen Sie u so, daß d möglichst Groß wird.

(c) Für $a > 0$ umschließt die Kurve K_t mit den Geraden $x = a,\ x = -a$ und $y = 3$ eine Fläche mit dem Inhalt $A_t(a)$. Bestimmen Sie $A_t(a)$.
Untersuchen Sie unter Verwendung des obigen Ergebnisses, ob die zwischen K_1 und K_4 liegende Fläche einen endlichen Inhalt hat.

(d) Zeigen Sie, daß die Funktion f_t umkehrbar ist. Bestimmen Sie Definitionsmenge, Wertemenge und Funktionsgleichung der Umkehrfunktion f_t^{-1}.
Begründen Sie, daß für jedes $t > 0$ die Schaubilder von f_t und f_t^{-1} genau einen gemeinsamen Punkt P_t besitzen. Für welchen Wert von t ist P_t der Wendepunkt von K_t?

Aufgabe 2.99. Gegeben ist die ganzrationale Funktion dritten Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. $f(x)$ hat im Ursprung einen Wendepunkt und an der Stelle $x = \sqrt{12}$ eine waagerechte Tangente.

Welche Steigung muß die Wendetangente erhalten, damit der Graph mit der x-Achse im ersten Quadranten eine Fläche von 12 Flächeneinheiten einschliesst?

Aufgabe 2.100. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ im jeweils größten Definitionsbereich $\mathcal{D}_f$. Der zu f gehörende Graph wird mit G bezeichnet.

(a) Geben Sie $\mathcal{D}_f$ an und untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ im Unendlichen und an der Stelle $x = 0$.

(b) Untersuchen Sie die Funktion auf Achsenschnitt-, Hoch-, Tief- und Wendepunkte und geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.

(c) Geben Sie den Wertebereich der Funktion an.

(d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

(e) Der Graph G, die x-Achse und die Gerade $g:\ x = e$ begrenzen eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt $\mathcal{A}$ dieser Fläche.

(f) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, die diese Fläche halbiert und den Punkt $Q(e, \frac{1}{e})$ enthält.

Aufgabe 2.101. (a) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion $F(x)$ von

$$f(x) = 2\frac{\ln x}{x},$$

für die $F(1) = -2$ gilt.

(b) Der Graph von $g(x) = (\ln x)^2$, $0 < x \leq 1$, die y-Achse, die x-Achse und die Gerade $x = 1$ begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie ihren Inhalt.

Aufgabe 2.102. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x\,e^{2-x},\ x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K.

Bestimme eine Stammfunktion von f.

Die Kurve K, die x-Achse und die Gerade $x = 2$ schließen eine Fläche ein. Berechne ihren Inhalt.

Aufgabe 2.103. Das Schaubild der Funktion $f(x) = -4 + \dfrac{9e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$ und das Schaubild der Ableitungsfunktion $f'(x)$ schließen mit der y-Achse eine Fläche ein. Bestimmen Sie ihren Inhalt.

Aufgabe 2.104. Die Winkelhalbierende des ersten Quadranten und das Schaubild der Funktion $f(x) = x(\ln x)^2$, $x > 0$ schließen eine Fläche ein, die unterhalb dieser Winkelhalbierenden liegt. Berechnen Sie ihren Inhalt.

Aufgabe 2.105. Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int xe^{1-tx}\,dx,\ t = konst.$

Der Graph G des Integranden für $t = 0,5$, die x-Achse und die Gerade $x = b$, $b > 0$ begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A(b)$.

Geben Sie den Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} A(b)$ an.

Aufgabe 2.106. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktionen

$$f_a(x) = -x\ln(ax^2), \quad a = konst \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D}_{f_a}.$$

Ermitteln Sie die Fläche, die durch den Graphen von f_a und die Geraden $x = 1$ und $x = e$ begrenzt wird.

Aufgabe 2.107. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktionsschar

$$f_k(x) = k\,x\,e^x \text{ mit } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(1) (a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f_k.
  (b) Untersuchen Sie (mit einer geeigneten Falluntersuchung bezüglich k) das Verhalten von $f_k(x)$ an den Grenzen des Definitionsbereiches.
  (c) Berechnen Sie, soweit vorhanden, Extrem- und Wendepunkte der den Funktionen f_k zugeordneten Graphen. Falluntersuchung bezüglich k.
  (d) Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Graphen der Funktionen f_e sowie f_{-e}.

(2) Zusätzlich ist die Funktion $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Ihr Graph heißt G_g.
  (a) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen G_g mit dem Graphen $G_{f_{-e}}$ der Finktion f_{-e}.
  (b) Die Graphen G_g und $G_{f_{-e}}$ schließen mit der Geraden $x = -a$, $a \geq 1$ Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Flächenmaßzahlen dieser Figuren.
  Zeigen Sie, daß die Flächenmaßzahl für wachsendes a nach oben beschränkt ist.
  (c) In den Flächenstücke der Teilaufgabe 2(b) werden Sehnen eingezeichnet, die parallel zur y-Achse verlaufen. Berechnen Sie die Längenmaßzahl der längsten Sehne.

(3) Gegeben ist schließlich die in $\mathbb{R}$ definierte Funktionsschar $h_b(x) = e^x + b$ mit $b \in \mathbb{R}$.
  Bestimmen Sie b so, daß der zugehörige Graph G_{h_b} den Graph der Funktion f_{-e} berührt.

Aufgabe 2.108. Gegeben ist die Funktionsschar

$$f_a(x) = \frac{2}{a}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+$$

mit maximalem Definitionsbereich $\mathcal{D}_a$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathcal{D}_a$ und den Wertebereich $\mathcal{W}_a$.
(b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f_a mit den Koordinatenachsen.
(c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_a.
(d) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x)$.
(e) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_4.
(f) Für jeden Wert von a schließt der Graph von f_a mit den Koordinatenachsen ein endliches Flächenstück ein. Zeigen Sie, daß der Inhalt dieser Fläche von a unabhängig ist.
(g) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch einen Punkt $Q(u, v)$ des zur Funktion f_4 gehörenden Graphen begrenzen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck. Bei welcher Lage des punktes Q ist der Flächeninhalt des Rechtecks am größten?
(h) Stellen Sie die Gleichung der Kurventangenten im Punkt $P(9, 0)$ des zur Funktion f_9 gehörenden Graphen auf.
Zeigen Sie, daß diese Tangente die Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ berührt. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes an.

Aufgabe 2.109. Zu jedem $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a\,x - \ln x$, $x > 0$. Ihr Schaubild sei K_a.

(a) Untersuchen Sie K_a auf Asymptoten, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K_1 für $0 < x \leq 6$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ortslinie aller Extrempunkte.
Für welchen Wert von a liegt der Extrempunkt auf der x-Achse?
(b) Für $a = \frac{1}{e}$ schließen das Schaubild K_a, die x-Achse und die Gerade $x = u$ mit $0 < u < e$ eine Fläche mit dem Inhalt $A(u)$ ein. Bestimmen Sie $\lim\limits_{u\to 0} A(u)$.
(c) Von $M(0, 1)$ aus wird an jede Kurve K_a die Tangente gelegen. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes B_a dieser Tangente.
Geben Sie die Ortslinie aller Berührpunkte B_a an.
Die Gerade $x = z$ mit $z > 0$ schneidet die Kurve K_a im Punkt $P(z, f_a(z))$. In P wird die Tangente t_a an die Kurve K_a gelegt. Zeigen Sie, daß für alle $a > 0$ diese Tangenten t_a durch einen gemeinsamen Punkt Q_z gehen. Geben Sie die Koordinaten von Q_z an. Für welches z ist Q_z der Punkt $M(0, 1)$?
(d) Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte von K_a mit der x-Achse in Abhängigkeit von a.
(e) Bestimmen Sie den Teil der Halbebene $x > 0$, in dem kein Punkt einer Kurve K_a (für alle $a > 0$) liegt.

Aufgabe 2.110. Gegeben sind die Funktionen

$$g(x) = e^{2x} - 4\,x,\ x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = e^{2x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ihre Graphen heißen G_g bzw. G_f.

(a) In welchem Punkt berührt die Gerade t mit der Gleichung $y = 4\,x + a$, $a \in \mathbb{R}$ den Graph der Funktion f? Ermitteln Sie a.

(b) Beweisen Sie, daß die Funktion g genau ein relatives Minimum besitzt, das zugleich absolutes Minimum ist.

Welchen Wertebereich hat g?

(c) Die Graphen G_g und G_f schließen mit der Kurventangente im Punkt $P(\frac{1}{2}\ln 2, ?)$ des Graphen G_g ein Flächenstück ein. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl dieser Figur.

Aufgabe 2.111. Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion der Funktionenschar

$$f_a(x) = \frac{1 - a\,e^x}{1 + a\,e^x}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

deren Graph durch den Punkt $A(1, 0)$ geht.

Aufgabe 2.112. Gegeben sind Funktionen f_k und g_k durch die Gleichungen

$$y = f_k(x) = x^2\,e^{1-kx}, \quad y = g_k(x) = x\,e^{1-kx},\ k \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie für die Funktionen f_k die Nullstellen an. Weisen Sie nach, daß für die zweite Ableitung der Funktionen f_k gilt:

$$f_k''(x) = e^{1-kx}(k^2x^2 - 4kx + 2), \quad k \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Funktionen f_k und untersuchen Sie die Art der Extrema.

Zeigen Sie, daß eine Funktion existiert, auf deren Graph alle lokalen Extrempunkte der Graphen der Funktionen f_k liegen.

(b) Für jedes k besitzt der Graph der Funktion f_k genau zwei Wendepunkte. Berechnen Sie die Wendestellen.

(c) Für jedes k haben die Graphen der Funktionen f_k und g_k genau zwei gemeinsame Punkte. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Geben Sie den Wert k an, für den sich die zugehörigen Graphen im Punkt $Q(1, 1)$ schneiden.

(d) Für jedes k existiert die Tangente an den Graphen der Funktion f_k an der Stelle $x = 1$. Ermitteln Sie den Wert k, für den der Anstiegwinkel dieser Tangente $45°$ beträgt und geben Sie für diesen Fall eine Gleichung dieser Tangente an.

(e) Für jedes $u,\ u \in \mathbb{R}^+$ sind der Koordinatenursprung und der Punkt $R_u(u, f_1(u))$ Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R_u so, daß der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks maximal wird. Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

(f) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Stammfunktion G_k der Funktion g_k.

Der Graph der Funktion g_1, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ begrenzen eine Fläche vollständig. Für jedes $a,\ 0 < a < 4$, zerlegt die Gerade mit der Gleichung $x = a$ diese Fläche in zwei Teilflächen. Ermitteln Sie den Wert a, für den beide Teilflächen den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Aufgabe 2.113. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \frac{1}{4}\,(t-1)\,x^4 - \frac{1}{2}\,t\,x^2,\ t \in \mathbb{R}$.

(a) Führen Sie eine Kurvendiskussion von $f_t(x)$ für $t = 9$ durch (Symmetrien, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte).

(b) Zeigen Sie, daß die Funktionen $f_t(x)$ für $0 \leq t \leq 1$ genau eine Nullstelle, für alle anderen t dagegen 3 Nullstellen haben.

(c) Weisen Sie nach, daß alle Graphen der Funktionen $f_t(x)$ genau drei Punkte gemeinsam haben.

(d) Berechnen Sie für allgemeines $t \in \mathbb{R}$ die Fläche A_t, die die Graphen von $f_t(x)$ und $f_{-t}(x)$ für $x \geq 0$ einschließen.

(e) Zeigen Sie, daß der Graph von $f_0(x)$ diese Fläche A_t halbiert.

Aufgabe 2.114. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \sqrt{x+4}$ und $g(x) = \frac{1}{3}x + 3 - \sqrt{x+4}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge.

(a) Untersuchen Sie das Verhalten der Ableitungsfunktion von $g(x)$ für $x \to -4$ und $x \to \infty$.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.

Die Gerade durch die Schnittpunkte der beiden Graphen teilt die Fläche A in zwei Teile. Zeigen Sie, daß beide Teile gleich groß sind.

(c) Weisen Sie nach, daß die Funktion $g(x)$ für $x > -\frac{7}{4}$ eine Umkehrung g^{-1} besitzt. Berechnen Sie $(g^{-1})'(3)$.

(d) Aus den Geraden $k : x = u$ mit $-3 < u < 21$ wird durch die Graphen von f und g jeweils eine Strecke ausgeschnitten. Für welchen Wert u_1 von u wird die Länge dieser Strecke maximal? Geben Sie die maximale Länge an.

In welchem Verhältnis teilt die Gerade $k_1 : x = u_1$ die Fläche A?

Aufgabe 2.115. Der Querschnitt eines rotationssymmetrisches Gefäßes mit der x-Achse als Rotationsachse hat die Form eines Kelches. Seine Mantellinie werde durch

$$f(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

beschrieben.

(a) Man berechne das Volumen des Gefäßes.

(b) Man berechne die Oberfläche des Kelches.

Aufgabe 2.116. Eine Bowle lasse sich beschreiben als Drehkörper der Funktion

$$f(x) = \sqrt{1 + 2\,x}, \quad 1 + 2\,x \geq 0$$

um die x-Achse. Wieviel Liter erquicklichen Kopfschmerzmittels lassen sich darin einfüllen? Berechnen Sie die Oberfläche der Bowle.

3. Potenzreihen

Aufgabe 3.1. Eine Information verbreite sich in einer Stadt von einer Million Einwohnern in folgender Weise: ein erster Bürger gibt die Information innerhalb einer Stunde an fünf andere weiter, von diesen verbreitet die Nachricht jeder wieder an fünf Einwohner, die die Information noch nicht kennen, im Zeitraum einer Stunde und so fort. Wie lange dauert es, bis alle Bürger die Nachricht kennen?

Es sei $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ eine unendliche Zahlenreihe und

$S_1 = f(1), \quad S_2 = f(1)+f(2), \quad S_3 = f(1)+f(2)+f(3), \quad ... \quad S_n = f(1)+f(2)+...+f(n), \quad ...$

seien die Partial- oder auch Teilsummen dieser Reihe. Besitzt die Zahlenfolge $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ der Teilsummen einen Grenzwert S, so ist die Reihe konvergent und S ist ihre Summe. Existiert dieser Grenzwert nicht, so ist die Reihe divergent.

In vielen Fällen läßt sich das Konvergenzverhalten einer unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ mit dem *Cauchyschen Integralkriterium* ermitteln. Es besagt: *Ist f monoton fallend, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{konvergent.}$$

Kontraposition: *Divergiert das uneigentliche Integral, so divergiert auch die Reihe.*

In den folgenden unendlichen Reihen sind die Glieder Funktionsterme von x:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Man nennt solche Reihen auch *Funktionsreihen.*

Erklärung 3.2. Eine unendliche Funktionsreihe der Gestalt

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

heißt eine *Potenzreihe.* Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ seien hierbei reelle Zahlen, x eine stetige Veränderliche.

Jede Teilsumme einer Potenzreihe ist ein Ausdruck der Form

$$S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = P(x),$$

also ein Polynom in x vom Grade der höchsten x-Potenz.

Bei Potenzreihen besteht das Konvergenzproblem nicht mehr in der einfachen Alternative *Konvergenz* **oder** *Divergenz*, sondern in der Frage: *Für welche Werte der Veränderlichen x konvergiert die Reihe*?

Erklärung 3.3. Die Menge $\mathfrak{D}$ aller derjenigen Werte von x, für welche die Potenzreihe konvergiert, heißt ihr *Konvergenzbereich.*

Wir fragen nun nach der Bestimmung des Konvergenzbereiches. Hierzu bedienen wir uns der beiden Varianten des **Quotientenkriteriums**, auch *Kriterium von D'Alembert* (1717-1783) genannt:

$$\left(\lim_{n\to\infty}\right) \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| \begin{cases} < 1 \;\Rightarrow\; \text{Konvergenz von } \sum f_n(x) \\ > 1 \;\Rightarrow\; \text{Divergenz von } \sum f_n(x) \\ = 1 \;\Rightarrow\; \text{keine Aussage} \end{cases}$$

Wir haben für das n-te Glied $f_n(x) = a_n x^n$, für das $(n+1)$-te Glied $f_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1}$ zu setzen, falls wir die Glieder von $n = 0$ an zählen.

Aus der hinreichenden Konvergenzbedingung

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

folgt

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Setzt man für den letzten Grenzwert, sofern er existiert, gleich r, so ergibt sich der

Satz 3.4. *Eine Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konvergiert für alle* $|x| < r$, *divergiert für alle* $|x| > r$, *falls man den Konvergenzradius* r *durch den Grenzwert* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = r$ *ermittelt. An den Stellen* $x = \pm r$ *muß das Konvergenzverhalten auf anderem Wege untersucht werden.*

Der Konvergenzbereich $\mathfrak{D}$ besteht demnach (abgesehen von den Randpunkten) aus einem symmetrisch zum Nullpunkt gelegenen Teil der x-Achse, oder, falls $r \to \infty$ gilt, aus der ganzen x-Achse. $\mathfrak{D}$ kann niemals leer sein; für $x = 0$ konvergiert jede Potenzreihe. Der Fall, in welchem die Reihe für alle x konvergiert, d.h. $\mathfrak{D} \equiv \mathbb{R}$, wird *beständige Konvergenz* genannt.

Beispiel 3.5. Für die Potenzreihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ergibt sich als Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Die Potenzreihe ist beständig konvergent.

Beispiel 3.6. Für die Potenzreihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

wird der Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Die Reihe ist also sicher für $|x| < 1$ konvergent und für $|x| > 1$ divergent.

Wir untersuchen jetzt noch das Konvergenzverhalten der Reihe auf dem Rand des Konvergenzbereiches, d.h. für $x = \pm 1$.

Für $x = +1$ ergibt sich nach Einsetzen in die Potenzreihe

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

also die um 1 vermehrte harmonische Reihe. An der Stelle $x = 1$ ist die Potenzreihe divergent.

Für $x = -1$ ergibt sich die alternierende Reihe

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n} + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

die nach dem Leibnitz-Kriterium konvergent ist.

Der vollständige Konvergenzbereich $\mathfrak{D}$ der vorgelegten Potenzreihe ist demnach $\mathfrak{D} = \{x \mid -1 \leq x < 1\}$; für alle übrigen x divergiert die Reihe.

Aufgabe 3.7. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich folgender Potenzreihen:

1. $$1 + x + \frac{2^2}{3} x^2 + \frac{2^3}{4} x^3 + ... + \frac{2^n}{n+1} x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n.$$
2. $$x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + 4^4 x^4 + ... + n^n x^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$
3. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} x^n.$$
4. $$1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ... + e^{-nx} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}.$$
5. $$1 + x + (1+a)x^2 + (1+a+a^2)x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (1+a+a^2+...+a^n)x^{n+1}$$
   in dem Fall $0 < a < 1$ und im Fall $a > 1$.

3.1. **Potenzreihendarstellung von Funktionen.** Für genau diejenigen Belegungen der Variablen x, welche dem Konvergenzbereich angehören, ist die Potenzreihe konvergent.

Ist x_0 ein spezieller Wert von x aus $\mathfrak{D}$, so ist die zugehörige spezielle, nun aus konstanten Gliedern bestehende, Reihe

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + ... + a_n x_0^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

konvergent und stellt eine bestimmte reelle Zahl y_0 dar. Auf diese Weise kann man jedem Wert x aus $\mathfrak{D}$ einen Wert einer Veränderlichen y eindeutig zuordnen, nämlich den jeweiligen Summenwert der Reihe.

Die Menge dieser Wertepaare (x, y) bestimmt eine Funktion $y = f(x)$, wobei die Zuordnungsvorschrift mit

$$f : \mathfrak{D} \mapsto \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

die Potenzreihe ist.

Satz 3.8. *Jede Potenzreihe stellt im Innern ihres Konvergenzbereiches $\mathfrak{D}$ eine Funktion*

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

von x dar. Differentiation und Integration von $f(x)$ können für alle $x \in \mathfrak{D}$ gliedweise an der Potenzreihe vorgenommen werden:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in \mathfrak{D},$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad x \in \mathfrak{D}.$$

Zur Erläuterung betrachten wir die Potenzreihe

$$1 - x + x^2 - x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

Sie ist geometrisch mit dem Anfangsglied $a = 1$ und dem Quotienten $q = -x$, also ist für $|x| < 1$ entsprechend $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$.

Die angeschriebene Potenzreihe ist also die für alle $|x| < 1$ gültige *Reihendarstellung* der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

Benötigt man eine Reihendarstellung für $|x| > 1$, so bedarf es lediglich der Umformung

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Jetzt stellt der zweite Bruch die Summe einer geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied $a = 1$ und dem Quotienten $q = -\frac{1}{x}$ dar, die für $\left|-\dfrac{1}{x}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x| > 1$ konvergiert und damit die folgende Gestalt besitzt

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + ...\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^n}.$$

Diese Funktionsreihe ist gemäß unserer Definition keine Potenzreihe in x mehr, wohl aber eine Potenzreihe in $\overline{x} = \dfrac{1}{x}$.

Differenziert man die gegebene Potenzreihe, so entsteht

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - ... = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1},$$

und man erhält die für $|x| < 1$ gültige Potenzreihendarstellung der Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Integriert man die Funktion $f(x)$, so erhält man einerseits in geschlossener Form

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x), \quad |x| < 1,$$

andererseits durch gliedweise Integration der Potenzreihe

$$\int \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + C = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + C.$$

Die Integrationskonstante kann man etwa dadurch bestimmen, daß man $x = 0 \in \mathfrak{D}$ einsetzt: $\ln 1 = C \;\Rightarrow\; C = 0$.

Damit haben wir die für $|x| < 1$ gültige Potenzreihendarstellung der logarithmischen Funktion $\ln(1+x)$ erhalten, nämlich

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

die übrigens auch noch für $x = 1$ konvergiert:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 3.9. Welche Funktion wird für $|x| < 1$ von der Potenzreihe

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1}$$

dargestellt? Welche Funktionen und ihre Potenzreihendarstellungen ergeben sich bei Differentiation und Integration der gegebenen Potenzreihe?

Aufgabe 3.10. Um die Funktion

$$f(x) = e^{-x} - 2e^{-2x} + 3e^{-3x} - 4e^{-4x} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-nx}$$

für $x \in \mathbb{R}^+$ in geschlossener Form zu erhalten, integriere man zunächst, setze $C = 1$ und ermittle $f(x)$ als Ableitung der Funktion, welche die Integralreihe darstellt. Welcher ist der Konvergenzbereich der gegebenen Reihe?

3.2. **Maclaurin-Reihen und Maclaurin-Polynome.** Wir hatten gesagt, daß jede konvergente Potenzreihe in ihrem Konvergenzbereich eine differenzierbare Funktion von x darstellt. Jetzt wenden wir uns der Frage zu, wie man überhaupt die Potenzreihendarstellung einer Funktion gewinnen kann. Man spricht dann von der *Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine Potenzreihe.*

Satz 3.11. *Sofern eine Funktion $y = f(x)$ überhaupt in eine konvergente Potenzreihe der Gestalt*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

entwickelt werden kann, so ist dies auf genau eine Weise mittels der Maclaurin-Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

möglich.

Beweis. Die Existenz und die beliebig oftmalige Ableitbarkeit der vorgelegten Funktion bei $x = 0$ ist also sicher eine **notwendige Bedingung** für ihre Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe. Wir haben demnach zu zeigen, daß $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ für $n = 0, 1, 2, ...$ ist.

Dies geschieht wie folgt:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + ... & \Rightarrow & f(0) = a_0, \\
f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2 + 4\,a_4\,x^3 + ... & \Rightarrow & f'(0) = a_1, \\
f''(x) = 2.1\,a_2 + 3.2\,a_3\,x + 4.3\,a_4\,x^2 + ... & \Rightarrow & f''(0) = 2.1\,a_2, \\
f'''(x) = 3.2.1\,a_3 + 4.3.2\,a_4\,x + ... & \Rightarrow & f'''(0) = 3.2.1\,a_3, \\
... & ... &
\end{array}$$

Setzt man die so gefundenen Ausdrücke für die Koeffizienten in die Potenzreihe an, so ergibt sich die gesuchte Maclaurin-Reihe. □

Hat man eine Funktion formal in eine Potenzreihe entwickelt, so muß grundsätzlich untersucht werden, für welche Werte von x die Reihe konvergiert und ob sie die vorgelegte Funktion auch wirklich darstellt.

Das **Konvergenzproblem** läßt sich in einfachen Fällen durch Bestimmung des Konvergenzbereiches verhältnismäßig leicht erledigen.

Das **Darstellungsproblem** wird durch eine Untersuchung des Restgliedes

$$R_{n+1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

gelöst. Faßt man im folgenden mit R_{n+1} den Rest der Reihe von der $(n+1)$-ten Potenz an zusammen, d.h.

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\,x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}\,x^{n+2} + \frac{f^{(n+3)}(0)}{(n+3)!}\,x^{n+3}...,$$

so kann man für die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\,x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\,x^i + R_{n+1}$$

schreiben. Nennt man das Polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\,x^i$ das Maclaurin-Polynom n-ten Grades für die Funktion $f(x)$, so gilt der einfache Zusammenhang

Maclaurin-Reihe = **Maclaurin-Polynom** + **Restglied**.

Die Bedeutung des Restgliedes besteht nun in folgenden zwei Aussagen:

(1) Soll eine konvergente Maclaurin-Reihe innerhalb ihres Konvergenzbereichs die Funktion $f(x)$ gemäß

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

darstellen, so ist dafür **notwendig** und **hinreichend**, daß

$$\lim_{n\to\infty} R^{n+1} = 0$$

gilt.

(2) Wird eine Funktion $f(x)$ durch ein Maclaurin-Polynom näherungsweise dargestellt, d.h.

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i,$$

so ermöglicht das Restglied R_{n+1} eine Abschätzung des begangenen Fehlers gemäß

$$R_{n+1} = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Für die Fehlerabschätzung benutzt man die *Lagrangesche Form des Restgliedes*

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1,$$

und schätzt dieses so ab, daß man eine obere Schranke für den Fehler erhält.

Die Bedeutung der Potenzreihenentwicklung in der praktischen Mathematik beruht in der Möglichkeit, jede Funktion, sofern sie durch ihre Potenzreihe darstellbar is, durch ein Polynom zu ersetzen, wobei durch Wahl des Polynomgrades der entstehende Fehler unter jeder Schranke gehalten werden kann.

Grundsätzlich wird das Maclaurin-Polynom die Funktion $f(x)$ um so besser approximieren, je höher der Grad n des Polynoms gewählt wird und je weniger x vom Mittelpunkt O des Konvergenzbereichs entfernt ist (d.h. je kleiner $|x|$ ist). Wählt man speziell ein lineares Maclaurin-Polynom zur Approximation, d.h. $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$, so haben wir die spezielle *Linearizierungsformel* vor uns.

Haben die Bildkurven zweier Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ den Punkt $P_0(x_0, y_0)$ gemeinsam, so ist $f(x_0) = g(x_0)$; haben sie ferner in P_0 die gleiche Steigung, so gilt noch $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Man sagt: *Die Bildkurven der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berühren einander im Punkt P_0 von n-ter Ordnung, wenn beide Funktionen dort bis zur n-ten Ableitung übereinstimmen:*

$$f(x_0) = g(x_0),\; f'(x_0) = g'(x_0),\; f''(x_0) = g''(x_0), ..., f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0).$$

Die Funktion $y = f(x)$ und ihr Maclaurin-Polynom n-ten Grades berühren einander im Punkt O von n-ter Ordnung.

Beispiel 3.12. Man diskutiere die Maclaurin-Reihenentwicklung der Kosinus-Funktion.

Lösung. Zunächst sind die Koeffizienten der Reihe zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f(0) &= \cos(0) = 1,\\
f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= -\sin(0) = 0,\\
f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -\cos(0) = -1,\\
f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= \sin(0) = 0,\\
f^{(4)}(x) &= \cos x, & f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1,\\
&... & &...
\end{aligned}$$

und damit die Potenzreihe selbst

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Die Reihe ist beständig konvergent und stellt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Kosinus-Funktion dar.

Da die Reihe nur gerade Potenzen von x aufweist, so folgt aus ihr die bekannte Formel $\cos(-x) = \cos x$, und es wird die Bezeichnung *gerade Funktion* jetzt verständlich.

Die einzelnen Maclaurin-Polynome für $f(x) = \cos x$ sind:

$$P_0(x) = 1,\ P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!},\ P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},\ P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},\ ...$$

Zur Fehlerabschätzung wird das Restglied in der Form von Lagrange herangezogen:

$$|R_{2n}| = \left|\frac{f^{(2n)}(\theta x)}{(2n)!}\, x^{2n}\right| = \left|(-1)^n \frac{\cos(\theta x)}{(2n)!}\, x^{2n}\right| < \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Beispiel 3.13. Man entwickle die Sinus-Funktion in ihre Maclaurin-Reihe.

Lösung. Für die Koeffizienten erhält man:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x, && f(0) = \sin(0) = 0,\\
&f'(x) = \cos x, && f'(0) = \cos(0) = 1,\\
&f''(x) = -\sin x, && f''(0) = -\sin(0) = 0,\\
&f'''(x) = -\cos x, && f'''(0) = -\cos(0) = -1,\\
&f^{(4)}(x) = \sin x, && f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0,\\
&... && ...
\end{aligned}$$

und für die Potenzreihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Reihe umfaßt alle x-Werte aus $\mathbb{R}$.

Da nur ungerade x-Potenzen auftreten, ist die Sinus-Funktion eine ungerade Funktion, d.h. $\sin(-x) = -\sin x$.

Die Fehlerabschätzung mittels R_{2n+1} ergibt hier

$$|R_{2n+1}| = \left|\frac{f^{(2n+1)}(\theta x)}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\right| = \left|(-1)^n \frac{\sin(\theta x)}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}\right| < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Beispiel 3.14. Gesucht ist die Maclaurin-Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$y = e^x.$$

Lösung. Die Koeffizienten ergeben sich aus $f^{(n)}(x) = e^x,\ f^{(n)}(0) = e^0 = 1,\ n = 0, 1, 2, ...$ zu $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$, womit die Potenzreihe die Gestalt

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

erhält. Sie gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Jede Potenzreihe ist im Innern ihres Konvergenzbereiches absolut konvergent. Wir ordnen die Glieder der Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

wie folgt an:

$$e^x = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...\right) + \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Andererseits kennen wir die Zerlegung der Exponentialfunktion in geraden und ungeraden Anteil gemäß

$$e^x = \cosh x + \sinh x.$$

Vergleicht man diese beide Darstellungen und beachtet die Eindeutigkeit der Zerlegung, so folgen daraus die Maclaurin-Reihen

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

die beide beständig konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig sind.

Beispiel 3.15. Man berechne die Eulersche Zahl e auf 6 Dezimalen genau.

Zu diesem Zweck setzen wir in der e^x-Reihe $x = 1$ und erhalten

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Damit wir eine Genauigkeit von 6 Dezimalen bekommen, ist n so groß zu wählen, daß das Restglied

$$R_{n+1|x=1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1}_{\quad |x=1} = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0,5.10^{-6}$$

ist, denn wegen $0 < \theta < 1$ wird $e^{\theta} < e < 3$. Löst man die letzte Ungleichung nach n auf, so wird $(n+1)! > 6.10^6$ für $n+1 \geq 11$, d.i. $n \geq 10$, und $e = 2,718282$. Man sieht, daß die dazu folgengen Glieder keinen Einfluß mehr auf die 6. Dezimale nehmen können, denn die Glieder bilden eine monoton fallende Folge.

Aufgabe 3.16. Man bestimme die Potenzreihen-Entwicklung der Potenzfunktion

$$f(x) = (1+x)^s, \; s \in \mathbb{R}.$$

Lösung. Für die Koeffizienten ergibt sich

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^s & &\Rightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) &= s(1+x)^{s-1} & &\Rightarrow f'(0) = s \\
f''(x) &= s(s-1)(1+x)^{s-2} & &\Rightarrow f''(0) = s(s-1) \\
f'''(x) &= s(s-1)(s-2)(1+x)^{s-3} & &\Rightarrow f'''(0) = s(s-1)(s-2),
\end{aligned}$$

allgemein für jedes $k = 1, 2, 3, ...$

$$f^{(k)}(x) = s(s-1)(s-2)...(s-k+1)(1+x)^{s-k}$$
$$\Rightarrow \ f^{(k)}(0) = s(s-1)(s-2)...(s-k+1)$$

und $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dbinom{s}{k}$.

Da jetzt s eine beliebige reelle Zahl sein kann, erweitern wir dieses Zeichen auf reelle s, so daß sich die gesuchte Potenzreihe in der Form

$$(1+x)^s = 1 + \binom{s}{1}x + \binom{s}{2}x^2 + ... + \binom{s}{k}x^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{s}{k}x^k$$

schreiben läßt. Der Gültigkeitsbereich dieser binomischen Reihe ist $|x| < 1$.

Ist s speziell eine positive ganze Zahl, so bricht die Reihe nach dem Gliede x^s ab, da dann $\binom{s}{k} = 0$ für alle $k > s$ ist, und man erhält den Binomischen Satz

$$(1+x)^s = \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}x^k.$$

Die binomische Reihe ist die Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes, falls der Exponent eine beliebige reelle Zahl ist.

Für $s = -1$ geht die binomische Reihe in die geometrische Reihe

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ...$$

über, da für jedes ganze positive k gilt $\binom{-1}{k} = (-1)^k$.

Die bekannte Linearizierungsformel $(1+x)^n \approx 1 + n\,x$ findet eine für reellen n gültige korrekte Begründung.

Beispiel 3.17. Man entwickle den Wurzelausdruck $\sqrt[3]{4-9x}$ in eine Potenzreihe.

Lösung. Hierzu ist zunächst wie folgt umzuformen

$$\sqrt[3]{4-9x} = \sqrt[3]{4\left(1 - \frac{9}{4}\,x\right)} = \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{1+t}, \quad t := -\frac{9}{4}x.$$

Für $|t| < 1$, d.h. $|x| < \frac{4}{9}$, erhält man folgende binomische Reihe

$$(1+t)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\,t - \frac{1}{9}\,t^2 + \frac{5}{81}\,t^3 - ...$$

und

$$\sqrt[3]{4-9x} = \sqrt[3]{4}\left(1 - \frac{3}{4}\,x - \frac{9}{16}\,x^2 - \frac{45}{64}\,x^3 - ...\right).$$

Beispiel 3.18. Zur Berechnung von $\sqrt{10}$ kann man $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9(1+\frac{1}{9})} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$ schreiben und die verbleibende Wurzel in eine binomische Reihe entwickeln

$$\sqrt{10} = 3\left(1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{9} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{9}\right)^3 - ...\right).$$

Bemerkung 3.19. Die durch folgende Terme definierten Funktionen besitzen keine Maclaurin-Potenzreihenentwicklung, da die notwendige Voraussetzung, nämlich Existenz und Ableitbarkeit beliebiger Ordnung im Nullpunkt, nicht erfüllt ist.

$$\sqrt[n]{x}, \quad \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}, \quad \ln x,\ x > 0, \quad \cot x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{1}{\sinh x}.$$

Aufgabe 3.20. (1) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Maclaurin-Reihen:

$$e^{-x}\cos x, \quad \sqrt{1+\sin x}, \quad e^{x+x^2}, \quad e^{\cos x}, \quad \frac{x+1}{-2x^2+x+1}.$$

(2) Schreiben Sie die Maclaurin-Reihe für die Exponentialfinktion mit imaginärem Exponenten an und ordnen Sie die Glieder nach Real- und Imaginärteil. Welche wichtige Formel der komplexen Arithmetik ergibt sich?

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right) = \cos x + i \sin x.$$

Antwort: *die Formel von Euler*

3.3. **Potenzreihen-Entwicklungsmethoden.** Es hilft in vielen Fällen der Ansatz einer Maclaurin-Reihe mit zunächst noch unbestimmten Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, d.h.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...,$$

sofern man über $f(x)$ noch gewisse Beziehungen zu anderen Funktionen und deren Reihenentwicklungen herstellen kann. Wir unterscheiden folgende Fälle.

3.3.1. *$f(x)$ ist darstellbar als Quotient zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, deren Potenzreihen bekannt sind.*

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ...}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...}.$$

Man setzt gemäß

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ...}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...}$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + ...,$$

multipliziert linkerseits aus, ordnet nach Potenzen von x und vergleicht beiderseits die Koeffizienten gleicher x-Potenzen. Für die ersten drei Koeffizienten ergibt sich dann

$$a_0 c_0 = b_0 \ \Rightarrow\ a_0 = \frac{b_0}{c_0}, \quad a_0 c_1 + a_1 c_0 = b_1 \ \Rightarrow\ a_1 = \frac{b_1 c_0 - b_0 c_1}{c_0^2},$$

$$a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 = b_2 \ \Rightarrow\ a_2 = \frac{1}{c_0^3}(b_2 c_0^2 - b_0 c_0 c_2 - b_1 c_0 c_1 + b_0 c_1^2),$$

usw.

Beispiel 3.21. Man entwickle die Hyperbelfunktion $y = \tanh x$ in ihre Maclaurin-Reihe.

Lösung. Bekannt ist

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...},$$

also führt der Ansatz $\tanh x = a_1\, x + a_3\, x^3 + a_5\, x^5 + ...$, da $\tanh x$ eine ungerade Funktion ist, auf

$$(a_1\, x + a_3\, x^3 + a_5\, x^5 + ...)(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...) \equiv x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

und

$$a_1 = 1, \quad \frac{a_1}{2!} + a_3 = \frac{1}{3!} \;\Rightarrow\; a_3 = -\frac{1}{3}, \quad \frac{a_1}{4!} + \frac{a_3}{2!} + a_5 = \frac{1}{5!} \;\Rightarrow\; a_5 = \frac{2}{15}, \; ...,$$

also

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{2}{15}\, x^5 - ...$$

Die Reihe konvergiert für alle $|x| < \frac{1}{2}$ und stellt dort die Tangens-Hyperbolicus-Funktion dar.

3.3.2. *$f(x)$ ist darstellbar als Kehrwert einer Funktion $h(x)$, deren Potenzreihenentwicklung bekannt ist.*

$$f(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + ... + c_n\, x^n + ...}.$$

Aus dem Ansatz

$$(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + ... + a_n\, x^n + ...)(c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + ... + c_n\, x^n + ...) \equiv 1$$

folgen durch Koeffizientenvergleich die gesuchten Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{c_0}, \quad a_1 = -\frac{c_1}{c_0^2}, \quad a_2 = \frac{c_1^2 - c_2 c_0}{c_0^3}, \; ...$$

Das Resultat ist stets die Maclaurin-Reihe $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

Beispiel 3.22. Wie lautet die Maclaurin-Reihe für die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$?

Lösung. Die Funktion ist gerade, also kann

$$(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + ... + a_n\, x^n + ...)(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...) \equiv 1$$

angesetzt werden. Für die Koeffizienten folgt das gestaffelte System:

$$\begin{aligned}
&+a_0 && = 1; \\
&-\frac{a_0}{2!} + a_2 && = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{1}{2}; \\
&-\frac{a_2}{2!} + \frac{a_0}{4!} + a_4 && = 0 \;\Rightarrow\; a_4 = \frac{5}{24}; \\
&-\frac{a_4}{2!} + \frac{a_2}{4!} - \frac{a_0}{6!} + a_6 && = 0 \;\Rightarrow\; a_6 = \frac{61}{720}; \\
&...
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{24}\,x^4 + \frac{61}{720}\,x^6 + ...$$

Der Gültigkeitsbereich der Reihe ist $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3.23. Wie lautet die Funktion $y = f(x)$, welche die Gleichung $y'' = (x+2)\,y$ und den Anfangsbedingungen $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$ genügt? Gesucht ist das Maclaurin-Polynom 5^{ten} Grades für $f(x)$.

Hinweis: $y := 2 + x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + a_5\,x^5 + ...$
Antwort: $y = 2 + x + 2\,x^2 + \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{5}{12}\,x^4 + \frac{1}{6}\,x^5 + ...$

3.3.3. *Potenzreihenentwicklung durch Integration.* Eine weitere Möglichkeit zur Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in ihre Maclaurin-Reihe ist dann gegeben, wenn man die Potenzreihenentwicklung ihrer Ableitungsfunktion $f'(x)$ kennt. Indem man diese gliedweise aufintegriert, erhält man die gesuchte Reihendarstellung, was nur für alle x im Innern des Konvergenzbereichs möglich ist. Die Integrationskonstante ergibt sich zu Null, weil hier $f(0) = a_0 = 0$ zu setzen ist.

Beispiel 3.24. Betrachten wir die Potenzreihenentwicklung der Logarithmischen Funktion $f(x) = \ln(1+x)$.

Von ihrer Ableitungsformel $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ ist uns die Potenzreihenentwicklung bekannt:

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ..., \quad |x| < 1.$$

Integriert man links geschlossen, rechts gliedweise, so wird

$$\int f'(x)\,dx = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Dies ist die in $-1 < x \leq 1$ gültige Maclaurin-Reihe der Funktion $f(x)$.

Zusatz 3.25. *Es ist folgende Formel gültig*

$$\ln\frac{u}{v} = 2\left\{\frac{u-v}{u+v} + \frac{1}{3}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u-v}{u+v}\right)^5 + ...\right\}, \qquad uv > 0.$$

Beweis. Wir ersetzen in

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

x durch $-x$ und erhalten die in $-1 \leq x < 1$ gültige Reihe

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...$$

Es gilt also

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right\}$$

Diese Reihe ist im gemeinsamen Konvergenzbereich $|x| < 1$ gültig. Setzt man nun

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{u}{v} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{u-v}{u+v},$$

so ist $|x| < 1$ gleichwertig mit $sign\, u = sign\, v$, weil bei Vorzeichengleichheit die Differenz zweier Zahlen stets betragsmäßig kleiner ist als ihre Summe, der Quotient von Differenz und Summe also betragsmäßig kleiner als 1. □

3.4. **Taylor-Reihen und Taylor-Polynome.** Wir wollen jetzt davon ausgehen, daß die Funktion $f(x)$ an einer beliebigen Stelle $x = x_0$ samt ihren Ableitungen bekannt ist und fragen, wie nun die Funktion durch diese Angaben bestimmt wird und wie sich benachbarte Funktionswerte berechnen lassen.

Zunächst beachten wir, daß die Aufgabenstellung die gleiche ist wie bei der Maclaurinschen Reihenentwicklung, nur daß die entscheidende Stelle nicht $x = 0$, sondern $x = x_0$ und die Nachbarstelle nicht im Abstand x, sondern im Abstand $x - x_0 =: h$ liegt.

Tatsächlich bedarf es keiner neuen Überlegungen, sondern nur einer Umschreibung der Maclaurinschen Reihe auf die neuen x-Werte. Es wird x_0 zum Mittelpunkt des Konvergenzbereichs, d.i. $x_0 - r < x < x_0 + r$, ferner $x_0 + h$ zur Nachbarstelle und die bekannten Ausdrücke

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ f''(x_0),\ ...,\ f^{(n)}(x_0), ...$$

werden maßgebend für die Koeffizienten der Potenzreihe:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n$$

Wir geben das Restglied R_{n+1} in der Form von Lagrange für die Taylor-Reihe an

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Man nennt die Teilsumme der ersten n Potenzen

$$P(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$$

das *Taylor-Polynom* n-ten Grades in h.

Für alle Stellen des Konvergenzbereiches approximiert das Taylor-Polynom die zugehörige Funktion mit beliebiger Genauigkeit, wenn man n genügend groß wählt.

3.4.1. *Sonderfälle der Taylor-Reihe.*

(1) Bricht man die Taylor-Reihe bereits nach dem ersten Glied ab und faßt alle übrigen Potenzen mit dem Restglied R_1 zusammen, so ergibt sich

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)\, h, \quad 0 < \theta < 1,$$

oder anders geschrieben

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Das ist aber der uns bekannte Mittelwertsatz, der somit als ein Spezialfall der Taylor-Reihe erscheint.

(2) Wir wollen noch der Taylor-Reihe eine etwas andere Form geben. Wir ersetzen das Argument $x_0 + h$ durch x, also h durch $x - x_0$ und bekommen

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(3) Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß wir das Taylor-Polynom in der zweiten Form

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

bereits als Gleichung der *Schmiegungsparabel n^{ter} Ordnung* für die Funktion $f(x)$ erklären, d.h. die Bildkurven von $f(x)$ und $P(x)$ berühren einander von der n^{ten} Ordnung an der Stelle $x = x_0$.

Ersetzt man eine Funktion $f(x)$ speziell durch ihr lineares Taylor-Polynom, d.h. durch ihre Schmiegungsparabel erster Ordnung,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

so bedeutet dies die *Linearisierung* von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

Aufgabe 3.26. Entwickeln Sie die Funktionen

(a) $y = \sin x$ nach Potenzen von $(x - \frac{\pi}{3})$;

(b) $y = \cosh x$ nach Potenzen von $(x + 2)$;

(c) $y = \dfrac{1}{x-4}$ nach Potenzen von $(x + 1)$;

(d) $y = 5x^4 - x^3 + 2x - 6$ nach Potenzen von $(x - 3)$.

3.4.2. *Integration durch Potenzreihenentwicklung.*

(1) Das Integral

$$\mathcal{J} = \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

ist in geschlossener Form **nicht lösbar**. Entwickelt man den Integranden in eine Potenzreihe gemäß

$$\frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...$$

und integriert man gliedweise, so wird

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3(3!)} + \frac{x^5}{5(5!)} - \frac{x^7}{7(7!)} + ...$$

Diese Entwicklung ist für alle x gültig, da es erforderlich ist, daß der Integrand noch für $x = 0$ den Wert 1 zugeordnet bekommt (die sog. Lückenerhebung).

(2) Das *Gaußsche Fehlerintegral* ist eine für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärte Funktion Φ gemäß

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Geben Sie $\Phi(x)$ als Potenzreihe (konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$) an.

Antwort: $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(n!)}$

3.4.3. *Bedeutung der Taylor-Entwicklung von Funktionen.* Die wesentliche Bedeutung des Taylor-Polynoms und der Restform von Lagrange liegt darin, daß aus der Kenntnis einer Funktion und ihrer Ableitungen an einer Stelle x_0 Schlüsse auf die Werte dieser Funktion an benachbarten Stellen $x_0 + h$ gezogen werden können. Das ist praktisch und theoretisch von allergrößter Bedeutung. Das Taylor-Polynom und die Restform von Lagrange ermöglichen uns eine in den meisten Fällen sehr bequeme numerische Berechnung der Funktionswerte der elementaren Funktionen und vermittelt uns dadurch eine ganz konkrete, praktisch und theoretisch gleich befriedigende Beherrschung dieser Funktionen.

Indessen kann die Bestimmung eines Funktionswertes nur mit einer gewissen Genauigkeit, etwa auf 10 Dezimalen (d.h. mit der Genauigkeit 10^{-10}) oder allgemeiner mit der Genauigkeit ε gefordrt werden, wenn ε irgendeine vorgeschriebene (kleine) positive Zahl bedeutet. Diese Forderung soll besagen, daß statt des Funktionswertes $f(x_0 + h)$ ein Zahlenwert errechnet wird, der sich von $f(x_0+h)$ dem Betrage nach um weniger als ε unterscheidet. Einen solchen Zahlenwert liefert das Taylor-Polynom n^{ten} Gtades dann und nur dann, wenn der Betrag von R_{n+1} unterhalb der vorgeschriebenen Genauigkeitsgrenze liegt.

Aufgabe 3.27. (1) An die Sinus-Linie $y = \sin x$ soll im Nullpunkt die Schmiegungsparabel dritter Ordnung $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ gelegt werden. Von welcher Ordnung ist die Berührung?

(2) Welche Gleichung hat die Schmiegungsparabel zweiter Ordnung für die Bildkurve der Logarithmusfunktion $y = \ln x$ an der Stelle $x = 1$?

4. Funktionen von zwei reellen Veränderlichen

Erklärung 4.1. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ nicht-leere Mengen. Dann heißt die Relation

$$\{((x,y),z) \mid (x,y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B},\ z \in \mathcal{C}, \quad (x,y) \mapsto z\}$$

eine Funktion (Abbildung) f von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$, wenn jedem Paar (x,y) aus $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ eindeutig ein $z \in \mathcal{C}$ zugeordnet ist. Man schreibt

$$f:\ \mathcal{A} \times \mathcal{B}\ \rightarrow\ \mathcal{C} \quad \text{mit} \quad (x,y) \mapsto z = f(x,y).$$

Das kartesische Produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ heißt Definitionsmenge (Definitionsbereich), $\mathcal{C}$ ist eine Obermenge der Wertemenge (des Wertevorrats).

Sind speziell $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$, so sprechen wir von einer reellen Funktion der reellen Variablen x, y und benutzen dafür die Kurzschreibweise "die Funktion $z = f(x,y)$".

Beispiel 4.2. Die Angabe "die Funktion $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$" ist als Abkürzung für die Funktion $f = \{((x,y),z) \mid (x,y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B},\ z \in \mathcal{C},\ z := \sqrt{x^2 + y^2 - 4}\}$ mit der Definitionsmenge $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x,y) \mid x \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R},\ y \in \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}:\ x^2 + y^2 \geq 4\}$ (d.i. die Menge aller Punkte $P(x,y)$ der xy-Ebene auf und außerhalb des Kreises um O mit Radius 2), und der Wertemenge $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subset \mathcal{C}$ zu verstehen.

Auch bei Funktionen von zwei Veränderlichen können wir verschiedene Darstellungsformen unterscheiden. Von ihnen ist die Funktionsgleichung die häufigste und wichtigste. Sie kann vorliegen

- als Funktionsgleichung in der **expliziten** (entwickelten) Form
  $z = f(x, y)$, oder $y = g(x, z)$, oder $x = h(y, z)$;
- als Relationsgleichung in der **impliziten** (unentwickelten) Form $F(x, y, z) = 0$;
- als System von drei Funktionsgleichungen in einer **Parameterform**
  $$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$
  Jede der drei Variablen x, y, z wird dabei zu einer Funktion der zwei Parameter u und v, welche als die unabhängigen Veränderlichen zu betrachten sind.

Die implizite Form gibt es stets, wenn es eine explizite gibt.

Eine explizite Form gibt es nur dann, wenn die Auflösung nach wenigstens einer Variablen formal ausführbar ist. Ist aber eine solche Auflösung möglich, so existiert auch eine Parameterdarstellung; etwa bei der expliziten Form $z = f(x, y)$ stets $x = u,\ y = v,\ z = f(u, v)$.

Gibt es eine Parameterdarstellung, so gibt es bereits unendlich viele. Allerdings wird man bei angewandten Problemen nur solche wählen, bei denen die Parameter eine *geometrische* oder *physikalische* Bedeutung besitzen.

Beispiel 4.3. Vorgelegt sei die Funktionsgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Die **expliziten** Formen können sämtlich gebildet werden, so etwa

$$z = \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \le r^2, \\ -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \le r^2, \end{cases}$$

wobei die Aufspaltung wegen der geforderten Eindeutigkeit der Zuordnung $z = f(x, y)$ vorzunehmen ist.

Die **implizite** Form lautet $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, und eine **Parameterform** ist $x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\pi \le \psi < \pi.$

Es handelt sich hier um die **Mittelpunktgleichung** einer Kugel (damit ist stets die **Kugelfläche**, und nicht die massive Kugel gemeint) vom Radius r.

4.1. **Geometrische Darstellungsformen.** Da wir jetzt drei Veränderlichen haben, legen wir unseren geometrischen Betrachtungen ein rechtshändiges räumliches kartesisches Koordinatensystem zugrunde. Bei diesem stehen x-, y- und z-Achse paarweise aufeinander senkrecht und bilden in dieser Reihenfolge eine Rechtsschraubung.

Jedes Wertepaar (x, y) bestimmt einen Punkt P_0 in der xy-Ebene, von dem aus noch die "Höhe" $z = f(x, y)$ aufzutragen ist. So gelangt man zu dem Raumpunkt P mit den Koordinaten x, y, z. Für die Funktion $z = f(x, y)$ bekommt man auf diese Weise eine Menge von Punkten, deren Koordinaten die Funktionsgleichung identisch erfüllen, und die in ihrer Gesamtheit eine **räumliche Fläche** bilden. Diese Fläche kann als das geometrische Bild oder die geometrische Darstellungsform der zugrunde liegenden Funktion angesehen werden.

Wir fassen zusammen: *Das geometrische Bild einer Funktion $F(x, y, z) = 0$ ist eine Fläche $\mathcal{F}$ im dreidimensionalen Raum, die aus den und nur den Punkten besteht, deren Koordinaten die Funktionsgleichung identisch erfüllen, d.h.*

$$\mathcal{F} = \{P(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Erklärung 4.4. Als *Schnittliniendarstellung* (auch *Schichtlinien-* oder *Niveauliniendarstellung*) bezeichnet man die Darstellung einer Funktion $F(x, y, z) = 0$ durch die Kurven, welche beim Schnitt der Bildfläche mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen entstehen.

Eine Ebene, die parallel zur xy-Ebene im Abstand a verläuft, hat offenbar die Gleichung $z = a$, denn sie stellt doch die Menge genau derjenigen Punkte dar, deren z-Koordinate gleich a ist. Ganz entsprechend ist $y = b$ als Gleichung der zur xz-Ebene parallelen Ebene im Abstand b, und $x = c$ als Gleichung der zur yz-Ebene parallelen Ebene im Abstand c anzusehen. Demgemäß haben die Schnittkurven einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ mit diesen Parallelebenen die Gleichungen

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0, \\ z = a; \end{cases} \qquad \begin{cases} F(x, b, z) = 0, \\ y = b; \end{cases} \qquad \begin{cases} F(c, y, z) = 0, \\ x = c. \end{cases}$$

Erklärung 4.5. Der (nicht-leere) Durchschnitt zweier Raumflächen $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ heißt eine *Raumkurve* $\mathfrak{c} := \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$.

Auf der Raumkurve $\mathfrak{c}$ liegen also die und nur die Punkte, die zugleich auf $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ liegen.

Haben die Flächen $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ die Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ bzw. $G(x, y, z) = 0$, so liegt ein Punkt $P(x, y, z)$ genau dann auf der Raumkurve, wenn seine Koordinaten sowohl die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ als auch die Gleichung $G(x, y, z) = 0$ identisch erfüllen, d.h. aber, *das System* $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ *ist eine analytische Darstellung der Raumkurve* $\mathfrak{c} := \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$.

Setzt man z. B. x als Funktion eines Parameters t, d.i. $x = x(t)$, in die beiden Flächengleichungen ein, so erhält man

$$F(x(t), y, z) = 0, \quad G(x(t), y, z) = 0,$$

also ein System, mit dem man unter gewisen Voraussetzungen y und z als Funktionen $y = y(t)$, $z = z(t)$ von t ausdrücken kann. Diese drei Funktionen

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

stellen demnach eine *Parameterdarstellung* der Raumkurve dar, denn es ist für jedes Tripel (x, y, z)

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0, \quad G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0.$$

Aufgabe 4.6. Welche sind die Niveaulinien folgender Flächen:

(a) $z = xy$ (**hyperbollisches Paraboloid**);

(b) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ (**elliptisches Paraboloid**);

(c) $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ (**hyperbolisches Paraboloid**);

(d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (**einschaliges Hyperboloid**);

(e) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (**zweischaliges Hyperboloid**);

(f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (**Ellipsoid**);

(g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ (**Doppelkegel**).

4.2. **Partielle Ableitungen.** Die Ableitungs- bzw. Differentialrechnung bei Funktionen von zwei (und mehr) unabhängigen Veränderlichen wird grundsätzlich zurückgeführt auf die der Funktionen einer Veränderlichen, indem man jeweils nur nach einer Veränderlichen ableitet und die andere Veränderliche konstant hält.

Ausgangspunkt sind die beiden Differenzenquotienten der Funktion $z = f(x,y)$, nämlich

$$\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \qquad \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k},$$

deren Grenzwerte für $h \to 0$ bzw. $k \to 0$ zu bilden sind, vorausgesetzt sie existieren.

Erklärung 4.7. Der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}_{|(x_0,y_0)} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)_{|(x_0,y_0)}$$

heißt *partielle Ableitung* bzw. *partieller Differenzialquotient* der Funktion $z = f(x,y)$ nach x an der Stelle (x_0, y_0) des Definitionsbereiches der Funktion.

Der Grenzwert

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k} = f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}_{|(x_0,y_0)} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)_{|(x_0,y_0)}$$

heißt *partielle Ableitung* bzw. *partieller Differenzialquotient* der Funktion $z = f(x,y)$ nach y an der Stelle (x_0, y_0) des Definitionsbereiches der Funktion.

Formal wird die partielle Ableitung nach x (resp. y) wie die gewöhnliche Ableitung nach x (resp. y) ausgeführt, nur muß man beim Ableiten y (resp. x) wie eine Konstante behandeln.

Beispiel 4.8. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 - xy^3 - \sqrt{x+y}$, $x+y > 0$. Man bestimme die partiellen Ableitungen f_x und f_y.

Lösung.

$$f_x(x,y) = 2x - y^3 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}, \quad f_y(x,y) = -3xy^2 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}.$$

Beispiel 4.9. Zu bestimmen sind die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = x^y - y^x - \sin(xy) - x - 1, \quad x > 0,\ y > 0$$

im Punkt $P(1,1)$.

Lösung. Da $x^y = e^{y \ln x}$ und $y^x = e^{x \ln y}$ gilt, so ist

$$f_x(x,y) = yx^{y-1} - y^x \ln y - y\cos(xy) - 1, \quad f_y(x,y) = x^y \ln x - xy^{x-1} - x\cos(xy)$$

und $f_x(1,1) = -\cos 1$, $f_y(1,1) = -1 - \cos 1$.

4.3. **Höhere partielle Ableitungen.** Partielle Ableitungen höherer Ordnung werden formal wie bei Funktionen einer Veränderlichen gebildet und wie folgt bezeichnet

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right).$$

Dies gilt auch für die partiellen Ableitungen dritter Ordnung

$$f_{xxx}, \quad f_{xxy}, \quad f_{xyx}, \quad f_{yxx}, \quad f_{xyy}, \quad f_{yxy}, \quad f_{yyx}, \quad f_{yyy},$$

usw. Wird nicht nach ein und derselben Veränderlichen partial abgeleitet, so spricht man von *gemischten partiellen Ableitungen* höherer Ordnung.

Satz 4.10. Satz von Schwarz: *Die gemischten partiellen Ableitungen k-ter Ordnung sind unabhängig von der Reihenfolge der Ableitungen, also*

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

und entsprechend für $k > 3$.

Beispiel 4.11. Man bilde sämtliche partielle Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = x^5y^3 - \cos x \sin y - e^{xy^2} + 1.$$

Lösung.

$$f_x = 5\,x^4y^3 + \sin x \sin y - y^2e^{xy^2}, \quad f_y = 3\,x^5y^2 - \cos x \cos y - 2\,xye^{xy^2};$$

$$f_{xx} = 20\,x^3y^3 + \cos x \sin y - y^4e^{xy^2}, \quad f_{yy} = 6\,x^5y + \cos x \sin y - 2\,x(1 + 2\,xy^2)e^{xy^2},$$

$$f_{xy} = 15\,x^4y^2 + \sin x \cos y - 2\,y(1 + xy^2)e^{xy^2}.$$

Beispiel 4.12. Von der Funktion $f(x,y) = \sqrt{y}\,\ln x,\ x > 0,\ y > 0,$ sind sämtliche partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung zu bilden.

Lösung.

$$f_x = \frac{\sqrt{y}}{x}, \quad f_y = \frac{\ln x}{2\sqrt{y}}; \quad f_{xx} = -\frac{\sqrt{y}}{x^2}, \quad f_{yy} = -\frac{\ln x}{4y\sqrt{y}}, \quad f_{xy} = \frac{1}{2x\sqrt{y}};$$

$$f_{xxx} = \frac{2\sqrt{y}}{x^3}, \quad f_{yyy} = \frac{3\ln x}{8y^2\sqrt{y}}, \quad f_{xxy} = \frac{-1}{2x^2\sqrt{y}}, \quad f_{yyx} = \frac{-1}{4xy\sqrt{y}}.$$

Aufgabe 4.13. Bilden Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von folgenden Funktionen:

$$z = x^2y^3 - 4\,xy^2 - 6\,x + 5\,y - 1, \quad z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), \quad z = \tan^2\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right),$$

$$z = y\ln(\sin x), \quad z = \sinh\sqrt{x - y^2}, \quad z = \ln\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}, \quad z = f\left(\frac{x}{y}\right), \quad z = \sqrt{x^y}.$$

Welche sind die Definitionsbereiche dieser Funktionen?

4.4. **Das totale (vollständige) Differential.**

Erklärung 4.14. Unter dem *totalen* oder *vollständigen Differential* dz bzw. $df(x,y)$ einer Funktion zweier Veränderlichen $z = f(x,y)$ versteht man den Ausdruck

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy \quad \text{bzw.} \quad df(x,y) = f_x\,dx + f_y\,dy.$$

Diese Definition ist eine sinngemäße Verallgemeinerung des Differenzials einer Funktion von einer Veränderlichen.

Bemerkung 4.15. Man beachte, daß für die rechtsstehenden Differentiale dx und dy der unabhängigen Veränderlichen x und y stets $dx = h = \Delta x$, $dy = k = \Delta y$ gilt, während im allgemeinen für das Differential dz der Funktion $z = f(x,y)$ $\quad dz \neq \Delta z$ gilt.

Für hinreichend kleine Argumentdifferenzen wird man also auf Grund der Näherungsgleich heit $dz \approx \Delta z$ für kleine $|h|$ und $|k|$ die Differentiale durch die Wertedifferenzen ersetzen und mit letzteren arbeiten.

Wir notieren noch die Verallgemeinerung des totalen Differentials auf Funktionen von n Veränderlichen $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Für diese gilt entsprechend

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Aufgabe 4.16. Wie lautet das totale Differenzial folgender Funktionen?

$$z = \ln\cot(x+y), \quad z = \sin(x\cos y), \quad z = \sin(\cos(xy)),$$

$$z = \operatorname{Arsinh}\left(\frac{x}{y}\right), \quad z = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}.$$

Welche sind die Definitionsbereiche dieser Funktionen?

4.5. **Grenzwerte und Stetigkeit der Funktionen von zwei Veränderlichen.**

Erklärung 4.17. Es sei $\mathcal{G}$ eine beliebige Punktmenge der xy-Ebene und $P_0(x_0, y_0)$ ein Punkt derselben, welcher nicht zu $\mathcal{G}$ zugehören braucht. Es sei $z = f(x,y)$ eine auf $\mathcal{G}$ definierte Funktion der Veränderlichen x, y. Dann sagt man, *es strebe $f(x,y)$ gegen den (endlichen) Grenzwert G, wenn der veränderliche Punkt $P(x,y)$ auf $\mathcal{G}$ gegen die feste Stelle P_0 rückt*, wenn für jede der Menge $\mathcal{G}$ entnommene Punktfolge $P_n(x_n, y_n)$, die gegen P_0 strebt (d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$), deren Punkte aber von P_0 verschieden sind, die Folge der zugehörigen Funktionswerte $z_n = f(x_n, y_n)$ gegen G strebt.

Aufgabe 4.18. Bestimmen Sie die Grenzwerte (falls vorhanden):

$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(2xy)}{x}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy}.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

Erklärung 4.19. Es sei $\mathcal{G}$ wieder eine Punktmenge der xy-Ebene und $z = f(x, y)$ eine auf $\mathcal{G}$ definierte Funktion. Dann sagt man, *die Funktion $f(x, y)$ sei an der Stelle $P_0(x_0, y_0)$ stetig, wenn $P_0(x_0, y_0)$ ein zu $\mathcal{G}$ gehöriger Punkt ist und wenn bei Annäherung auf $\mathcal{G}$ $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ ist*, wenn also der Grenzwert der Funktion bei Annäherung an die Stelle P_0 mit dem Funktionswert an dieser Stelle selbst übereinstimmt.

Bemerkung 4.20. Wird der Punkt (x, y) in $\mathcal{G}$ mit P bezeichnet, so wird auch der ihm zugeordnete Funktionswert $f(x, y)$ gelegentlich einfach mit $f(P)$ bezeichnet.

Legt man bei einer stetigen Funktion von zwei Veränderlichen die eine Variable fest, so erhält man eine stetige Funktion der anderen Variablen.

Erklärung 4.21. Werden drei Funktionen $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ gegeben, die sämtlich in ein und demselben Gebiet $\mathcal{G}$ einer uv-Ebene definiert und stetig sind, so soll die Menge $\mathcal{S}$ derjenigen Punkte $P(x, y, z)$ eines xyz-Raumes, deren Koordinaten man erhält, wenn

$$(*) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

gesetzt wird und der Punkt $Q(u, v)$ alle Lagen in $\mathcal{G}$ durchläuft, eine *stetige Fläche* heißen.

Das System der drei Gleichungen $(*)$ heißt eine *Parameterdarstellung* der Fläche bzw. des Flächenstücks, das in vektorieller Schreibweise durch eine Gleichung

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(\varphi(u, v),\ \psi(u, v),\ \chi(u, v)) := \overrightarrow{r}(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{G}$$

ersetzt werden kann.

Erklärung 4.22. Ein stetiges Flächenstück soll *glatt* heißen, wenn die drei Funktionen $(*)$ innerhalb $\mathcal{G}$ überall stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen und wenn die Matrix

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} \varphi_u(u, v) & \psi_u(u, v) & \chi_u(u, v) \\ \varphi_v(u, v) & \psi_v(u, v) & \chi_v(u, v) \end{pmatrix}$$

an jeder Stelle (u, v) von $\mathcal{G}$ den Rang zwei hat.

Bemerkung 4.23. Den Vektor, dessen drei Koordinaten in der ersten Zeile der Matrix $(**)$ stehen, pflegt man mit $\overrightarrow{r}_u$ zu bezeichnen, entsprechend mit $\overrightarrow{r}_v$ den Vektor, dessen Koordinaten die zweite Zeile von $(**)$ bilden.

Die an die Matrix gestellte Forderung bedeutet dann, daß das Vektorprodukt $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ vom Nullvektor verschieden ist.

Beispiel 4.24. Die Kugelfläche mit dem Mittelpunkt $M(a, b, c)$ und dem Radius r hat die Parameterdarstellung

$$x = a + r\cos\lambda\cos\mu, \quad y = b + r\cos\lambda\sin\mu, \quad z = c + r\sin\lambda,$$

wobei $0 \le \mu < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$ das entsprechende Gebiet $\mathcal{G}$ ist.

Für diese Kugelfläche ist

$$\overrightarrow{r}_\lambda \times \overrightarrow{r}_\mu(-r^2\cos^2\lambda\cos\mu, -r^2\cos^2\lambda\sin\mu, -r^2\sin\lambda\cos\mu) \neq \overrightarrow{0}.$$

4.6. **Ausdehnung des Taylorschen Satzes.** Es werde eine Funktion $z = f(x,y)$ von zwei Veränderlichen gegeben und angenommen, daß die partiellen Ableitungen aller Ordnungen dieser Funktion mindestens bis hinauf einer bestimmten Ordnung $(p+1)$ in einem zweidimensionalen Gebiet $\mathcal{D}$ vorhanden und stetig (bezüglich einer jeden der Veränderlichen) seien. Wenn dann (x_0, y_0) und (x_0+h, y_0+k) zwei im Innern dieses Bereiches liegende Stellen sind, deren gerade Verbindungsstrecke ebenfalls im Innern des Bereiches liegt, so stellt der Ausdruck $f(x_0+ht, y_0+kt) = F(t)$ eine für $0 \le t \le 1$ differenzierbare Funktion der Veränderlichen t dar, und die Ableitung dieser Funktion wird durch die Gleichung

$$F'(t) = f_x(x_0+ht, y_0+kt)\,h + f_y(x_0+ht, y_0+kt)\,k$$

gegeben.

Ist nun $p > 0$, so kann man diese Ableitung abermals differenzieren und erhält dadurch

$$F''(t) = \{f_{xx}\,h + f_{yx}\,k\}\,h + \{f_{xy}\,h + f_{yy}\,k\}\,k,$$

oder, wegen $f_{xy} = f_{yx}$,

$$F''(t) = f_{xx}(x_0+ht, y_0+kt)\,h^2 + 2\,f_{xy}(x_0+ht, y_0+kt)\,hk + f_{yy}(x_0+ht, y_0+kt)\,k^2.$$

Liegt p auch oberhalb 1, so ist noch eine dritte Differentiation möglich, und diese führt nach einer ganz ähnlichen Rechnung zu der Gleichung

$$F'''(t) = f_{xxx}\,h^3 + 3\,f_{xxy}\,h^2k + 3\,f_{xyy}\,hk^2 + f_{yyy}\,k^3,$$

in welcher als Argumente der vorkommenen partiellen Ableitungen dritter Ordnung überall die Werte (x_0+ht, y_0+kt) zu nehmen sind.

So kann man, falls p auch größer 2 ist, weiter fortfahren und erkennt dabei leicht, daß die Zahlenkoeffizienten in den Ausdrücken für die aufeinanderfolgenden Ableitungen der Funktion $F(t)$ dieselben sind, wie in den aufeinanderfolgenden Potenzen eines Binoms.

Für die Funktion $F(t)$ ist der folgende Satz gültig.

Satz 4.25. Satz von Taylor: *Es bezeichne n eine nicht negative ganze Zahl und $f(x)$ eine Funktion, für die in dem beiderseits abgeschlossenen Intervall $[x_0, x_0+h]$ die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ existiert und stetig ist, während die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}(x)$ wenigstens im Innern dieses Intervalles vorhanden sein möge. Wenn dann*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_{n+1}$$

gesetzt wird (das sogenannre Restglied R_{n+1} also lediglich die Differenz zwischen dem Funktionswert $f(x_0+h)$ und der Summe der $(n+1)$ ersten Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung bedeutet), so gibt es immer wenigstens eine Zahl θ, für die $0 < \theta < 1$ und zugleich $R_{n+1} = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$ ist.

Es gibt also immer venigstens eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl θ, welche die Gleichung

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{(p)}(0)}{p!} + \frac{F^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!}$$

befriedigt. Es sei θ eine solche Zahl. Man erhält aus der vorstehenden Gleichung, in welcher man für $F(1)$, $F(0)$, $F'(0)$, ..., $F^{(p)}(0)$ und $F^{(p+1)}(\theta)$ die entsprechenden Werte einlegt, eine nach Potenzen und Produkten von Potenzen der Inkremente h und k fortschreitende Entwicklung des Funktionswertes $f(x_0+ht, y_0+kt)$, $t=1$.

$$p=0:$$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + kf_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

$$p=1:$$

$$\begin{aligned} &f_x(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf_x(x_0,y_0) + kf_y(x_0,y_0) \\ &+\tfrac{1}{2!}\left\{h^2 f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 2hkf_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k^2 f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right\} \end{aligned}$$

$$p=2:$$

$$\begin{aligned} &f_x(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf_x(x_0,y_0) + kf_y(x_0,y_0) \\ &+\tfrac{1}{2!}\left\{h^2 f_{xx}(x_0,y_0) + 2hkf_{xy}(x_0,y_0) + k^2 f_{yy}(x_0,y_0)\right\} \\ &+\tfrac{1}{3!}\left\{h^3 f_{xxx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 3h^2kf_{xxy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right. \\ &\left.+3hk^2 f_{xyy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k^3 f_{yyy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right\} \end{aligned}$$

Bei Anwendung einer leicht verständlicher Abkürzung kann man diesen Gleichungen die folgende symbolische Form geben

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0+\theta h, y_0+\theta k);$$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+\theta h, y_0+\theta k);$$

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = \quad & f(x_0,y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) \\ & +\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) \\ & +\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0+\theta h, y_0+\theta k); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = \quad & f(x_0,y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) \\ & +\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) \\ & +\ldots\ldots \\ & +\frac{1}{(p+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k). \end{aligned}$$

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich auch für Funktionen von n Veränderlichen anstellen.

4.7. **Minima und Maxima von Funktionen mit mehreren Veränderlichen.**

4.7.1. *Funktionen von zwei Veränderlichen.*

Erklärung 4.26. Eine Funktion mit zwei Veränderlichen $z = f(x, y)$ sei in einem Gebiet $\mathcal{D}$ definiert und es sei $Q_0(x_0, y_0)$ ein zu $\mathcal{D}$ gehöriger Häufungspunkt von $\mathcal{D}$ (In jeder Umgebung von Q_0 liegen unendlich viele Punkte $Q(x, y)$ des Gebietes $\mathcal{D}$. Es gibt also nach Wahl einer beliebigen positiven Zahl ε immer noch unendlich viele Punkte Q von $\mathcal{D}$, für die $|Q_0Q| < \varepsilon$ ist.) Gilt dann für alle Punkte Q von $\mathcal{D}$, die in einer gewissen Umgebung dieses Häufungspunktes Q_0 liegen, aber von Q_0 verschieden sind, die Ungleichung $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, so sagt man, die Funktion $f(x, y)$ habe an der Stelle $Q_0(x_0, y_0)$ ein *relatives Minimum im engeren Sinne auf* $\mathcal{D}$. Wird bei der letzten Beziehung auch das Gleichheitszeichen zugelassen, so spricht man von einem *Minimum im weiteren Sinne.*

Ganz entsprechend wird die Stelle eines *relativen Maximums auf* $\mathcal{D}$ auf Grund der Ungleichung $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ erklärt.

Satz 4.27. *Wenn eine Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Veränderlichen in einer gewissen Umgebung einer Stelle $Q_0(x_0, y_0)$ überall erklärt und an dieser Stelle selbst in bezug auf jede der Veränderlichen x, y partiell differenzierbar ist, so kann sie an dieser Stelle nur dann ein Extremum im engeren oder weiteren Sinne haben, wenn ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung da selbst sämtlich gleich Null sind.*

Beweis. Ist nämlich diese Bedingung nicht erfüllt und etwa $f_x(x_0, y_0) \neq 0$, so ist die nur von der einen Veränderlichen x abhängende Funktion $\varphi(x) := f(x, y_0)$ an der Stelle x_0 entweder im Wachsen oder im Abnehmen begriffen (da $f_x(x_0, y_0)$ entweder > 0 oder < 0 ist).Es gibt daher in jeder Nähe der Stelle Q_0 sowohl solche Stellen, wo die Funktion größer, als auch solche, wo sie kleiner ist als an der Stelle Q_0 selbst. □

Die hiermit gefundene **notwendige Bedingung** ist aber **noch nicht hinreichend**.

Satz 4.28. *Die Funktion $z = f(x, y)$ habe in einem Gebiete $\mathcal{D}$ der xy-Ebene stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, und an einer inneren Stelle (x_0, y_0) dieses Gebietes seien die partiellen Ableitungen erster Ordnung beide gleich Null. Dann ist es für das Eintreten eines Extremums im engeren Sinne hinreichend, daß die Ungleichung*

$$(*) \qquad f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0$$

besteht. Ist $(*)$ erfüllt, so hat die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) ein Minimum bzw. Maximum, je nachdem die Ableitung f_{xx} (und auch f_{yy}, da wegen $(*)$ f_{xx} und f_{yy} an der Stelle (x_0, y_0) sicher dasselbe Vorzeichen haben) an dieser Stelle > 0 bzw. < 0 ist.

Elemente des Beweises. Es seien h und k zwei Zahlen von so kleinen Beträgen, daß die den Punkt $Q_0(x_0, y_0)$ mit dem Punkt $Q(x, y)$, $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$, verbindende Strecke einschließlich ihres Endpunktes im Innern desjenigen Bereichs liegt, in welchem die gemachten Vorausetzungen erfüllt sind.

Aus dem Taylorschen Satz ergibt sich, daß

$$f_x(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

$$= \frac{1}{2!} \left\{ h^2 f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hk f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \right\},$$

wobei θ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bedeutet.

Ist $(*)$ erfüllt, so ist für hinreichend kleine h und k auch

$$f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - [f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)]^2 > 0.$$

Es folgt, daß $f_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)f_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$ dauernd von Null verschieden ist und f_{xx}, f_{yy} das gleiche Vorzeichen haben. Dann ist

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\, f_{xx}}\{(h\, f_{xx} + k\, f_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)k^2\}.$$

Es ist also die Differenz $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ von Null verschieden und vom gleichen Vorzeichen wie f_{xx}.

Den Ausdruck $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$ kann man als die Determinante der Matrix (sog. *Hesse-Matrix*)

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

an der Stelle (x_0, y_0) betrachten.

Satz 4.29. *Erfüllt eine Funktion $z = f(x,y)$ die Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes, jedoch mit dem Unterschied, daß $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 < 0$ ist, so hat sie an der Stelle (x_0, y_0) sicher weder ein Minimum, noch ein Maximum.*

Bemerkung 4.30. Erfüllt die Funktion $z = f(x,y)$ die Voraussetzungen des bewiesenen Satzes, jedoch $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 = 0$, so ist in diesem Fall keine Aussage möglich. Man muß höhere Ableitungen heranziehen.

Aufgabe 4.31. An welcher Stelle besitzt die in der ganzen xy-Ebene definierte und partiell differenzierbare Funktion $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by + c$, $a, b, c = konst$, einen Extremwert?

Aufgabe 4.32. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche und die Extremwerte (falls vorhanden) folgender Funktionen:

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}, \quad f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1},$$

$$f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2), \quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2), \quad f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y,$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad f(x,y) = -2x^3 + 9x^2 - 12x - y^2, \quad f(x,y) = x^2 + 6\,xy - y^2.$$

4.7.2. *Funktionen mit drei und mehr Veränderlichen.* In der Ökonomie treten fast nur Funktionen in Abhängigkeit von mehreren Variablen auf. Es gibt kaum eine ökonomische Größe, die nur von einer Inputvariablen abhängt. Wenn beispielsweise C den Wert des gesamten Konsums in einer Volkswirtschaft bezeichnet, so hängt dieser sicherlich von den Preisen p_i der verschiedenen Konsumgüter sowie den Einkommen y_i der an der Volkswirtschaft beteiligten Haushalte ab, also

$$C = C(p_1, ..., p_n; y_1, ..., y_m),$$

wenn es m Haushalte und n Konsumgüter gibt.

Untersuchungen haben gezeigt, daß sich der Wert des in England nachgefragten Biers durch die Funktion

$$b(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1,058\, x_1^{0,136}\, x_2^{-0,727}\, x_3^{0,914}\, x_4^{0,816}$$

beschreiben läßt, wobei x_1 Durchschnittseinkommen, x_2 Bierpreis, x_3 Preisindex (gemittelt über alle Waren), x_4 Stärke des Biers bezeichnet. Dieses nicht ganz ernst gemeinte Beispiel ist von einem Funktionstyp *Cobb-Douglas-Funktionen*, der in der Ökonomie häufig auftaucht, nämlich

$$F(x_1, ..., x_n) = A\, x_1^{a_1}\, x_2^{a_2} ... x_n^{a_n}.$$

Im Fall der eindimensionalen Differentialrechnung haben wir die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ als die Steigung der Tangente im Punkt $P_0(x_0, f(x_0))$ des Graphen der Funktion interpretieren können. Die Gleichung der Tangente ist

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Wir können so etwas ähnliches machen, wenn wir, im Fall $n = 2$, "Gerade" durch "Ebene" ersetzen. Die Gleichung

$$t(x, y) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

beschreibt die *Tangentialebene* in $P_0(x_0, y_0)$ an den Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Anders gesagt, es gelingt uns, die Funktion in der Nähe von P_0 durch eine lineare Funktion zu approximieren.

Das geht dann auch für größere n. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die lineare Funktion

$$t(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1^0, ..., x_n^0)(x_i - x_i^0) + f(x_1^0, ..., x_n^0)$$

ist die beste lineare Approximierung von f im Punkt $P_0(x_1^0, ..., x_n^0)$. Die Fläche, die durch t beschrieben wird, ist eine *Hyperebene*.

Eine Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ ist *monoton wachsend* (*monoton fallend*) in $\mathcal{D}$ genau dann, wenn $f_{x_i}(x_1, ..., x_n) \geq 0$ $(-f_{x_i}(x_1, ..., x_n) \geq 0)$, $i = 1, ..., n$, für alle $(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt.

In der mathematischen Physik hat man oft Veranlassung, zugleich mit der Funktion $F(x, y, z)$ der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z, die für ein räumliches Gebiet $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ erklärt ist und deren partielle Ableitungen daselbst überall vorhanden und stetig sind, auch denjenigen jeweils vom Punkt $P(x, y, z)$ ausgehende Vektor zu betrachten, der die partiellen Ableitungen F_x, F_y, F_z zu Koordinaten hat. Dieser Vektor heißt der *Gradient* der Funktion $F(x, y, z)$ und wird mit $\operatorname{grad} F = \overrightarrow{\mathfrak{F}}(F_x, F_y, F_z)$ bezeichnet. Der Gradient ist damit eine Verallgemeinerung der Ableitung für Funktionen von mehreren Variablen.

Der *Gradient* der für alle Punkte des räumlichen Gebietes $\mathcal{D}$ erklärten differenzierbaren Funktion $w = F(x, y, z)$ kann auch als derjenige Vektor erklärt werden, der an jedem Ort auf der durch diesen Ort gehenden Niveaufläche $w = konst$ senkrecht steht. Der Betrag des Gradienten ist ein Maß für die Änderung des Funktionswertes senkrecht zu den Niveauflächen.

Es sei $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ eine zweimal partiell differenzierbare Funktion von n Veränderlichen in dem Definitionsbereich $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt die Matrix

$$\mathcal{H}_f(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_2}(x_1, ..., x_n) & f_{x_1x_3}(x_1, ..., x_n) & ... & f_{x_1x_n}(x_1, ..., x_n) \\ f_{x_2x_1}(x_1, ..., x_n) & f_{x_2x_2}(x_1, ..., x_n) & ... & f_{x_2x_n}(x_1, ..., x_n) \\ ... & & & \\ f_{x_nx_1}(x_1, ..., x_n) & f_{x_nx_2}(x_1, ..., x_n) & ... & f_{x_nx_n}(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

eine *Hesse-Matrix* der Funktion f im Bereich $\mathcal{D}$.

Sind die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion stetig, dann ist die Hesse-Matrix nach dem Satz von Schwarz symmetrisch.

Im Fall von Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spielte das Votzeichen der zweiten Ableitung eine große Rolle. Für Matrizen muß man dies durch *Definitheit* ersetzen.

Erklärung 4.33. Es sei $\mathcal{A} = (a_{ij}),\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = 1, 2, ..., n$, eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix und es sei $X := (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Man sagt

- $\mathcal{A}$ ist *positiv semidefinit* $\Leftrightarrow$ $X^t\mathcal{A}X \geq 0$ für alle $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- $\mathcal{A}$ ist *positiv definit* $\Leftrightarrow$ $X^t\mathcal{A}X > 0$ für alle $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- $\mathcal{A}$ ist *negativ semidefinit* $\Leftrightarrow$ $X^t\mathcal{A}X \leq 0$ für alle $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- $\mathcal{A}$ ist *negativ definit* $\Leftrightarrow$ $X^t\mathcal{A}X < 0$ für alle $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Es ist gar nicht so einfach, aufgrund dieser Definition zu entscheiden, ob eine Matrix definit ist.

Das folgende Determinanten-Kriterium ist für uns sehr nützlich. Um es zu formulieren, benötigen wir den Begriff der *Hauptdeterminante*:

Es sei $\mathcal{A} = (a_{ij}),\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = 1, 2, ..., n$, eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix und

$$\mathfrak{H}_i := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} \\ ... & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

Dann heißt $\det(\mathfrak{H}_i)$ die i-te *Hauptdeterminante* der Matrix $\mathcal{A}$.

Nun haben wir das **Kriterium**:

- $\mathcal{A}$ ist *positiv semidefinit* $\Leftrightarrow$ $\det(\mathfrak{H}_i) \geq 0$ für alle $i = 1, 2, ..., n$
- $\mathcal{A}$ ist *positiv definit* $\Leftrightarrow$ $\det(\mathfrak{H}_i) > 0$ für alle $i = 1, 2, ..., n$
- $\mathcal{A}$ ist *negativ semidefinit* $\Leftrightarrow$ $(-1)^i \det(\mathfrak{H}_i) \geq 0$ für alle $i = 1, 2, ..., n$
- $\mathcal{A}$ ist *negativ definit* $\Leftrightarrow$ $(-1)^i \det(\mathfrak{H}_i) > 0$ für alle $i = 1, 2, ..., n$

In allen anderen Fällen heißt die Matrix $\mathcal{A}$ *indefinit.*

Unser Ziel ist es nun, notwendige Bedingungen für relative Extrema einer differenzierbaren Funktion zu finden.

Die Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ sei stetig partiell differenzierbar in $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ und es sei $\mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{D}$ eine Umgebung der Stelle $X_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathcal{D}$. Besitzt f in $X_0 \in \mathcal{D}^0$ ein relatives

Extremum, dann gilt

$$f_{x_1}(X_0) = f_{x_2}(X_0) = ... = f_{x_n}(X_0) = 0.$$

Der Punkt X_0 heißt auch ein *stationärer Punkt* von f.

Lokale Extrema von f sind also unter den Lösungen der n Gleichungen in n Unbekannten

$$f_{x_1}(X) = f_{x_2}(X) = ... = f_{x_n}(X) = 0, \quad X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}^0$$

zu finden, aber nicht jede Lösung ist wirklich ein lokales Extremum von f.

Wir brauchen das folgende **Kriterium**: *Die Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, sei zweimal stetig partiell differenzierbar. Es sei $X_0 \in \mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{D}$ ein stationärer Punkt von f.*

Ist die Hesse-Matrix $\mathcal{H}_f(X_0)$ negativ definit (bzw. positiv definit), so hat f in X_0 ein relatives Maximum (bzw. Minimum).

Ist $\mathcal{H}_f(X_0)$ indefinit, so besitzt f in X_0 mit Sicherheit kein relatives Extremum.

Ist $\mathcal{D}^0 \equiv \mathcal{D}$ und $\mathcal{H}_f(X)$ negativ definit (bzw. positiv definit) für alle $X \in \mathcal{D}$, so ist X_0 auch ein globales Maximum (bzw. globales Minimum) in $\mathcal{D}$.

Aufgabe 4.34. Berechnen Sie die Gradienten folgender Funktionen:

(a) $F(x,y,z) = e^{az}\cos ax - \cos ay, \quad a = konst;$

(b) $F(x,y,z) = \sin z - \sinh x \, \sinh y;$

(c) $F(x,y,z) = x^m + y^n + z^p, \quad m,n,p \in \mathbb{N};$

(d) $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz - yz - xy;$

(e) $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz;$

(f) $F(x,y,z) = xyz\, e^{x+y+z};$

(g) $F(x,y,z) = \arctan\left(x + y + z - \dfrac{xyz}{1 - xy - yz - xz}\right).$

Aufgabe 4.35. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = -x^4 + 2x^2 - 4y^2$.

(a) Was können Sie über Symmetrien der Funktion f sagen?

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie Lage und Art aller stationären Stellen von f.

(d) Ermitteln Sie die Taylorpolynome zweiten Grades von f zu den Entwicklungspunkten $(0,0)$ und $(1,0)$.

(e) Skizzieren Sie die Kurven $f(x,y) = 0$ und $f(x,y) = \frac{3}{4}$.

Aufgabe 4.36. Berechnen Sie den Gradienten, die Hesse-Matrix und die stationären Stellen (sofern möglich) von

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3, \quad f(x,y) = x\sin y + \cos(xy), \quad f(x,y) = x^y,$$

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}, \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2), \quad f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2+1}.$$

Aufgabe 4.37. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 8x^3 - 9x^2 + 24xy^2 - 6x + 2$.

(a) Ermitteln Sie alle ersten und zweiten Ableitungen von f.

(b) Untersuchen Sie f auf Extrema und bestimmen Sie deren Lage und Art.

(c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(1, 1)$ an.

4.7.3. *Extrema unter Nebenbedingungen.* Man suche von Extrema der Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ im beschränkten, abgeschlossenen Gebiet $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, ..., \quad g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

Lassen sich diese Bedingungen nach m der Variablen auflösen, etwa nach $x_1, x_2, ..., x_m$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n),\\ &x_2 = \varphi_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n),\\ &...\\ &x_m = \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n). \end{aligned}$$

Einsetzen in $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ liefert eine Funktion $F(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$, deren Extrema dann gesucht werden.

In vielen Fällen ist es nicht möglich, die Gleichungsrestriktionen aufzulösen. Die allgemeine Lösungsmethode in diesem Fall ist **Konstruktion einer Hilfsfunktion, die als freie Extremwertaufgabe behandelt wird**.

Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Die Lagrange-Multiplikatorenregel (nach Joseph-Louis Lagrange) ist in der mathematischen Optimierung eine Methode, Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen umzuformulieren. Ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen ist die Aufgabe, ein lokales Extremum einer Funktion in mehreren Veränderlichen mit einer oder mehreren Nebenbedingungen zu finden. Diese Methode führt eine neue unbekannte skalare Variable für jede Nebenbedingung ein, die Lagrange-Multiplikatoren, und definiert eine Linearkombination, die die Multiplikatoren als Koeffizienten einbindet. Das reduziert das Nebenbedingungsproblem auf ein Problem ohne Nebenbedingung. Damit kann es dann durch die gewöhnliche Gradientenmethode gelöst werden.

Ein bekanntes Beispiel kann man den Wetterkarten mit ihren Höhenlinien für Temperaturen und Druck entnehmen. Die Extrema unter der Nebenbedingung treten dort auf, wo sich beim Überlagern der Karten Linien berühren. Geometrisch übersetzen wir die Tangentenbedingung, indem wir sagen, daß die Gradienten von f und g beim Extremum parallele Vektoren sind.

Die Lagrange-Multiplikatorenregel

Gesucht werden die Extrema der Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ unter der Zusatzforderung, daß die Nebenbedingungen $g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ k = 1, ..., m$ erfüllt werden.

Wir bezeichnen $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ..., m$, definieren die *Lagrange-Funktion*

$$\mathcal{L}(X; \lambda) = \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) := f(x_1, ..., x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, g_k(x_1, ..., x_n),$$

wobei die $\lambda_k,\ k = 1, ..., m$, *Lagrange-Multiplikatoren* heißen, und lösen die freie Extremwertaufgabe fur $m + n$ Variable $\mathcal{L}(X, \lambda) \ \mapsto\ extr.$

Wir definieren die *Jacobi-Matrix* $\mathcal{J}_g$ der $g_k(X)$ an der Stelle $X_0 \in \mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{D}$

$$\mathcal{J}_g(X_0) := \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(X_0)\right)_{|k=1,...,m;j=1,...,n}.$$

Die Matrix $\mathcal{J}_g$ ist eine $(m \times n)$-Matrix.

Wir erhalten folgende **notwendige** Bedingung für Extrempunkte:

Seien $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $g_k : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $k = 1, ..., m$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, stetig partiell differenzierbare Funktionen. Die Funktion f habe an der Stelle $X_0 \in \mathcal{D}^0$ (dem Innern von $\mathcal{D}$) ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen $g_k(X_0) = 0$, $k = 1, ..., m$, und die Jacobi-Matrix $\mathcal{J}_g(X_0)$ habe den Rang m. Dann gibt es $\lambda^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$, so daß für $i = 1, ..., n$ gilt

$$\mathcal{L}_{x_i}(X_0, \lambda^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^0 \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(X_0) = 0.$$

Bemerkung 4.38. Beachte, daß die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k} = g_k$ gerade die Gleichungsrestriktionen sind. Wenn wir also die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ nach λ_k gleich Null setzen, ist das gleichbedeutend damit, g_k gleich Null zu setzen. Wir können also sagen, daß die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(X, \lambda)$ an der Stelle (X_0, λ^0) einen stationären Punkt hat.

Um potenzielle relative Extrema für f in der obigen Situation zu finden, werden also $m+n$ Gleichungen für die $m+n$ Unbekannten $x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m$ gelöst, um stationäre Punkte der Lagrange-Funktion zu finden.

Nun zu den **hinreichenden** Bedingungen: Ist (X_0, λ^0) ein stationärer Punkt der Lagrange-Funktion, dann betrachten wir die Hesse-Matrix von $\mathcal{L}$ nach den Variablen $x_1, ..., x_n$ für λ^0. Bezeichne diese Hesse-Matrix mit $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}}$

$$\widehat{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}}(X, \lambda^0) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{x_1x_2}(X, \lambda^0) & \mathcal{L}_{x_1x_3}(X, \lambda^0) & ... & \mathcal{L}_{x_1x_n}(X, \lambda^0) \\ \mathcal{L}_{x_2x_1}(X, \lambda^0) & \mathcal{L}_{x_2x_2}(X, \lambda^0) & ... & \mathcal{L}_{x_2x_n}(X, \lambda^0) \\ ... & & & \\ \mathcal{L}_{x_nx_1}(X, \lambda^0) & \mathcal{L}_{x_nx_2}(X, \lambda^0) & ... & \mathcal{L}_{x_nx_n}(X, \lambda^0) \end{pmatrix}.$$

Hinreichende Bedingung

Es seien $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $g_k : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, $k = 1, ..., m$, zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen. Die zugehörige Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(X; \lambda)$ habe an der Stelle $(X_0; \lambda^0)$, $X_0 \in \mathcal{D}^0$, einen stationären Punkt. Ist $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}}(X_0, \lambda^0)$ positiv definit (negativ definit), so ist X_0 ein relatives Minimum (Maximum) unter den Nebenbedingungen $g_k(X_0) = 0$ für $k = 1, ..., m$. Ist $\widehat{\mathcal{H}}_{\mathcal{L}}(X, \lambda^0)$ sogar positiv definit (negativ definit) für alle $X \in \mathcal{D}$, so ist X_0 ein globales Minimum (Maximum) unter den Nebenbedingungen $g_k(X_0) = 0$ für $k = 1, ..., m$.

Beispiel 4.39. Wir wollen Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter den Restriktionen $g_1(x, y, z) = -x - 2y - z + 1 = 0$, $g_2(x, y, z) = -2x + y + 3z + 4 = 0$ bestimmen. Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ ist

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(-x - 2y - z + 1) + \lambda_2(-2x + y + 3z + 4).$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\mathcal{L}_x = 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2, \quad \mathcal{L}_y = 2y - 2\lambda_1 + \lambda_2, \quad \mathcal{L}_z = 2z - \lambda_1 + 3\lambda_2,$$

$$\mathcal{L}_{\lambda_1} = -x - 2y - z + 1, \quad \mathcal{L}_{\lambda_2} = -2x + y + 3z + 4.$$

Alle diese Ableitungen sollen gleich Null sein. Die ersten beiden Gleichungen zeigen dann

$$\lambda_1 = \frac{2}{5}\,x + \frac{4}{5}\,y, \quad \lambda_2 = \frac{4}{5}\,x - \frac{2}{5}\,y.$$

Wenn wir dies in die dritte Gleichung einsetzen, bekommen wir $x-y+z = 0$. Diese Gleichung zusammen mit den letzten beiden Gleichungen liefert das inhomogene Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{array} \right.$$

mit der Lösung $x_0 = \frac{16}{15}$, $y_0 = \frac{1}{3}$, $z_0 = -\frac{11}{15}$. Die Multiplikatoren sind $\lambda_1 = \frac{52}{75}$, $\lambda_2 = \frac{54}{75}$. Die zugehörige Hesse-Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

also positiv definit. Deshalb haben wir an der Stelle (x_0, y_0, z_0) ein Minimum.

Lagrange-Multiplikatoren haben eine wichtige ökonomische Interpretation. Wir erläutern dies an einem Beispiel mit nur einer Gleichungsrestriktion.

Unser Ziel ist $f(x_1, ..., x_n) \mapsto max$ unter der Restriktion $g(x_1, ..., x_n) = c$. Angenommen, X^* löst dieses Problem. Dann ist X^* in der Regel eine Funktion abhängig von c, z.B. $X^*(c)$. Auch der zugehörige Lagrange-Multiplikator λ ist eine Funktion vin c, also $\lambda(c)$. Das Optimum von f ist $f(X^*(c)) = f^*(c)$, also eine Funktion abhängig von c. Unter geeigneten Annahmen kann man zeigen

$$\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda(c).$$

Das heißt, der Lagrange-Multiplikator ist eim Maß, wie sich das Maximum $f^*(c)$ relativ zu c ändert. Bezeichnet f etwa den Profit, die Restriktion $g(X) = c$ die Verfügbarkeit einer knappen Ressource, dann ist $\lambda(c)$ ein Maß dafür, wie sich der Profit relativ zu einer Änderung der knappen Ressource ändert.

Beispiel 4.40. Die Firma Audi benutzt als Input K (Kapital; damit sind insbesondere Maschinen gemeint) und W (Arbeit), um ein Auto zu produzieren. Um ein Auto zu produzieren müssen insgesamt

$$Q = F(K, W) = K^{\frac{1}{2}}\,W^{\frac{1}{4}}$$

Produktionsmittel eingesetzt werden, d.h. die Firma hat eine gewisse Freiheit, wieviel Kapital und wieviel Arbeit sie einsetzt. Kapital ist hier wertvoller als Arbeit: Wenn Sie den Kapitaleinsatz verdoppeln, können Sie den Arbeitseinsatz um den Faktor 4 verringern. Kapital und Arbeit konkurieren: Sowohl das Kapital kostet Geld (Zinsen, Refinanzierung) als auch Arbeit (was jedem klar ist). Die Kosten fürs Kapital seien r, die für Arbeit w. Wir erhalten das Optimierungsproblem

$$r\,K + w\,W \mapsto min$$

unter der Restriktion

$$Q = K^{\frac{1}{2}}\,W^{\frac{1}{4}}.$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L}(K, W, \lambda) = r\,K + w\,W - \lambda(K^{\frac{1}{2}}\,W^{\frac{1}{4}} - Q).$$

Partielle Ableitungen nach K und W sind

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r - \frac{1}{2}\lambda K^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{4}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = w - \frac{1}{4}\lambda K^{\frac{1}{2}} W^{-\frac{3}{4}}.$$

Beide partiellen Ableitungen sollen gleich Null sein, also

$$r = \frac{1}{2}\lambda K^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{4}}, \quad w = \frac{1}{4}\lambda K^{\frac{1}{2}} W^{-\frac{3}{4}}.$$

Auflösen nach λ gibt

$$\lambda = 2rK^{\frac{1}{2}} W^{-\frac{1}{4}} = 4wK^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{3}{4}}$$

also $2rK = 4wW$ und $W = \dfrac{rK}{2w}$.

Wir setzen dies in die Restriktion $Q = K^{\frac{1}{2}}\, W^{\frac{1}{4}}$ ein und erhalten

$$K^{\frac{3}{4}} = Q\sqrt[4]{\frac{2w}{r}}.$$

Einfache Umformungen liefern als Lösung des Lagrange-Problems

$$K^* = 2^{1/3} r^{-1/3} w^{1/3} Q^{4/3}, \quad W^* = 2^{-2/3} r^{2/3} w^{-2/3} Q^{4/3},$$

$$\lambda^* = 2^{4/3} r^{2/3} w^{1/3} Q^{1/3}, \quad C^* = 3.2^{-2/3} r^{2/3} w^{1/3} Q^{4/3}.$$

Die Matrix

$$\widehat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda W^{1/4}}{4K^{3/2}} & \frac{-\lambda}{8K^{1/2}W^{3/4}} \\ \frac{-\lambda}{8K^{1/2}W^{3/4}} & \frac{3\lambda K^{1/2}}{16W^{3/4}} \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, da

$$\det(\widehat{\mathcal{H}}) = \frac{\lambda^2}{32K\mathcal{L}^{3/2}}.$$

Wir haben also ein Minimum und es gilt $\dfrac{dC^*}{dQ} = \lambda^*$.

Aufgabe 4.41. (1) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

(2) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x + 2y + z$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0$.

(3) Gesucht ist das Minimum von $z = xy + 6 - 3x - 2y$ unter der Nebenbedingung $y + 2x = 2$.

(4) Bestimen Sie die Extrema der Funktion $z = x\,y$ unter der Nebenbedungung

$$(a) \quad x + y = 6; \qquad (b) \quad x^2 + y^2 = 2a^2,\ a = konst \neq 0.$$

(5) Bestimmen Sie die Extrema der Funktionen
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ unter der Restriktion $x + 4y = 2$;
   (b) $f(x,y) = 4x - y$ unter der Restriktion $x^2 - y^2 = 15$;
   (c) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ unter der Restriktion $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4.8. **Volumen- und Flächeninhaltberechnung.** Die Maßtheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das die elementargeometrischen Begriffe Streckenlänge, Flächeninhalt, Volumen verallgemeinert und es dadurch ermöglicht, auch komplizierteren Mengen ein Maß zuzuordnen. Sie bildet das Fundament der modernen Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Als Maß versteht man in der Maßtheorie eine Zuordnung von reellen Zahlen zu einem Teilmengensystem über einer Grundmenge. Die Zuordnung und das Teilmengensystem sollen dabei bestimmte Eigenschaften besitzen. In der Praxis ist häufig nur eine partielle Zuordnung von vornherein bekannt. Zum Beispiel ordnet man in der Ebene Rechtecken das Produkt ihrer Kantenlängen als Flächeninhalt zu. Die Maßtheorie untersucht nun einerseits, ob sich in konsistenter Weise und eindeutig diese Zuordnung auf größere Teilmengensysteme erweitern lässt, und andererseits, ob dabei zusätzliche gewünschte Eigenschaften erhalten bleiben. Im Beispiel der Ebene möchte man natürlich auch Kreisscheiben einen sinnvollen Flächeninhalt zuordnen und wird gleichzeitig neben den Eigenschaften, die man von Maßen ganz allgemein verlangt, auch Translationsinvarianz fordern, das heißt, der Inhalt einer Teilmenge der Ebene ist unabhängig von ihrer Position.

Eine Teilmenge einer Ebene heißt dann ganz allgemein **meßbar**, wenn ihr ein Maß zugeordnet werden kann.

Den Integralbegriff kann man auf den Fall verallgemeinern, daß die Trägermenge $\mathcal{B}$, auf der der Integrand operiert, nicht ein Teilintervall der Zahlengerade, sondern ein meßbares Teilgebiet der euklidischen Ebene ist. Mehrdimensionale Integrale über ein Gebiet $\mathcal{B}$ darf man berechnen, indem man sie in einer Reihenfolge in Integrale über die einzelnen Koordinaten aufspaltet, die nacheinander abzuarbeiten sind.

4.8.1. *Volumen eines Körpers.* Das Volumen ist der räumliche Inhalt eines mathematischen Körpers.

Satz 4.42. *Es sei $z = f(x, y)$ eine im Bereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ stetige Funktion. Das doppelte Integral $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\,dx\,dy$ hat folgende Eigenschaft:*

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)\,dx\,dy = \begin{cases} \ [\text{Volumen zwischen } xy-\text{Ebene und Fläche}], \text{ für } f(x, y) > 0, \\ -\ [\text{Volumen zwischen } xy-\text{Ebene und Fläche}], \text{ für } f(x, y) < 0]. \end{cases}$$

Aufgabe 4.43. Berechnen Sie das Volumen des von den folgenden Flächen beschränkten Körpers:

(1) $y = x^2,\ y = 1,\ x + y + z = 4,\ z = 0;$

(2) $z = x^2 + y^2,\ y = 2,\ y = -2,\ z = 0;$

(3) $z = 4 - x^2 - y^2,\ 2z = 2 + x^2 + y^2;$

(4) $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z = 1,\ z = 2.$

(5) $x - y - z = 0,\ x^2 + y^2 = 1,\ z > 0,\ y > 0,\ z = 0.$

In einer Ebene mit einem System rechtwinkliger Koordinaten u, v sei ein beschränkter, meßbarer Bereich $\mathcal{B}$ gegeben, und für einen größeren, den Bereich $\mathcal{B}$ und seine Randpunkte ganz im Innern enthaltende Bereich $\mathcal{B}_1$ seien die Funktionen $\varphi(u, v),\ \psi(u, v),\ \chi(u, v)$ so erklärt, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\varphi_u(u, v),\ \ \psi_u(u, v),\ \ \chi_u(u, v);$

$\varphi_v(u,v)$, $\psi_v(u,v)$, $\chi_v(u,v)$ dieser Funktionen im Innern von $\mathcal{B}_1$ überall vorhanden und stetig sind und daß die Determinante

$$(*) \qquad D(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi(u,v) & \psi(u,v) & \chi(u,v) \\ \varphi_u(u,v) & \psi_u(u,v) & \chi_u(u,v) \\ \varphi_v(u,v) & \psi_v(u,v) & \chi_v(u,v) \end{vmatrix}$$

im Innern von $\mathcal{B}$ durchweg positiv ist. Dann kann man sich, nach Angabe eines Systems rechtwinkliger räumlicher Koordinaten x, y, z und nach Einschränkung der Stelle (u,v) auf den Bereich $\mathcal{B}$, ein diesem Bereich entsprechendes Flächenstück $\mathcal{F}$ durch die drei Gleichungen

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v),$$

oder kurz $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$, gegeben denken. Die Determinante $(*)$ stellt dann das Spatprodukt $(\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{r}_u\,\overrightarrow{r}_v)$ dar.

Zur Vermeidung unnötiger Weitläufigkeiten möge vorausgesetzt werden, daß je zwei verschiedenen inneren Punkten von $\mathcal{B}$ auch verschiedene Punkte von $\mathcal{F}$ entsprechen und daß jeder vom Anfang O ausgehende Halbstrahl das Flächenstück $\mathcal{F}$ höchstens in einem von O verschiedenen Punkt trifft. Man nennt $\mathcal{F}$ dann *sternartig* bezüglich O.

Man kann einen endlichen räumlichen Bereich (Körper) $\mathcal{R}$ durch die Festsetzung abgrenzen, daß er alle diejenigen, aber auch nur diejenigen Punkte enthalten soll, die auf den vom Koordinatenanfang O nach den einzelnen Punkten des Flächenstücks $\mathcal{F}$ führenden Strecken liegen.

Erklärung 4.44. Bei den oben gemachten Annahmen kommt dem Körper $\mathcal{R}$ ein Volumen $\mathcal{V}$ zu, und dieses wird durch die Gleichung

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\int_{\mathcal{B}} D(u,v)\,dudv$$

gegeben.

Eine solche Volumenberechnung kann passend als *eine Volumenberechnung durch Zerlegung in Pyramiden oder in Kegel* bezeichnet werden.

Dieses Volumen ist nur von der geometrischen Beschaffenheit des Flächenstückes $\mathcal{F}$ abhängig, aber nicht davon, durch welche besondere Parameterdarstellung man sich das Flächenstück gegeben denkt oder auf welches Koordinatensystem seine Punkte bezogen sind. Man sagt, *der erklärte Volumeninhalt sei invariant gegenüber einer Änderung der Parameter und einer Koordinatentransformation.* Er sei *parameter- und bewegungsinvariant.*

Beispiel 4.45. Man kann sich das Ellipsoid durch die Gleichungen

$$x = a\cos\lambda\cos\mu, \quad y = b\cos\lambda\sin\mu, \quad z = c\sin\lambda,$$

wobei $0 \le \mu < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}$ das entsprechende Gebiet $\mathcal{B}$ ist, dargestellt denken und erhält $D(\lambda,\mu) = abc\cos\lambda$,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,abc\int_{\mathcal{B}} D(\lambda,\mu)\,d\mu\,d\lambda = \frac{1}{3}\,abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\cos\lambda\,d\mu\right)d\lambda = \frac{4}{3}\,\pi abc.$$

4.8.2. *Inhalt eines räumlichen Flächenstücks.* Der Flächeninhalt ist in der Geometrie ein Maß für die Größe einer Fläche. Eine Fläche ist ein zweidimensionaler, also flacher Gegenstand (Figur ohne Rauminhalt) der eben oder gekrümmt sein kann. Sie kann einen dreidimensionalen Körper begrenzen aber nicht füllen.

Wir betrachten in der Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems u, v einen abgeschlossenen, meßbaren Bereich $\mathcal{B}$. Für einen größeren, den Bereich $\mathcal{B}$ und seine Randpunkte ganz im Innern enthaltende Bereich $\mathcal{B}_1$ seien drei Funktionen $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ von solcher Beschaffenheit erklärt, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung φ_u, ψ_u, χ_u, φ_v, ψ_v, χ_v dieser Funktionen im Innern von $\mathcal{B}_1$ überall vorhanden und stetig sind.

Ferner sei nach Annahme eines Systems rechtwinkliger Koordinaten x, y, z und nach Einschränkung der Stelle (u, v) auf den Bereich $\mathcal{B}$ ein diesem Bereich entsprechendes Flächenstück $\mathcal{F}$ durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v),$$

oder kurz $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$, gegeben. Es sei $\mathcal{F}$ ein glattes Flächenstück, d.i. $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v \neq \overrightarrow{0}$. Weiter werde vorausgesetzt, daß auch umgekehrt jedem Punkt von $\mathcal{F}$ nur ein Punkt von $\mathcal{B}$ entspreche.

Erklärung 4.46. Ist ein räumliches Flächenstück $\mathcal{F}$ in der beschriebenen Weise gegeben, so sagt man, daß es *meßbar* sei, daß ihm ein bestimmter (*Oberflächen-*) *Inhalt* $\mathcal{J}$ zukommt und daß dieser Inhalt durch das Integral

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{B}} |\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| \, du \, dv$$

gemessen wird.

Der Inhalt $\mathcal{J}$ des Flächenstücks $\mathcal{F}$ kann auch durch die Gleichung

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{B}} \sqrt{\overrightarrow{r}_u^{\,2} \overrightarrow{r}_v^{\,2} - (\overrightarrow{r}_u \overrightarrow{r}_v)^2} \, du \, dv$$

dargestellt werden.

Dieser Flächeninhalt ist nur von der geometrischen Beschaffenheit des Flächenstückes $\mathcal{F}$ abhängig, aber nicht davon, durch welche besondere Parameterdarstellung man sich das Flächenstück gegeben denkt oder auf welches Koordinatensystem seine Punkte bezogen sind. Man sagt, *der erklärte Inhalt sei invariant gegenüber einer Änderung der Parameter und einer Koordinatentransformation.* Er sei *parameter- und bewegungsinvariant.*

Beispiel 4.47. Es sei

$$\mathcal{F}: \; x = r\cos\lambda\cos\mu, \quad y = r\cos\lambda\sin\mu, \quad z = r\sin\lambda,$$

und $0 \leq \mu \leq \frac{\pi}{2}$, $\mu \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$ das entsprechende Gebiet $\mathcal{B}$. Dann ist

$$x_\lambda = -r\sin\lambda\cos\mu, \qquad y_\lambda = -r\sin\lambda\sin\mu, \qquad z_\lambda = r\cos\lambda;$$
$$x_\mu = -r\cos\lambda\sin\mu, \qquad y_\mu = r\cos\lambda\cos\mu, \qquad z_\mu = 0.$$

Die Länge des Vektors $\overrightarrow{r}_\lambda \times \overrightarrow{r}_\mu$ ist $|\overrightarrow{r}_\lambda \times \overrightarrow{r}_\mu| = r^2\cos\lambda$, und der Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ entsprechend

$$\mathcal{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_\mu^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\lambda \, d\lambda\right] d\mu = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\mu) \, d\mu = \frac{\pi}{2} r^2 - r^2 = (\frac{\pi}{2} - 1) r^2.$$

Beispiel 4.48. Es sei

$$\mathcal{F}:\ x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = h\phi,\ h = const,$$

und

$$\mathcal{B}:\ 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le \phi \le \alpha,\ r = const,\ \alpha = const.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} x_\rho &= \cos\phi, & y_\rho &= \sin\phi, & z_\rho &= 0,\\ x_\phi &= -\rho\sin\phi, & y_\phi &= \rho\cos\phi, & z_\phi &= h. \end{aligned}$$

Die Länge des Vektors $\overrightarrow{r}_\rho \times \overrightarrow{r}_\phi$ ist $|\overrightarrow{r}_\rho \times \overrightarrow{r}_\phi| = \sqrt{\rho^2 + h^2}$, und der Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ entsprechend

$$\mathcal{J} = \int_0^r \left[\int_0^\alpha \sqrt{\rho^2 + h^2}\, d\phi\right] d\rho = \alpha \int_0^r \sqrt{\rho^2 + h^2}\, d\rho = ?$$

Aufgabe 4.49. Lösen Sie folgende Integrale:

(1) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\};$

(2) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x+y)\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Gebiet mit den Schranken $x = 1,\ y = 0,\ y = x;$

(3) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Gebiet mit den Schranken $x = 1,\ y = 0,\ y = x;$

(4) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x+y)\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Gebiet mit den Schranken $x = 2,\ y^2 = x;$

(5) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x-y)\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Gebiet mit den Schranken $x = 1,\ y^2 = 2x;$

(6) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (3x^2 - 2xy + y)\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Gebiet mit den Schranken $x = 0,\ y = 2,\ y^2 = x;$

(7) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Gebiet mit den Schranken $x = 0,\ x + y = 2,\ y = x^3;$

(8) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (2x-y)\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Gebiet mit den Schranken $x + y = 1,\ x + y = 2,$ $2x - y = 1,\ 2x - y = 3;$

(9) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x+y)^2\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Dreieck mit den Ecken $(0,0),\ (0,1),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$

(10) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} y\ln x\, dx\, dy,$ $\mathcal{D}$ ist das Gebiet mit den Schranken $xy = 1,\ y = \sqrt{x},\ x = 2;$

(11) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x-y)\, dx\, dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 2\};$

(12) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ 0 \le y \le x \le 1\};$

(13) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} e^x\, dx\, dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ 1 \le e^x \le y \le 2\};$

(14) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \cos(x+y)\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ x+y \le \pi,\ x \ge 0,\ y \ge 0\};$

(15) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x^2y^3\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ 0 \le y \le 1-x^2\};$

(16) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} xy\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ xy \ge 1,\ x+y \ge \frac{5}{2}\};$

(17) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x^2\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ x+2 \ge 2y,\ 2x+2y \ge 3,\ x \le 2\};$

(18) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} \sqrt{x+y}\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1\};$

(19) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x^2\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ |x|+|y| \le 1\};$

(20) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} x^2(y-x)\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ x \ge y^2,\ y \ge x^2\};$

(21) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} xe^{-y}\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ x \ge y^2,\ x^2+y^2 \le 2y\};$

(22) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} ye^{-x}\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ x^2 \le y,\ x^2+y^2 \le 2x\};$

(23) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (x+2y)\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1\};$

(24) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{D}} (|x|+|y|)\,dx\,dy, \quad \mathcal{D} = \{(x,y):\ |x|+|y| \le \sqrt{2}\}.$

5. Implizite (unentwickelte) Funktionen

Für viele Anwendungen ist es von grundlegender Bedeutung zu wissen oder entscheiden zu können, wann die durch eine Gleichung der Form $F(x,y)=0$ dargestellte Punktmenge im ganzen oder in eineige Teilen wieder das Bild einer bestimmten Funktion $y=f(x)$ (bzw. $x=g(y)$) ist, wann man sich also die Gleichung $F(x,y)=0$ nach y (bzw. nach x) aufgelöst denken darf bzw. in welchem Umfang dies erlaubt ist.

Ist $F(x,y)$ eine Funktion der beiden Veränderlichen x,y, die in einem bestimmten Gebiet $\mathcal{G}$ der xy-Ebene definiert ist und ist $P_0(x_0,y_0)$ eine in $\mathcal{G}$ liegende Stelle, an der die Funktion $F(x,y)$ den Wert Null hat, so kann sowohl der Fall vorkommen, daß in einer gewissen Umgebung der Stelle P_0 keine andere Stelle liegt, an welcher die Funktion gleich Null ist (z.B. $F(x,y)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$), als auch der Fall, daß sich in jeder noch so engen Umgebung der Stelle P_0 andere Stellen finden, an denen die Funktion ebenfalls gleich Null ist (z.B. $F(x,y)=x^2+y^2-(x_0^2+y_0^2)$).

Satz 5.1. *Es sei $F(x,y)$ eine in einem gewissen Gebiet $\mathcal{G}$ der xy-Ebene definierte und dort stetige Funktion, und es gäbe eine Stelle $P_0(x_0,y_0)$ in $\mathcal{G}$, für die die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $F(x_0,y_0)=0$;

(b) *Es gibt eine Umgebung der Stelle P_0, in welcher eine der beiden partiellen Ableitungen $F_x(x, y)$ und $F_y(x, y)$ existiert und stetig ist;*

(c) *Diese selbe partielle Ableitung ist an der Stelle P_0 von Null verschieden.*

Dann läßt sich, wenn die Voraussetzungen (b) und (c) etwa für F_y erfüllt sind, nach Wahl einer beliebigen nicht zu großen positiven Zahl ε eine andere positive Zahl δ so angeben, daß in der rechteckigen Umgebung

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon \tag{$*$}$$

der Stelle P_0 immer noch unendlich viele weitere Stellen $P(x, y)$ liegen, die die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{$**$}$$

erfüllen. Und zwar gehört zu jedem x, das die erste der Ungleichungen $(*)$ erfüllt, immer genau ein Wert von y, der der zweiten dieser Ungleichungen genügt und der mit dem x zusammen die Gleichung $(**)$ erfüllt.

Beweis. Da $F_y(x, y)$ in einer Umgebung der Stelle $P_0(x_0, y_0)$ existiert und stetig ist und an dieser Stelle selbst von Null verschieden ist, so läßt sich eine Umgebung von P_0 angeben, in der $F_y(x, y)$ überall dasselbe Vorzeichen hat wie an der Stelle P_0. Von diesem Vorzeichen dürfen wir annehmen, daß es das positive ist, da man andernfalls nur die Gleichung $-F(x, y) = 0$ zu betrachten braucht. Auch dürfen wir uns die eben genannte Umgebung von P_0 quadratisch denken.

Es sei demgemäß die positive Zahl d so gewählt, daß das Quadrat

$$x_0 - d < x < x_0 + d, \quad y_0 - d < y < y_0 + d \tag{i}$$

der in Voraussetzung (b) genannten Umgebung von P_0 angehört und daß in ihm überall

$$F_y(x, y) > 0 \tag{ii}$$

ist.

Dann hat die Funktion $F(x_0, y)$ der einen Veränderlichen y in $y_0 - d < y < y_0 + d$ nach (ii) überall eine positive Ableitung, ist dort also im engeren Sinne monoton wachsend.

Ist also ε eine beliebige positive Zahl kleiner d, so ist, weil $F(x_0, y_0) = 0$ ist, $F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$ und $F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0$.

Wir betrachten nun die beiden Funktionen $F(x, y_0 - \varepsilon)$ und $F(x, y_0 + \varepsilon)$ der einen Veränderlichen x. Sie sind beide in $x = x_0$ stetig, die erste dort negativ, die zweite positiv. Man kann daher eine positive Zahl $\delta < d$ so bestimmen, daß beide Funktionen in $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ überall dasselbe Vorzeichen haben wie an der Stelle x_0. Dann ist also in $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$ und $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$.

Wählt man daher einen beliebigen Wert x_1 von x, der der Bedingung $x_0 - \delta < x_1 < x_0 + \delta$ genügt, so ist die Funktion $F(x_1, y)$ von y in dem abgeschlossenen Intervall $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ stetig. Da sie aber am unteren Ende des Intervalls negativ, am oberen positiv ist, so muß es nach dem Bolzanoschen Zwischenwertsatz im Innern dieses Intervalls mindestens einen Wert y_1 von y geben, für den $F(x_1, y_1) = 0$ ist.

Es kann aber auch nur einen solchen Wert geben; denn die Funktion $F(x_1, y)$ von y hat in $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ überall eine positive Ableitung, ist also im engeren Sinn monoton wachsend. Sie kann daher nicht an zwei verschiedenen Stellen denselben Wert haben.

Unter den gemachten Annahmen kann man daher eine Funktion $y = f(x)$ von x für das Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dadurch definieren, daß man festsetzt, es solle $f(x)$ für jedes x dieses

Intervalls gleich der im vorangehenden eindeutig gekennzeichneten Lösung y der Gleichung $(**)$ sein. □

Erklärung 5.2. Wird eine Funktion $y = f(x)$ für ein bestimmtes Intervall auf Grund des Satzes 5.1 durch eine Gleichung der Form $F(x, y) = 0$ definiert, so nennt man sie eine *unentwickelte* oder *implizite* Funktion und sagt auch, sie sei *implizit* durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ definiert.

Satz 5.3. *Ist eine Funktion $y = f(x)$ auf Grund des Satzes 5.1 für das Intervall $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ implizit durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ definiert, so ist sie in diesem Intervall stetig und, falls die Voraussetzung (b) im vorigen Satz für beide partiellen Ableitungen $F_x(x, y)$ und $F_y(x, y)$ erfüllt ist, ist sie dort auch differenzierbar, und ihre Ableitung wird durch die Gleichung*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

gegeben, wenn man sich in dem zuletzt stehenden Quotienten für das Argument y die Funktion $f(x)$ eingesetzt denkt. Diese Ableitung ist daher ihrerseits stetig in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Beweis. Wir gehen von der Funktion $z = F(x, y)$ der Veränderlichen x, y aus und bilden ihr totales Differential

$$dz = F_x\, dx + F_y\, dy.$$

Setzen wir jetzt $z = F(x, y) = 0$, so folgt mit $dz = 0$

$$F_x\, dx + F_y\, dy = 0,$$

und nach Division durch $dx \neq 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Löst man nach y' auf, so wird $y' = -\dfrac{F_x}{F_y}$, wobei zu beachten ist, daß hierbei $F_y \neq 0$ sein muß, andernfalls die Ableitung y' nicht existiert. □

Satz 5.4. *Auf Grund des Satzes 5.1 sei durch eine Gleichung der Form $F(x, y) = 0$ eine Funktion $y = f(x)$ implizit definiert. Ist dann die Funktion $F(x, y)$ in einer Umgebung des Punktes $P_0(x_0, y_0)$ so beschaffen, daß alle ihre partiellen Ableitungen bis zur p-ten Ordnung vorhanden und stetig sind, so ist, wofern nur wieder $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ vorausgesetzt wird, die Funktion $y = f(x)$ in dem Intervall $|x - x_0| < \delta,\ \delta > 0$ ebenfalls p-mal differenzierbar.*

Um die zweite Ableitung y'' der Funktion $y = f(x)$ zu erhalten, gehen wir von

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} =: \varphi(x, y) \quad \text{und} \quad dy' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dy$$

aus, dividieren die letzte Gleichung beiderseits durch $dx \neq 0$ und ersetzen $\varphi(x, y)$ wieder durch $-\dfrac{F_x}{F_y}$. Es gilt also

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) y' = -\frac{1}{F_y^2}\begin{vmatrix} F_{xx} & F_x \\ F_{xy} & F_y \end{vmatrix} + \frac{1}{F_y^2}\begin{vmatrix} F_{xy} & F_x \\ F_{yy} & F_y \end{vmatrix}\frac{F_x}{F_y},$$

oder mit symmetrischer Determinante geschrieben

$$y'' = \frac{1}{F_y^3}\begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{xy} & F_{yy} \end{vmatrix} = -\frac{1}{F_y^3}\left(F_x^2 F_{yy} - 2F_xF_yF_{xy} + F_y^2 F_{xx}\right).$$

Man beachte, daß y' und y'' als Funktionen von x und y erscheinen, d.h. $y' = y'(x,y)$, $y'' = y''(x,y)$, indes nur für solche Wertepaare (x_0, y_0) erklärt sind, welche die gegebene implizite Funktion $F(x,y)$ identisch erfüllen, für die also $F(x_0,y_0) \equiv 0$ gilt.

Beispiel 5.5. (1) Man bestimme die ersten beiden Ableitungen der impliziten Funktion

$$F(x,y) = x\sin y + y - 3 = 0.$$

Lösung. $F_x = \sin y$, $F_y = x\cos y + 1$; $F_{xx} = 0$, $F_{xy} = \cos y$, $F_{yy} = -x\sin y$. Dann sind

$$y' = -\frac{\sin y}{1 + x\cos y}, \quad y'' = \frac{1}{(x\cos y)^3}(x\sin^3 y + 2x\sin y\cos^2 y + \sin(2y)).$$

(2) Die allgemeine algebraische Funktion zweiten Grades

$$F(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0$$

ist implizit zu differenzieren.

Lösung. $F_x + y'F_y = (2Ax + By + D) + y'(Bx + 2Cy + E) = 0 \Rightarrow$

$$y' = -\frac{2Ax + By + D}{Bx + 2Cy + E}.$$

Auf diese Weise bestätigt man sofort

$$\text{Ellipse}: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y};$$

$$\text{Hyperbel}: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{b^2x}{a^2y};$$

$$\text{Parabel}: \quad y^2 = 2px \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{p}{y}.$$

Aufgabe 5.6. Bestimmen Sie die Ableitung y' der Funktion $F(x,y) = \ln y - \sqrt[3]{\cos x} = 0$ sowohl in der impliziten Form, als auch nach Herstellung der expliziten Form.

Aufgabe 5.7. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der durch $F(x,y) = e^y \sin x + e^x \cos y = 0$ bestimmten Funktion im Punkt $P(0, \frac{\pi}{2})$?

Aufgabe 5.8. Welchen Winkel bildet die Tangente an den Graphen der durch $F(x,y) = 2\arctan(xy) + y - 2x = 0$ bestimmten Funktion an der Stelle $x = 1$ mit der x-Achse?

Aufgabe 5.9. Wie lautet die zweite Ableitung y'' der durch $F(x,y) = xy - x^4 + y^2 = 0$ bestimmten Funktion?

Aufgabe 5.10. Welchen Wert hat $y''(1,1)$ für die implizite Funktion
$F(x,y) = y\ln x - x\ln y = 0$?

Aufgabe 5.11. Sei $F(x,y,z)=0$ die implizite Form einer Funktion $z=f(x,y)$. Um die partiellen Ableitungen $f_x,\ f_y$, für den Fall $F(x,y,z)=0$ ist nicht formal nach z auflösbar, berechnen zu können, bilden wir das totale Differential dF gemäß

$$dF = F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz = F_x\,dx+F_y\,dy+F_z(f_x\,dx+f_y\,dy) = (F_x+F_z\,f_x)\,dx+(F_y+F_z\,f_y)\,dy,$$

woraus, wegen $F(x,y,z)=0$ und $dF=0$, folgt

$$F_x + F_z\,f_x = 0, \quad F_y + F_z\,f_y = 0.$$

Falls dann $F_z \neq 0$ ist, ergibt sich

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung für die Funktion

$$F(x,y,z) = x^3 + xy^2z^3 + z^2 - zy - 1 = 0.$$

5.1. **Arbeiten mit Parameterdarstellungen.** Denkt man sich $x=x(t),\ y=y(t)$ als Funktionen von t in die implizite Form $F(x,y)=0$ eingesetzt, d.h. $F(x(t),y(t)) \equiv 0$, so liefert die Ableitung nach der Kettenregel

$$\frac{dF}{dt} \equiv 0 = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

woraus, nach Division durch $F_y \neq 0$, folgt

$$-\frac{F_x}{F_y} = y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Satz 5.12. *Bezeichnet man die Ableitungen nach einem Parameter durch* $\dfrac{dx}{dt} =: \dot{x}$, $\dfrac{dy}{dt} =: \dot{y}$, *so ergibt sich die Ableitung von y nach x gemäß* $\dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Für die zweite Ableitung y'' einer in Parameterform gegebenen Funktion bekommt man

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{1}{\dot{x}}\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{1}{\dot{x}^3}\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}.$$

Hierin bedeuten $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, *jeweils als Funktionen des Parameters t.*

Aufgabe 5.13. Von der gleichseitigen Astroide $x(t) = a\cos^3 t,\ y(t) = a\sin^3 t$ bestimme man y' und y''.

Aufgabe 5.14. Eine Ellipse sei gegeben durch die Gleichungen

$$x(t) = 2\sin t + \cos t, \quad y(t) = 3\sin t + 4\cos t, \quad 0 \le t < 2\pi.$$

(a) $y'(t) = ?$ $\quad y''(t) = ?$

(b) Wo liegen Maximum und Minimum?

(c) Welche sind die Schnittstellen der Ellipse mit den Koordinatenachsen?

(d) Welche implizite Form hat diese Ellipse?

6. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, deren Lösungen Funktionen sind, die in einer bestimmten Beziehung zu ihren Ableitungen stehen. Da viele natur-, ingenieur-, sozial- und wirtschaftswissenschaftliche Phänomene über Änderungsraten gewisser Größen beschrieben werden, stellen Differentialgleichungen eine der wichtigsten Methoden zur mathematischen Beschreibung technischer, naturwissenschaftlicher und ökonomischer Prozesse dar.

Ein einfaches Beispiel aus der Physik ist das *Zerfallsgesetz*: $N' \sim N$. Dieses besagt, daß bei einer Menge instabiler Atome die Anzahl der zerfallenden Atome von der gesamten Anzahl N der vorhandenen Atome proportional abhängt.

In einer Differentialgleichung tretten die Funktion f selbst, Ableitungen von f und vielleicht noch die Variable(n), von denen f abhängt, auf.

Sucht man Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und gibt eine Relation zwischen f und den Ableitungen von f an, so spricht man von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung.*

Betrachtet man hingegen Funktionen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und hat man Beziehungen zwischen F und den partiellen Ableitungen von F, so handelt es sich um eine *partielle Differentialgleichung.*

Die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung wird die Ordnung der Differentialgleichung genannt.

Die allgemeine Differentialgleichung n-ter Ordnung für eine Funktion $y = y(x)$ kann demnach wie folgt geschrieben werden

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad \text{implizite Form}$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad \text{explizite Form}$$

Als Lösungsfunktion, Lösung oder "Integral" einer gewöhnlichen Differentialgleichung bezeichnet man jede Funktion $y = f(x)$, die, samt ihren Ableitungen in die Differentialgleichung eingesetzt, diese identisch erfüllt. So ist $y = f(x)$ eine Lösung von $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, wenn $F(x, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)) \equiv 0$ gilt.

Beispiel 6.1. Die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' - y = 0$ besitzt die Lösung $y = a \sinh x + b \cosh x$, denn setzt man diese samt ihrer zweiten Ableitung in die Gleichung ein, so ergibt sich die Identität $(a \sinh x + b \cosh x)'' - (a \sinh x + b \cosh x) \equiv 0$, und zwar für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$.

Treten in einer Differentialgleichung die gesuchte Funktion samt ihren Ableitungen höchstens in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert auf, so heißt sie *linear* und kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$y^{(n)} + \varphi_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \varphi_{n-2}(x)y^{(n-2)} + ... + \varphi_1(x)y' + \varphi_0(x)y = \psi(x).$$

Hierin sind die Koeffizienten $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n-1$, in einem Intervall **stetige** Funktionen von x.

Man betrachtet eine Differentialgleichung als gelöst, wenn man die Lösung auf *Quadraturen*, d.h. auf das Ausrechnen von Integralen, zurückgeführt hat.

Die Differentialgleichung $y' = f(x)$ ist auf eine Quadratur zurückgeführt, wenn man statt ihrer schreibt $y = \displaystyle\int f(x)\,dx + C$.

Die Integrationskonstante pflegt man bei der Lösung von der Differentialgleichung ausdrücklich hinzuzuschreiben, um deren Rolle zu unterstreichen.

Beispiel 6.2. Die Funktion $y = e^x$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = y$, aber auch $y = e^{x+2}$ und $y = 3e^x$ sind Lösungen derselben Differentialgleichung. Alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = y$ kann man hier zusammenfassen in der Form $y = Ce^x$, $C = konst.$ Die einparametrige Funktionenschar $y = Ce^x$ ist die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung. Eine einzelne Funktion dieser Schar (z.B. $y = e^x$ oder $y = 3e^x$) heißt *partikuläre Lösung*.

Beim Integrieren treten Integrationskonstanten auf. Eine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung verlangt n Integrationen, so daß die Lösungsfunktion n Konstanten enthalten wird.

Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung unterscheidet man drei Typen von Lösungen:

(1) die *allgemeine Lösung*; sie enthält n unbestimmte und unabhängig voneinander wählbare Konstanten, d.h. $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, falls die Differentialgleichung n-ter Ordnung ist;

(2) *partikuläre* (*spezielle*) *Lösungen*; sie gehen durch spezielle Wahl der C_k aus der allgemeinen Lösung hervor;

(3) *singuläre Lösungen*; das sind Lösungen der Differentialgleichung, die in der allgemeinen Lösung nicht enthalten sind.

Beispiel 6.3. Die Differentialgleichung erster Ordnung $y' = 2\sqrt{y}$ hat die **allgemeine** Lösung $y = (x + C)^2$, $C \in \mathbb{R}$. Geometrisch ist das eine Schar von Normalparabeln, welche die x-Achse berühren und “nach oben” geöffnet sind.

Für jeden speziellen Wert des Scharparameters C erhält man eine **partikuläre** Lösung, geometrisch also eine spezielle Lösungskurve der Schar.

Schließlich hat die Differentialgleichung noch die **singuläre** Lösung $y = 0$, die durch keine Wahl von C aus der allgemeinen hervorgeht und geometrisch der Parabelschar nicht angehört. Sie ist aber *Einhüllende* der Schar, da sie jede Parabel im Scheitel berührt.

In der Mathematik bezeichnet *Enveloppe* (nach franz. enveloppe, *Umhüllung*, auch *Hüllkurve* oder *Einhüllende*) eine Kurve, die eine Kurvenschar einhüllt. Das heißt, die Enveloppe berührt in jedem ihrer Punkte eine Kurve der Kurvenschar.

Wie algebraische Gleichungen höheren Grades unter Umständen mehrere reelle Lösungen haben können, so kann auch bei Differentialgleichungen höheren Grades, das sind Differentialgleichungen, in denen die Ableitungen in höherem als erstem Grad vorkommen, eine Vieldeutigkeit der Lösung auftreten, z.B. zwei einparametrige Kurvenscharen statt nur einer.

Nun soll es gezeigt werden, wie man von der Gleichung einer Kurvenschar zu ihrer Differentialgleichung kommt.

Ist die n-parametrige Kurvenschar durch die Gleichung $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ gegeben, so gelangt man zu einer Differentialgleichung, indem man die n Ableitungen hinzunimmt und aus dem System von $(n + 1)$ Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y' = y'(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ y'' = y''(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ .... \\ y^{(n)} = y^{(n)}(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{array}\right.$$

die n Parameter $C_1, C_2, ..., C_n$ eliminiert.

Es gilt der Satz: *Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung stellt geometrisch eine n-parametrige Kurvenschar dar. Umgekehrt kann jede n-parametrige Kurvenschar durch eine Differentialgleichung n-ter Ordnung beschrieben werden.*

Beispiel 6.4. Die Schar der Geraden durch den Nullpunkt hat die Gleichung $y = C\,x$. Durch Differentiation nach x bekommt man $y' = C$. Die Elimination des Parameters C aus diesen beiden Gleichungen liefert die gesuchte Differentialgleichung $y' = \dfrac{y}{x}$, oder in impliziter Form $xy' - y = 0$.

Beispiel 6.5. Vorgelegt ist die Schar aller Kreise durch den Ursprung, deren Mittelpunkte $M(x_M, y_M)$ auf der Quadrantenhalbierenden $y = x$ liegen. Wie lautet die Differentialgleichung dieser Kurvenschar?

Lösung. Die allgemeine Kreisgleichung $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ ist hier wie folgt zu interpretieren:

1. Der Parameter ist $x_M = C$;
2. Für alle Kreise ist $y_M = x_M \;\Rightarrow\; y_M = C$;
3. Damit die Kreise durch O verlaufen, muß $x_M^2 + y_M^2 = r^2$ sein, d.h. $r^2 = 2C^2$.

Es handelt sich also um eine einparametrige Kurvenschar

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = 2C^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 - 2C(x + y) = 0. \tag{1}$$

Implizite Differentiation ergibt

$$2\,x + 2\,yy' - 2C(1 + y') = 0. \tag{2}$$

Aus (1) folgt für das Parameter $2C = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$. Eingesetzt in (2) führt das auf

$$2\,x + 2\,yy' - \frac{x^2 + y^2}{x + y}(1 + y') = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 2\,xy - y^2 - (x^2 - 2\,xy - y^2)y' = 0,$$

und damit auf die explizite Form $y' = \dfrac{x^2 + 2\,xy - y^2}{x^2 - 2\,xy - y^2}$.

Beispiel 6.6. Welche Differentialgleichung hat die Schar aller Logarithmengraphen, deren Logarithmenbasis $C \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sein kann?

Lösung. $y = \log_C x \;\Leftrightarrow\; x = C^y$. Die Differentiation ergibt

$$C^y \ln C\, y' = 1 \;\Rightarrow\; xy' \ln C = 1 \;\Rightarrow\; C = e^{\frac{1}{xy'}} \;\Rightarrow\; \left(e^{\frac{1}{xy'}}\right)^y = x \;\Rightarrow\; x \ln x\, y' - y = 0.$$

Beispiel 6.7. Stellen Sie die Differentialgleichung aller Kettenlinien $y = a\,\cosh(b\,x{+}c),\; a, b, c = Konstanten$, auf.

Lösung.

$$y' = ab\sinh(bx{+}c),\; y'' = ab^2\cosh(bx{+}c) = b^2 y,\; y''' = b^2 y' \;\Rightarrow\; \frac{y''}{y'''} = \frac{y}{y'} \;\Rightarrow\; yy''' - y'y'' = 0.$$

Aufgabe 6.8. (1) Zeigen Sie, daß

(a) $y^3 = C(y^2 - x^2)$ Lösung der Differentialgleichung $(3\,x^2 - y^2)y' - 2\,xy = 0$ ist;

(b) $e^x(x^2+y^2)=C$ Lösung folgender Differentialgleichung ist

$$\left(1+\frac{2\,x}{x^2+y^2}\right)dx+\frac{2\,y}{x^2+y^2}\,dy=0;$$

(c) $y=C_1x+C_2\dfrac{1}{x^3}$ Lösung der Differentialgleichung $x^2y''+3\,xy'-3\,y=0$ ist.

(2) Wie lautet die Differentialgleichung

(a) der Schar aller Kreise mit dem Radius 1, deren Mittelpunkte $M(x_M,y_M)$ auf der x-Achse liegen?

(b) der Schar aller Kreise vom gleichen Radius in der Ebene?

6.1. **Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.**

6.1.1. *Trennbare (separierbare) Differentialgleichungen.* Läßt sich die rechte Seite der Differentialgleichung $y'(x)=F(x,y)$ in der Produktform $y'(x)=f(x)g(y)$ darstellen, wobei der eine Faktor nur von $x\in\mathcal{I}$, der andere nur von $y\in\mathcal{J}$ abhängt, und sind $f(x)$, $g(y)$ in ihren Definitionsbereichen stetige Funktionen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) Es sei $g(y)\neq 0$. Man kann *die Veränderlichen trennen*, indem man sie auf verschiedene Seiten der Gleichung verteilt.

$$y'(x)=f(x)g(y)\;\Rightarrow\;\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$$

Beiderseitige Integration ergibt dann

$$G(x,y)=\int\frac{dy}{g(y)}-\int f(x)\,dx+C$$

als allgemeine Lösung.

(2) Es sei $\eta\in\mathcal{J}$ eine Nullstelle von $g(y)$, d.i. $g(\eta)=0$. Es gilt in diesem Fall

$$y'(x)=f(x)g(\eta)=0\;\Rightarrow\;y(x)=\eta,\;x\in\mathcal{I}$$

ist eine konstante singuläre Lösung der Differentialgleichung.

Bei "Angewandten Aufgaben" sucht man meistens nicht die allgemeine Lösung $y=y(x)+C$, sondern eine spezielle, durch einen Punkt $P_0(x_0,y_0)$ verlaufende Lösungskurve. Diese Forderung kommt durch die *Anfangsbedingung* $y(x_0)=y_0$ zum Ausdruck. Mit ihr folgt $y_0=y(x_0)+C$, also $C=y_0-y(x_0)$, und damit $y-y_0=y(x)-y(x_0)$ als gesuchte Integralkurve.

Beispiel 6.9. Man löse das folgende Anfangswertproblem

$$1+y^2-xy'=0,\quad y(1)=1.$$

Lösung. Nach Trennung der Veränderlichen erhält man $xy'=1+y^2$.
Es sind keine Nullstellen in dem von y abhängenden Funktionsteil vorhanden.
Man bekommt dann $y'=\dfrac{1+y^2}{x}$ und $\dfrac{dy}{1+y^2}=\dfrac{dx}{x}$.
Beiderseitige Integration ergibt $\arctan y=\ln|x|+C$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also $y=\tan(\ln|x|+C)$.

Es gilt außerdem $y(1) = 1$, daher errechnet sich C aus $1 = y(1) = \tan(\ln 1 + C) = \tan(C)$, d.i. $C = \arctan 1$, und $y = \tan(\ln |x| + \arctan 1)$.

Beispiel 6.10. Die Differentialgleichung $yy' + x = 0$ läßt sich in der Form $y\,dy = -x\,dx$ schreiben. Durch beiderseitige Integration $\int y\,dy = -\int x\,dx$ bekommt man

$$\frac{1}{2}\,y^2 = -\frac{1}{2}\,x^2 + C \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2C.$$

Demnach muß $C > 0$ sein. Die allgemeine Lösung ist eine zum Ursprung konzentrische Kreisenschar.

Beispiel 6.11. Gesucht ist die durch den Punkt $P_0(0, -1)$ verlaufende Integralkurve der Differentialgleichung $y' - (x + 2)y = 0$.

Lösung. Man erhält nach Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dy}{y} = (x + 2)\,dx \;\Rightarrow\; \ln |y| = \frac{1}{2}\,x^2 + 2\,x + C \;\Rightarrow\; |y| = e^{\frac{1}{2}\,x^2+2\,x}\,e^C.$$

Setzt man $k = e^C\,sign(y)$, so bekommt man $y = k\,e^{\frac{1}{2}\,x^2+2\,x}$.

Die Berücksichtigung der Anfangsbedingung liefert $k = -1$ und damit $y = -\,e^{\frac{1}{2}\,x^2+2\,x}$ als gesuchte spezielle Integralkurve.

Beispiel 6.12. *Traktrix*, auch *Schleppkurve*, *Ziehkurve*, *Zugkurve*, ist eine spezielle ebene Kurve. Der Name erklärt sich daraus, daß diese Kurve von einem Massenpunkt beschrieben wird, der an einer Stange gezogen wird. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Modellierung des Fahrverhaltens, nämlich der Rückwärtsfahrt und dem Verhalten beim Durchfahren einer Kurve.

Die eigentliche Traktrix ist die Kurve, bei der für jede Tangente der Abschnitt zwischen dem Berührpunkt und der Koordinatenachse konstant ist. Wir bestimmen eine Gleichung der Schleppkurve.

Lösung. Es seien $y = y(x)$ die Gleichung der Kurve $\mathcal{K}$, $P(x, y(x))$ ein beliebiger Punkt von $\mathcal{K}$, t_P die Tangente an $\mathcal{K}$ durch P und $Q = t_P \cap Ox$. Dann ist die Gleichung von

$$t_P :\; y = y'\,x + C,\; y' \neq 0.$$

Ein beliebiger Berührpunkt P hat die Koordinaten $P\left(\frac{y-C}{y'}, y\right)$, und der ihm entsprechende Punkt Q die Koordinaten $Q\left(-\frac{C}{y'}, 0\right)$. Hat der Tangentenabschnitt $|PQ|$ die Konstante Länge l, so ist

$$\overrightarrow{PQ}^2 = \left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 = l^2.$$

Als Bedingungsgleichung ergibt sich $\dfrac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = l$. Führen wir hier $x' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$ ein, so kann man die Variablen leicht trennen, nämlich

$$y\sqrt{1 + x'^2} = l \;\Rightarrow\; 1 + x'^2 = \frac{l^2}{y^2} \;\Rightarrow\; x' = \sqrt{\frac{l^2 - y^2}{y^2}} \;\Rightarrow\; x = \int \sqrt{\frac{l^2 - y^2}{y^2}}\,dy.$$

Für die Lösung des Integrals setzen wir $y = l\,\sin\alpha$, rechnen $dy = l\,\cos\alpha\,d\alpha$ aus und bekommen damit

$$x = l\int \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = l\left\{\int \frac{d\alpha}{\sin\alpha} - \int \sin\alpha\,d\alpha\right\} = l\left(\ln\tan\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right) + C.$$

Nach Resubstitution erhalten wir

$$x = \sqrt{l^2 - y^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{l - \sqrt{l^2 - y^2}}{l + \sqrt{l^2 - y^2}} + C.$$

Die Integralkurve durch den konkreten Punkt $P_0(0, l)$ hat die Gleichung

$$x = \sqrt{l^2 - y^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{l - \sqrt{l^2 - y^2}}{l + \sqrt{l^2 - y^2}}.$$

Die x-Achse ist eine waagerechte Asymptote dieser Kurve: $\lim\limits_{y \to 0} x = -\infty$.

Aufgabe 6.13. (1) Welche Integralkurve der Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y' + xy = 2\,x$$

verläuft durch den Punkt $P(0, 1)$?

(2) Gesucht ist die zur Differentialgleichung $y' + y = 0$ als allgemeine Lösung gehörende Kurvenschar.

(3) Geben Sie von den folgenden Differentialgleichungen jeweils die allgemeine Lösung und die partikuläre Lösung an, welche die Anfangsbedingung erfüllt:
   (a) $x^2y' - y^2 = x^2yy', \quad y(1) = -1;$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{10\,xy + 2\,x - 35\,y - 7}, \quad y(4) = 3;$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = x^2y - 2\,xy + y - 3\,x^2 + 6\,x - 3, \quad y(1) = 4.$

6.1.2. *Wachstums- und Abnahmeprozesse.*

(1) Lineares Wachstum (lineare Abnahme)
   - Charakteristische Gleichung $f'(t) = k$ ($f'(t) = -k$), $k > 0$, d.h. die Wachstumsgeschwindigkeit (Abnahmegeschwindigkeit) ist konstant.
   - Funktionsterm des linearen Wachstums $f(t) = kt + c$ (der linearen Abnahme $f(t) = -kt + c$).

(2) Exponentielles Wachsen und Fallen
   - Charakteristische Gleichung $f'(t) = k\,f(t)$, d.h. die Wachstumsgeschwindigkeit (Abnahmegeschwindigkeit) ist proportional zum aktuellen Bestand.
   - Funktionsterm $f(t) = a\,e^{kt}$.
     Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ der Anfangsbestand zum Zeitpunkt $t = 0$, $f(t)$ der Bestand zum Zeitpunkt t. Für $k > 0$ heißt k Wachstumskonstante und $f(t)$ Wachstumsfunktion; für $k < 0$ heißt k Zerfallskonstante und $f(t)$ Zerfallsfunktion.

(3) Beschränktes exponentielles Wachstum (beschränkte exponentielle Abnahme)
   - Charakteristische Gleichung $f'(t) = k(G - f(t))$, $k > 0$, d.h. die Wachstumsgeschwindigkeit (Abnahmegeschwindigkeit) ist proportional zum aktuellen Sättigungsdefizit.
   - Funktionsterm des beschränkten Wachstums $f(t) = G - ae^{-kt}$ (der beschränkten Abnahme $f(t) = G + ae^{kt}$).
     G ist der Grenzwert $\lim_{t \to \infty} f(t)$.

(4) Logistisches Wachstum
- Charakteristische Gleichung $f'(t) = kf(t)(G - f(t)),\ k > 0$, d.h. die Wachstumsgeschwindigkeit ist sowohl zum aktuellen Bestand als auch zum aktuellen Sättigungsdefizit proportional.
Wann wird die Wachstumsgeschwindigkeit maximal?
- Funktionsterm $f(t) = \dfrac{aG}{a + e^{-Gkt}}$ oder $f(t) = \dfrac{G}{1 + be^{-Gkt}}$.
G ist der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

Aufgabe 6.14. Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \dfrac{ae^x}{(1+e^x)^2},\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild sei K_a.

Durch $F(t) = \dfrac{36e^t}{1+e^t}$ wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf eine Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $F(t)$ in cm^2 gemessen.

(a) Gegeben ist eine Funktion g mit $g(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes von K_{36} und dem Schaubild von g.
Für welche Werte von a hat K_a mit dem Schaubild von g einen Punkt gemeinsam?

(b) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt $f_a(x) = f_a(-x),\ x \in \mathbb{R}$.
K_a und die x-Achse begrenzen eine beiderseitig ins Unendliche reichende Fläche. Zeigen Sie, daß diese Fläche einen endlichen Inhalt hat.

(c) Zu welchem Zeitpunkt breitet sich der Schimmelpilz am schnellsten aus?
Wie groß ist die maximale Ausbreitungsseschwindigkeit?
Weisen Sie nach, daß F Lösung einer Differentialgleichung folgender Art ist

$$F'(t) = k\,F(t)(G - F(t)).$$

Welche Art von Wachstum liegt demnach vor?
Skizzieren Sie das Schaubild von $F(t)$ für $-5 \leq t \leq 5$.

(d) Zeigen Sie: Für kleine Werte von $F(t)$ gilt näherungsweise die Differentialgleichung $F'(t) = F(t)$.
Geben Sie eine mögliche Lösungsfunktion dieser Differentialgleichung an, die für kleine Werte von $F(t)$ näherungsweise den Inhalt der bedeckten Fläche beschreibt.

Aufgabe 6.15. Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = \frac{2}{1+e^x},\ x \in \mathbb{R}; \quad g(x) = \frac{2}{1+e^{1-x}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ihre Schaubilder seien K_f und K_g.

(a) Ermitteln Sie die Asymptoten und den Wendepunkt von K_f.
Untersuchen Sie f auf Monotonie und geben Sie den Wertebereich von f an.
Zeichnen Sie K_f samt Asymptoten.

(b) K_g entsteht aus K_f durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$. Begründen Sie diesen Sachverhalt.
Skizzieren Sie K_g in das Koordinatensystem von Teilaufgabe (a).

Geben Sie den Wertebereich und das Monotonieverhalten von g sowie den Wendepunkt von K_g an.

(c) Weisen Sie nach, daß die Funktion g Lösung folgender Differentialgleichung ist

$$g'(x) = \frac{1}{2}g(x)(2 - g(x)).$$

Welche Form von Wachstum wird demzufolge von g beschrieben?
Geben Sie charakteristische Eigenschaften dieser Wachstumsform an.

(d) Die momentane Änderungsrate des Energieverbrauchs $\left(\text{in } 10^8 \frac{kWh}{Jahr}\right)$ eines Ladens ab dem Jahr 1990 wird in guter Näherung durch $g(x)$ mit $x \geq 0$ (x in Jahren ab Anfang 1990) beschrieben.

Zu welchem Zeitpunkt erreicht diese momentane Änderungsrate 98% ihres Sätigugngswertes?

In welchem Jahr verlangsamt sich erstmals die Zunahme der momentanen Änderungsrate des Energieverbrauchs?

Berechnen Sie den gesamten Energieverbrauch im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2000.

Aufgabe 6.16. Im tropischen Regenwald lebt isoliert ein 5000 Menschen zählender Indianerstamm. Einer seiner Bewohner wird unabsichtlich mit einer ungefährlichen, aber sehr ansteckenden Grippe infiziert. Durch gegenseitige Ansteckung in den darauf folgenden Wochen zählt man nach 4 Wochen bereits 300 Kranke. Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modelieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl $\mathcal{A}$ der Erkrankten aus.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $\mathcal{A}(t)$. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Stammesbewohner krank? Welche Bedeutung hat dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit?

Wie groß ist in den ersten 2 Monaten die mittlere Zunahme an Erkrankten pro Woche?

Aufgabe 6.17. In einer Stadt gibt es 40 000 Haushalte, von denen nach Meinungsfragen etwa jeder fünfte für den Kauf eines neu auf den Markt gebrachten Haushaltsartikels in Frage kommt. Es ist damit zu rechnen, daß der Absatz des Artikels im Laufe der Zeit zunehmend schwieriger wird, da der Kreis der möglichen Käufer und deren Kauflust abnimmt. In den ersten drei Monaten werden 1700 Stück des Artikels verkauft. Kann der Hersteller davon ausgehen, daß innerhalb des ersten Jahres mindestens 5500 Stück verkauft werden?

Aufgabe 6.18. Beim Lösen von Kochsalz ($NaCl$) in destiliertem Wasser beschreibt die Funktion m (in g) die zur Zeit t bereits gelöste Menge an Kochsalz. Die gelöste Salzmenge kann einen bestimmten Wert m_0, die Sättigungsgrenze, nicht überschreiten. Beobachtungen haben gezeigt, daß die Geschwindigkeit, mit der sich $m(t)$ ändert, näherungsweise proportional zur Menge des noch lösbaren Salzes ist.

(a) Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung auf, wenn die Sättigungsgrenze bei $100g$ destiliertem Wasser $36g$ Kochsalz beträgt.

(b) Bestimmen Sie den Funktionsterm $m(t)$, wenn für $t = 0$ noch kein Kochsalz in $100g$ destiliertem Wasser gelöst war, nach 30 Minuten aber $28g$.

Aufgabe 6.19. Das Wachstum von Fichten, die etwa $30m$ hoch werden, wird näherungsweise durch eine Funktion h beschrieben, die der Differentialgleichung $h'(x) = kh(x)(30 - h(x))$. Dabei ist k eine Konstante und $h(x)$ die Höhe einer Fichte (in Metern) x Jahre nach Beobachtungsbeginn. Welche Form von Wachstum liegt vor?

Zeige, daß $h(x) = \dfrac{0,6}{0,02 - e^{-30kx}}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

6.1.3. *Homogene Differentialgleichungen (Ähnlichkeitsgifferentialgleichungen).* Eine mathematische Funktion heißt *homogen vom Grad n*, wenn bei proportionaler Änderung aller Variablen um den Proportionalitätsfaktor α sich der Funktionswert um den Faktor α^n ändert, d.h.

Eine Funktion F auf dem k-dimensionalen reellen Raum ist homogen vom Grad n genau dann, wenn für alle α, $x_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, ..., \alpha x_k) = \alpha^n F(x_1, x_2, x_3, ..., x_k).$$

Funktionen von diesem Typ sind wichtig z.B. in den Wirtschaftswissenschaften und in den Naturwissenschaften.

Individuelle Nachfragefunktionen $x = x(p, E)$ stellen einen Zusammenhang zwischen Preisen p, Einkommen E und den nachgefragten Mengen x nach den Gütern dar. Kommt es z.B. im Zuge einer Währungsumstellung (von DM zu Euro) zu einer betragsmäßigen Halbierung aller Preise und der Einkommen und wird dieses von den Individuen vollständig berücksichtigt (Freiheit von Geldillusion), so werden sich die nachgefragten Mengen nicht ändern. Das heißt es gilt $\alpha^0 x = x(\alpha p, \alpha E)$.

Nachfragefunktionen sind somit homogen vom Grad Null in den Variablen Preise und Einkommen (*Nullhomogenität*).

Produktionsfunktionen $y = f(x_1, ..., x_n)$ stellen einen Zusammenhang zwischen Inputs x_i und dem zugehörigem Output y her. Kommt es dann eventuell in der Chemieproduktion jeweils bei proportionalen Änderung (z.B. Verdoppelung) aller Inputs zu einer entsprechenden proportionalen Änderung (Verdoppelung) des Outputs so gilt: $\alpha^1 y = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, ..., \alpha x_n)$.

Eine solche Produktionsfunktion wäre dann homogen mit dem Homogenitätsgrad 1 (*linear homogen*).

Bei linear homogenen Produktionsfunktionen ist der Wert des Produkts gleich den Faktorkosten (*Ausschopfungstheorem*).

Aufgabe 6.20. Sind die folgenden Funktionen homogen? Bestimmen Sie gegebenfalls den Homogenitätsgrad der Funktionen.

$$\begin{aligned}
&F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2; && F(x,y) = \sqrt{xy};\\
&F(x,y) = xy^2 + yx; && F(x,y) = x^2y^5(\ln x - \ln y),\ x > 0,\ y > 0;\\
&F(x,y) = xy^3 + yx^3 + x^2y^2; && F(K,L) = (aK^\rho + bL^\rho)^{\frac{1}{\rho}},\ a > 0,\ b > 0,\ \rho \neq 0;\\
&F(x,y) = 2x + y + 3\sqrt{xy}; && F(x,y) = xy \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}.
\end{aligned}$$

Jede Funktion $f(x,y)$, die homogen von Grad Null ist, läßt sich als Funktion des Quotienten beider Veränderlichen schreiben.

Erklärung 6.21. Differentialgleichungen erster Ordnung $y' = f(x,y)$, deren rechte Seite homogen vom Grad Null ist, nennt man *homogene Differentialgleichungen.*

Satz 6.22. *Ist $f(x,y)$ homogen vom Grad Null, so kann die homogene Differentialgleichung $y' = f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ mittels der Substitution $\dfrac{y}{x} = z$ durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden.*

Beweis. Geht man mit

$$\frac{y}{x} = z(x) \;\Rightarrow\; y = zx \;\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\,x + z$$

in die gegebene Differentialgleichung ein, so erhält man

$$\frac{dz}{dx}\,x + z = \varphi(z) \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx}\,x = \varphi(z) - z.$$

1. Fall: $\varphi(z) - z \neq 0,\;\; x \neq 0.$
Die Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\frac{dz}{\varphi(z)-z} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{dz}{\varphi(z)-z} = \ln|cx|,\, c \neq 0 \;\Rightarrow\; |cx| = e^{\int \frac{dz}{\varphi(z)-z}} \;\Rightarrow$$

$$x = k\, e^{\int \frac{dz}{\varphi(z)-z}}, \quad k := \frac{sign\, x}{c}.$$

2. Fall: $\varphi(z) - z = 0,\;\; x \neq 0.$
Hier ergibt sich

$$\frac{dz}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; z = c = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = cx,$$

also ein Geradenbüschel mit dem Ursprung als Träger. □

Beispiel 6.23. Die Differentialgleichung $(x^2 - y^2)\,dx + 2\,xy\,dy = 0$ lautet in der expliziten Form

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x^2 - y^2}{2\,xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)},$$

ist also homogen. Der Ansatz $\frac{y}{x} = z$ führt auf

$$\frac{dz}{dx}\,x + z = \frac{z^2-1}{2z} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = -\frac{2z}{1+z^2}\,dz \;\Rightarrow\; \ln|cx| = -\ln(1+z^2),\; c \neq 0 \;\Rightarrow$$

$$|cx|(1+z^2) = 1 \;\Rightarrow\; |cx|\frac{x^2+y^2}{x^2} = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 2kx,\; k := \frac{sign\, x}{2c}.$$

Die Lösung ist geometrisch die einparametrige Kreisschar $(x-k)^2 + y^2 = k^2$, dessen Mittelpunkte $M(k,0)$ auf der x-Achse liegen. Die y-Achse ist ihre gemeinsame Tangente.

Aufgabe 6.24. (1) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung bei folgenden Differentialgleichungen:

(a) $x^2y' - 3y^2 - xy = 0;$

(b) $(x + \sqrt{xy})\,y' - y = 0;$

(c) $y'^2 - \dfrac{2y'\sqrt{x^2+y^2}}{x} + 1 = 0.$
Anleitung: Differentialgleichung als quadratische Gleichung in y' behandeln und nach y' auflösen. Dann nur die eine Lösung der quadratischen Gleichung weiter verfolgen.

(2) Vorgelegt sei die Differentialgleichung erster Ordnung $y' = y^{n+1} f(xy^n)$, $n \in \mathbb{N}$.
(a) Zeigen Sie: Mit dem Einsatz $z(x) = y^{-n}$ läßt sich diese Gleichung in eine homogene Differentialgleichung in $z = z(x)$ überführen.
(b) Wenden Sie diese Substitution auf die Differentialgleichung $y' = xy^5 + y^3$ an und bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

(3) Differentialgleichungen der Form
$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right) \text{ mit } \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0,$$
die sogenannten *Jacobischen Differentialgleichungen*, können durch die Substitution
$$u = x - x_0,\ v = y - y_0 \ \Rightarrow\ du = dx,\ dv = dy$$
auf homogene Differentialgleichungen
$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{Au+Bv}\right)$$
für v als Funktion von u zurückgeführt werden, wenn man x_0 und y_0 konkret so bestimmt, daß $ax_0 + by_0 + c = 0$, $Ax_0 + By_0 + C = 0$.
Wenden Sie dieses Verfahren an auf die Differentialgleichung
$$y' = \frac{x-2y-3}{2x+3y+1}.$$
Wie lautet die allgemeine Lösung?

Aufgabe 6.25. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:
$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \qquad xy' = a^2x^2 + y + y^2 \quad (\text{Ansatz} : z = \frac{y}{x}).$$

6.1.4. *Exakte Differentialgleichungen.* Die Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x,y)$ läßt sich stets in der Form
$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$
schreiben. Hierzu braucht man nur $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ zu setzen und mit $Q(x,y)$ durchzumultiplizieren.

Erklärung 6.26. Die gewöhnliche Differentialgleichung $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ heißt *exakt* (*total*, *vollständig*), wenn eine stetig differenzierbare Funktion $F(x,y)$ derart existiert, daß $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$ ist, d.h. für ihr vollständiges Differential gilt
$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$
Die Funktion $F(x,y)$ heißt *Stammfunktion* (auch *Potentialfunktion*) der gegebenen Differentialgleichung.

Satz 6.27. *Sind $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ stetig partiell differenzierbar und ist der Definitionsbereich von P und Q ein einfach zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^2$, so gibt es genau dann eine solche Potentialfunktion $F(x,y)$, wenn die sogenannte Integrabilitätsbedingung $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ erfüllt ist.*

Beweis. Wir brauchen nur das vollständige Differential $dF(x,y) = F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy$ der Funktion $F(x,y)$ anzuschreiben und mit $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ zu vergleichen. Es ergibt sich $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$.

Leiten wir diese Beziehungen noch nach y bzw. nach x partiell ab und wenden den Satz von Schwarz an, so wird $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Der Schluß gilt auch in umgekehrter Richtung.

Hat man sich vom Bestehen der Identität $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ überzeugt, dann existiert also eine Funktion $F(x,y)$ so, daß $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ gilt und es ist dann $F(x,y) = C$ die gesuchte Lösung.

Bestimmung der Funktion $F(x,y)$

(1) Man bilde gemäß $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y).$$

(y beim Integrieren wie eine Konstante behandeln!)

(2) Man bilde gemäß $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + \psi(x).$$

(x beim Integrieren wie eine Konstante behandeln!)

(3) Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke $F(x,y)$ können $\varphi(y)$ bzw. $\psi(x)$ angegeben werden.

□

Beispiel 6.28. Man löse die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y - 5y^2)\,dy = 0.$$

Lösung. **Nachprüfen der Integrabilitätsbedingung:**

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &:= 3x^2 + 6xy^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \\ Q(x,y) &:= 6x^2y - 5y^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Die Differentialgleichung ist also exakt.

Bestimmung der Stammfunktion $F(x,y)$**:**

$$F(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y),$$

$$F(x,y) = \int (6x^2y - 5y^2)\,dy + \psi(x) = 3x^2y^2 - \frac{5}{3}y^3 + \psi(x).$$

Der Vergleich beider Integrationen ergibt

$$x^3 + \varphi(y) = -\frac{5}{3}y^3 + \psi(x) \;\Rightarrow\; \varphi(y) = -\frac{5}{3}y^3, \quad \psi(x) = x^3.$$

Damit lautet die *allgemeine Lösung*

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 - \frac{5}{3}y^3 = C.$$

Beispiel 6.29. Die Differentialgleichung $\sin x \cos y\,dx + \cos x \sin y\,dy = 0$ ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin x \cos y) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin y \cos x) = -\sin x \sin y$$

exakt. Als Stammfunktion ergibt sich

$$F(x,y) = \int \sin x \cos y\,dx + \varphi(y) = -\cos x \cos y + \varphi(y),$$

$$F(x,y) = \int \cos x \sin y\,dy + \psi(x) = -\cos x \cos y + \psi(x).$$

Daraus folgt $\varphi(y) = \psi(x) \equiv 0$.

Die allgemeine Lösung ist $F(x,y) = -\cos x \cos y = C$.

Aufgabe 6.30. (1) Welche der folgenden Differentialgleichungen stellen ein totales Differential einer Funktion $F(x,y)$ dar?

(a) $4x^3\,dx + 3y^4\,dy = 0$;

(b) $(12xy - x^2)\,dx - (y^2 - 6xy)\,dy = 0$;

(c) $(5x^4y - 3xy^2)\,dx - (3x^2y - x^5 + 7x^4)\,dy = 0$;

(d) $(\tan\sqrt{x} + y^2)\,dx + 2y(x - \sqrt{y})\,dy = 0$;

(e) $x\ln(xy)\,dx + y\ln(xy)\,dy = 0$;

(f) $(x(x^4 + y^2) - a^2x)\,dx + (a^2y + y(x^2 + y^3))\,dy = 0$.

(2) Bestimmen Sie von den folgenden exakten Differentialgleichungen die allgemeine Lösung:

(a) $(10x^4 + y^3)\,dx + 3y(xy - 2)\,dy = 0$;

(b) $(\cos(x + y^2) + 3y)\,dx + (2y\cos(x + y^2) + 3x)\,dy = 0$;

(c) $y' = \dfrac{20x^3 - 21x^2y + 2y}{7x^3 - 2x - 3}$;

(d) $y' = \dfrac{2x-3y+5}{3x-4y+7}$;

(e) $\left(x\cos y + \cos x + \dfrac{1}{y}\right) y' + \left(\sin y - y\sin x - \dfrac{1}{x}\right) = 0.$

6.1.5. *Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung.*

Erklärung 6.31. Die gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Gestalt $y' + f(x)\,y = g(x)$ und heißt

(a) *homogene* lineare Differentialgleichung, wenn die *Störfunktion* $g(x) \equiv 0$ ist;

(b) *inhomogene* lineare Differentialgleichung, wenn $g(x) \neq 0$ ist.

Diese Differentialgleichungen lassen sich stets lösen.

Die Lösungsmethode von Lagrange

I^{er} **Schritt:** Bestimmung der **allgemeinen** Lösung y_h der **homogenen** Gleichung durch Trennung der Veränderlichen:

$$y' + f(x)y = 0,\ y \neq 0\ \Rightarrow\ \frac{dy}{y} = -f(x)\,dx\ \Rightarrow\ y_h = ce^{-\int f(x)\,dx},\ c \neq 0.$$

II^{ter} **Schritt:** Bestimmung einer **partikulären** Lösung y_p der **inhomogenen** Gleichung durch *Variation der Konstanten*:

Die *Variation der Konstanten* bedeutet: Es wird die Konstante c ersetzt durch eine **ableitbare** Funktion $c(x)$ und diese so bestimmt, daß $y_p = c(x)e^{-\int f(x)\,dx}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung wird.

Setzen wir nämlich y_p in die inhomogene Gleichung ein, so wird

$$y_p' = c'(x)e^{-\int f(x)\,dx} + c(x)e^{-\int f(x)\,dx}(-f(x))\ \Rightarrow$$

$$c'(x)e^{-\int f(x)\,dx} + c(x)e^{-\int f(x)\,dx}(-f(x)) + f(x)e^{-\int f(x)\,dx} = g(x)\ \Rightarrow$$

$$c'(x)e^{-\int f(x)\,dx} = g(x) \quad\Rightarrow\quad c'(x) = g(x)e^{\int f(x)\,dx}\ \Rightarrow$$

$$c(x) = \int g(x)e^{\int f(x)\,dx}\,dx \quad\Rightarrow\quad y_p = e^{-\int f(x)\,dx}\int g(x)e^{\int f(x)\,dx}\,dx.$$

Hier wird keine Integrationskonstante hinzugefügt, da nur eine partikuläre Lösung y_p gesucht wird.

III^{ter} **Schritt:** Bestimmung der **allgemeinen** Lösung y_A der **inhomogenen** Gleichung durch *Überlagerung* (Addition) von y_h und y_p, d.h. $y_A = y_h + y_p$. Es ist also

$$y_A = e^{-\int f(x)\,dx}\left(c + \int g(x)e^{\int f(x)\,dx}\,dx\right).$$

Beispiel 6.32. Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 4y - e^x$?

Lösung. Die Gleichung ist vom Typ $y' - 4y = -e^x$.

I^{er} **Schritt:** $y' - 4y = 0\ \Rightarrow\ y_h = ce^{4x}$.

II^{ter} **Schritt:** Ansatz $y_p = c(x)e^{4x}$. Setzt man in die inhomogene Gleichung ein, so ergibt sich

$$c'(x) = -e^{-3x} \;\Rightarrow\; c(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} \;\Rightarrow\; y_p = \frac{1}{3}e^{x}.$$

III^{ter} **Schritt:** $y_A = y_h + y_p = ce^{4x} + \frac{1}{3}e^{x}$.

Beispiel 6.33. Man löse die Differentialgleichung $y' + y\tan x = \sin x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Lösung.

I. $y' + y\tan x = 0 \;\Rightarrow\; y_h = ce^{-\int \tan x\, dx} = ce^{\ln(\cos x)} = c\cos x$.

II. Der Ansatz $y_p = c(x)\cos x$ führt zu

$$c'(x)\cos x = \sin x \;\Rightarrow\; c'(x) = \tan x \;\Rightarrow\; c(x) = -\ln(\cos x) \;\Rightarrow\; y_p = -\cos x \ln(\cos x).$$

III. $y_A = y_h + y_p = \cos x(c - \ln(\cos x))$.

Beispiel 6.34. Man bestimme die durch den Punkt $P(0,1)$ gehende Integralkurve der Differentialgleichung

$$(x^2+3)\,y' + 2xy = 24x^2 - 12x + 7.$$

Lösung. Die Differentialgleichung ist linear:

$$y' + \frac{2x}{x^2+3}\,y = \frac{24x^2 - 12x + 7}{x^2+3}.$$

I. $y' + \dfrac{2x}{x^2+3}\,y = 0 \;\Rightarrow\; y_h = \dfrac{c}{x^2+3}$.

II. $y_p = \dfrac{c(x)}{x^2+3} \;\Rightarrow\; c'(x) = 24x^2 - 12x + 7 \;\Rightarrow$

$$c(x) = \int (24x^2 - 12x + 7)\, dx = 8x^3 - 6x^2 + 7x \;\Rightarrow\; y_p = \frac{8x^3 - 6x^2 + 7x}{x^2+3}.$$

III. $y_A = y_h + y_p = \dfrac{1}{x^2+3}(c + 8x^3 - 6x^2 + 7x)$.
Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich als Wert der Integrationskonstanten für diese spezielle Integralkurve $c = 3$, und damit als gesuchte partikuläre Lösung

$$y = \frac{8x^3 - 6x^2 + 7x + 3}{x^2+3}.$$

Aufgabe 6.35. (1) Bestimmen Sie je die allgemeine Lösung folgender linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
y' - y\cos x = \cos x; & xy' + y = 3x^2; \\
xy' - y = 2x\ln x; & xy' - y = x^2e^{-x}; \\
y'\sin x + y\cos x = \cosh x; & (x^2+1)y' + 2xy = 3x^2; \\
y' - \dfrac{2}{x}\,y = x^2\sinh x; & \dfrac{1}{2}\,y'\sin(2x) - y + \sin^3 x = 0.
\end{array}$$

(2) Nach Bernoulli kann man eine beliebige lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y' + f(x)y = g(x)$ durch den *Produktansatz* $y(x) = u(x)\,v(x)$ lösen.
Führen Sie dies durch, wobei Sie die noch freie Bedingung für $u(x)$ bzw. $v(x)$ so verwenden, daß nach Einsetzen in die Gleichung der Koeffizient vor $u(x)$ verschwindet.

(3) Man löse die Differentialgleichung (a) $(2x+1)y' - 4e^{-y} + 2 = 0$ mit dem Ansatz $e^y = u(x)$ und (b) $2xyy' - y^2 + ax = 0$ mit dem Ansatz $y^2 = u(x)$.

Aufgabe 6.36. Bestimmen Sie für jede der folgenden Differentialgleichungen die allgemeine Lösung sowie die spezielle Lösung y_α mit $y_\alpha(1) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$xy' = 2y + x^2, \qquad y' = 2xy + x.$$

6.1.6. *Die Bernoullische Differentialgleichung.*

Erklärung 6.37. Differentialgleichungen der Gestalt

$$y' + f(x)y = g(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},$$

werden *Bernoullische Differentialgleichungen* genannt.

Sie ist nach dem schweizerischer Mathematiker und Physiker *Jakob I. Bernoulli* (1655 – 1705) benannt.

Für $n = 0$ ergibt sich eine inhomogene lineare Differentialgleichung $y' + f(x)y = g(x)$; für $n = 1$ speziell eine homogene lineare Differentialgleichung $y' + (f(x) - g(x))y = 0$.

Satz 6.38. *Für jedes $n > 1$ läßt sich mittels der Substitution $y^{1-n} = z(x)$ die Bernoullische Differentialgleichung auf eine lineare zurückführen.*

Beweis. Wir gehen aus von unserem Ansatz $y^{1-n} = z$, differenzieren denselben nach x, $(1-n)y^{-n}y' = z'$, und setzen in die gegebene Differentialgleichung ein:

$$y' = \frac{1}{1-n}\, y^n z' \wedge y = \sqrt[1-n]{z} \;\Rightarrow\; \frac{1}{1-n}\, z' + f(x)z = g(x) \;\Rightarrow\; z' + (1-n)f(x)z = (1-n)g(x).$$

Damit haben wir eine inhomogene lineare Differentialgleichung für die Funktion $z = z(x)$ erhalten. Man bestimmt ihre Lösung und zum Schluß resubstituiert gemäß $y = \sqrt[1-n]{z}$. $\square$

Beispiel 6.39. Die Bernoullische Differentialgleichung $y' - \frac{1}{x}\,y = y^3$ wird mit der Substitution $z = y^{-2}$ wegen $z' = -2y^{-3}y'$ auf die lineare Differentialgleichung $z' + \frac{2}{x}z = -2$ zurückgeführt. Für diese erhält man

$$z_h = \frac{c}{x^2}, \quad c(x) = -\frac{2}{3}x^3, \quad z_p = -\frac{2}{3}x \quad \text{und} \quad z_A = \frac{c}{x^2} - \frac{2}{3}x,$$

und damit die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$y = \sqrt{\frac{1}{z_A}} = \sqrt{\frac{3x^2}{3c - 2x^3}}.$$

Aufgabe 6.40. Lösen Sie die Differentialgleichungen

$$y' - 8xy^2 + 2y = 0, \qquad y' + y \cot x + y^2 = 0.$$

Aufgabe 6.41. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

$$y' = x^2y^2 - \frac{y}{x}, \qquad xy' = 4y + x^2\sqrt{y}, \quad y \geq 0.$$

6.1.7. *Die Riccatische Differentialgleichung.* Die *riccatische Differentialgleichung* ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x).$$

Sie ist nach dem Mathematiker *Jacopo Francesco Riccati* benannt, einem italienischen Grafen (1676 – 1754), der sich intensiv mit der Klassifizierung von Differentialgleichungen befasste und Methoden zur Reduzierung der Ordnung von Gleichungen entwickelte.

Eine allgemeine Integration der Riccati-Differentialgleichung ist mit den üblichen Methoden nicht möglich.

Angenommen, man hätte bereits eine Lösung $u(x)$ (etwa durch Raten) gefunden. Dann läßt sich die riccatische Differentialgleichung vollständig lösen, da das Auffinden der übrigen Lösungen sich nun auf eine bernoullische Differentialgleichung reduziert, welche leicht gelöst werden kann.

Satz 6.42. *Es sei $u(x)$ eine Lösung der riccatischen Differentialgleichung*

$$u'(x) = f(x)u^2(x) + g(x)u(x) + h(x)$$

und $z(x)$ eine Lösung der bernoullischen Differentialgleichung

$$z'(x) = f(x)z^2(x) + (2u(x)f(x) + g(x))z(x).$$

Dann ist $y(x) := z(x) + u(x)$ die Lösung der riccatischen Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= z'(x) + u'(x) \\ &= f(x)z^2(x) + (2u(x)f(x) + g(x))z(x) + f(x)u^2(x) + g(x)u(x) + h(x) \\ &= f(x)[z^2(x) + 2z(x)u(x) + u^2(x)] + g(x)[z(x) + u(x)] + h(x) \\ &= f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6.43. Die riccatische Differentialgleichung

$$y' = -(x+1)y^2 - y - \frac{x-3}{4x^2}$$

hat $u(x) = -\dfrac{1}{2x}$ als spezielle Lösung. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichug.

Aufgabe 6.44. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

$$(a) \qquad y' = y^2 - (2x+1)y + (1 + x + x^2).$$

Eine spezielle Lösung dieser Gleichung kann man in der Form $y(x) = ax + b$ finden.

$$(b) \qquad y' = e^{-x}y^2 + y - e^x.$$

Eine spezielle Lösung ist die Exponentialfunktion.

Aufgabe 6.45. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(t) = -2\,t + 3\,ty(t) - ty^2(t)$. Eine spezielle Lösung ist $y(t) = 1$.

Aufgabe 6.46. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

(a) $(x+\sqrt{xy})\,y'-y=0$;

(b) $y'-\dfrac{2}{x}\,y=x^2\,\sinh x$;

(c) $(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0$;

(d) $y\,y'=\sqrt{xy}$;

(e) $y'+(\cot x)\,y+y^2=0$; $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

6.2. **Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.** Die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die explizite Form $y''=f(x,y,y')$. Ihre allgemeine Lösung muß zwei willkürlich wählbare Konstanten enthalten und stellt geometrisch demnach eine zweiparametrige Kurvenschar dar.

Im einfachsten Fall $y''=0$ wird nach einer Integration $y'=c_1$ und nach einer nochmaligen Integration $y=c_1x+c_2$. Dies ist eine zweiparametrige Schar von Geraden, welche die xy-Ebene lückenlos überdecken.

Fragt man nach einer speziellen Lösungskurve, so ist jetzt die Angabe beider Konstanten notwendig.

Im allgemeinen definiert man eine Lösungskurve nicht durch Vorgabe des Konstantenpaares (c_1,c_2), sondern durch eine der folgenden Bedingungen:

1. *Anfangsbedingungen.* Es wird diejenige Integralkurve $y=y(x)$ gesucht, die durch einen bestimmten Punkt $P_0(x_0,y_0)$ läuft und dort eine bestimmte Steigung k_0 hat, d.h. $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=k_0$.

Diese zwei Bedingungen ergeben ein System von zwei Gleichungen für c_1 und c_2. Kann man aus diesem c_1 und c_2 eindeutig bestimmen, so ist das *Anfangswertproblem* eindeutig lösbar.

2. *Randbedingungen.* Es wird diejenige Integralkurve $y=y(x)$ gesucht, die durch zwei bestimmte Punkte $P_0(x_0,y_0)$ und $P_1(x_1,y_1)$ hindurchläuft, d.h. $y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$.

Das *Randwertproblem* ist eindeutig lösbar, wenn durch diese beiden Gleichungen die Konstanten c_1 und c_2 eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 6.47. (1) Vorgelegt sei die Differentialgleichung $y''=-2$, deren allgemeine Lösung $y=y(x,c_1,c_2)$ durch zweimaliges Integrieren leicht gewonnen werden kann.

(a) Ermitteln Sie diese.

(b) Welche partikuläre Lösung ist durch die Randbedingungen $y(1)=2,\ y(2)=1$ bestimmt?

(c) Lösen Sie (unabhängig von (*b*)) das Anfangswertproblem $y(3)=2,\ y'(3)=0$. Wie sieht diese Integralkurve aus?

(2) Die Differentialgleichung $y''+y=0$ hat die allgemeine Lösung $y=c_1\sin x+c_2\cos x$, was Sie durch Einsetzen sofort bestätigen können.

(a) Welche Anfangsbedingungen sind für $x_0=0$ vorzuschreiben, damit sich $y=\sin x$ als partikuläre Lösung ergibt?

(b) Welche Randbedingungen sind für $x_0=0$ und $x_1=\frac{\pi}{2}$ vorzuschreiben, damit sich $y=\sin x$ als partikuläre Lösung ergibt?

(c) Warum hat das Randwertproblem $y(0)=0,\ y(\pi)=0$ keine eindeutige Lösung?

6.2.1. *Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung - integrable Typen.*

Typus 1. $y'' = f(x)$. Beiderseitiges Integrieren führt zunächst auf $y' = \int f(x)\,dx + c_1$, nochmaliges Integrieren gibt $y = \int \left[\int f(x)\,dx\right]\,dx + c_1 x + c_2$ als allgemeine Lösung.

Typus 2. $y'' = f(y)$. Wir substituieren

$$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p$$

und erhalten in $\dfrac{dp}{dy}\,p = f(y)$ eine durch Veränderlichen-Trennung lösbare Differentialgleichung, d.i.

$$p\,dp = f(y)\,dy \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}p^2 = \int f(y)\,dy + c_1 \;\Rightarrow\; p = \sqrt{2\left(\int f(y)\,dy + c_1\right)}.$$

Die Resubstitution auf x erfolgt gemäß

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2\left(\int f(y)\,dy + c_1\right)} \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{\sqrt{2\left(\int f(y)\,dy + c_1\right)}} \;\Rightarrow$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\left(\int f(y)\,dy + c_1\right)}} + c_2.$$

Typus 3. $y'' = f(y')$. Die Substitution

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

führt auf die Gleichung

$$\frac{dp}{dx} = f(p) \;\Rightarrow\; dx = \frac{dp}{f(p)} \;\Rightarrow\; x = \int \frac{dp}{f(p)} + c_1,\; f(p) \neq 0.$$

Andererseits ergibt die Ableitung der Substitutionsgleichung

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

bei Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung

$$p\,\frac{dp}{dy} = f(p) \;\Rightarrow\; dy = \frac{p\,dp}{f(p)} \;\Rightarrow\; y = \int \frac{p}{f(p)}\,dp + c_2.$$

Die beiden Gleichungen

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + c_1, \quad y = \int \frac{p}{f(p)}\,dp + c_2$$

sind eine Parameterdarstellung der allgemeinen Lösung.

Typus 4. $y'' = f(x, y')$. Die Substitution

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx}$$

führt auf die Differentialgleichung erster Ordnung $\dfrac{dp}{dx} = f(x,p)$. Falls diese eine geschlossene Lösung $p = \varphi(x,c_1)$ hat, kann man durch Variablentrennung

$$p = \frac{dy}{dx} = \varphi(x,c_1) \quad \Rightarrow \quad dy = \varphi(x,c_1)\,dx$$

als allgemeine Lösung $y = \displaystyle\int \varphi(x,c_1)\,dx + c_2$ gewinnen.

Typus 5. $y'' = f(y,y')$. Die Substitution

$$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p$$

führt auf die Differentialgleichung erster Ordnung $p\,\dfrac{dp}{dy} = f(y,p)$. Falls sich daraus p als Funktion von y explizit gemäß $p = \psi(y,c_1)$ gewinnen läßt, so folgt

$$p = \frac{dy}{dx} = \psi(y,c_1) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\psi(y,c_1)},\ \psi(y,c_1) \neq 0,$$

und als allgemeine Lösung $x = \displaystyle\int \frac{dy}{\psi(y,c_1)} + c_2$.

Aufgabe 6.48. (1) Lösen Sie das Randwertproblem

$$(x^2 - x - 6)\,y'' + x = 8, \quad y(4) = 1 - 12\ln 6, \quad y(-1) = -4 - 8\ln 2.$$

(2) Welche Lösung hat das Anfangswertproblem

$$y^2 y'' + 1 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1?$$

Hinweis: Bestimmen Sie die erste Integrationskonstante bereits nach Ausführung der ersten Integration.

(3) Welche Integralkurve der Differentialgleichung

$$2\,y'' - y'^3 = 0$$

verläuft unter dem Winkel $\alpha_0 = 45°$ durch den Punkt $P_0(1,3)$?

(4) Gesucht ist die Lösung der Randwertaufgabe

$$x\,y'' - 2\,y' = x^3\cos x, \quad y(0) = 2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

(5) Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$(1 + y^2)\,y'' - y\,y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Aufgabe 6.49. Lösen Sie die Differentialgleichungen

$$y'' + y = \cos(2x), \quad y(0) = p > 0, \quad y'(0) = 0;$$

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2};$$

$$16y'' - 8y' + 145\,y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1;$$

$$y'' = -\omega^2 \sin y, \quad \omega = \mathit{Konstante};$$

$$y'' = yy'.$$

Aufgabe 6.50. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

$$y'' + y = x^2 + x + 1;$$
$$y'' - y = \cosh(2x).$$

Aufgabe 6.51. Für welche Werte des Parameters λ besitzt das folgende Randwertproblem nichttriviale Lösungen und wie lauten diese?

$$y'' - 2y' + y + \lambda y = 0; \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0.$$

Aufgabe 6.52. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen und geben Sie insbesondere die den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ genügende Lösung an. *a*) $y'' + y' - 2y = 0$; *b*) $y'' - 2y' + 5y = 0$; *c*) $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Aufgabe 6.53. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils die maximale Definitionsmenge an:

(a) $y' = y^2, \quad y(2) = 1;$
(b) $y' = e^y \cos x, \quad y(0) = 0;$
(c) $y' = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}};$
(d) $y' = y \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$
(e) $y' = (xy)^2, \quad y(-3) = -1;$
(f) $y' = |y|, \quad y(0) = -1.$

Aufgabe 6.54. Man bestimme jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen sowie die zum Anfangswert gehörende spezielle Lösung:

(a) $y' + y = 2\cos x, \quad y(0) = -1;$
(b) $y' + y \sin x = \sin x, \quad y(0) = 2;$
(c) $y' + \frac{y}{x} = x^2,\ x \neq 0, \quad y(2) = 3;$
(d) $y' - 5y = \cos x - 4 \sin x, \quad y(0) = 0.$

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

1. H.v.Mangoldt, K. Knopp, *Einleitung in die Höhere Mathematik*, Verlag von S. Hirzel in Leipzig, Erster Band, 1944; Zweiter Band, 1959; Dritter Band, 1963.

2. G. Grüss, *Differential- und Integralrechnung*, Akad. Verlagsgeselschaft Geest, Portig K.-G., Leipzig, 1953.

3. G. Böhme, *Anwendungsorientierte Mathematik*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Erster Band, 1974; Zweiter Band, 1975; Dritter Band, 1976.

4. *Mathematik für Wirtschaftswissenschaften*, Fachschullehrbuch, Verlag "Die Wissenschaft", Berlin, 1986.

5. Веселка Михова, *Ръководство по Аналитична Геометрия*, Унив. Изд. "Св. Кл. Охридски София, 1998.

Sofia, 2012