Dr. Werner Klein
Universität zu Köln
Staatswissenschaftliches Seminar

e.-mail: w.klein.wisofak@uni-koeln.de

Grundzüge der Mikroökonomik

4 Exkurs: Elastizitätsbegriffe

Allgemeiner Elastizitätsbegriff (Punktelastizität)

Der *Elastizitätskoeffizient* (die Punktelastizität) beschreibt das Verhältnis der *relativen* Veränderung einer abhängigen Variablen (y) aufgrund einer *relativen* Veränderung einer unabhängigen Variablen (x).

Es sei:

$$(1)\quad y = f(x)$$

Der hierauf bezogene Elastizitätskoeffizient heißt dann (verbal)

$$(2)\quad \varepsilon_{(y,x)} = \frac{relative\ \ddot{A}nderung\ von\ (y)}{relative\ \ddot{A}nderung\ von\ (x)}$$

Es sei:

$$(3) \quad E_{(y)} = \frac{dy}{y} \longrightarrow \textbf{relative Veränderung von y}$$

und

$$(4) \quad E_{(x)} = \frac{dx}{x} \longrightarrow \textbf{relative Veränderung von x}$$

Somit ergibt sich nach Gleichungen (2), (3) und (4)

$$(5a) \quad \varepsilon_{(y,x)} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{y} \div \frac{dx}{x}$$

$$(5b) \quad \varepsilon_{(y,x)} = \frac{dy}{y} \cdot \frac{x}{dx}$$

$$(5c) \quad \boxed{\varepsilon_{(y,x)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}}$$

Zwei wichtige Momente für die korrekte Anwendung dieser

Vorschrift auf ökonomische Phänomene sind zu beachten:

- **die ökonomisch richtige Interpretation der Kausalzusammenhänge (Bestimmung der abhängigen und der unabhängigen Variablen) und daraus folgend**

- **die Bestimmung des Vorzeichens des Koeffizienten (+),oder (-)oder 0.**

Direkte Preiselastizität der Nachfrage

Es wird der Zusammenhang zwischen der *Nachfrageveränderung* nach einem Gut, z. B. (x) und der dies bewirkenden Änderung des *Preises dieses Gutes*, also (p_x) analysiert.
In richtiger ökonomischer Interpretation heißt die Nachfragefunktion des Marktes und unter Berücksichtigung des allgemeinen Funktionalzusammenhangs:

Nach der Formel des Elastizitätskoeffizienten ergibt sich daraus :

$$(1)\ y = f(x) \longrightarrow (1)\ x = f(p)$$

$$(2)\ \varepsilon_{(y,x)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \boxed{(2)\ \varepsilon_N = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}}$$

Ein negatives Vorzeichen des Koeffizienten ergibt sich bei einer normal verlaufenden Nachfragekurve aus der Tatasache, daß der Differentialquotient in Gleichung (2) diesen Effekt generiert:

Falls der Preis (p) *sinkt* gilt :

$$(3)\ \frac{(+)dx}{(-)dp}$$

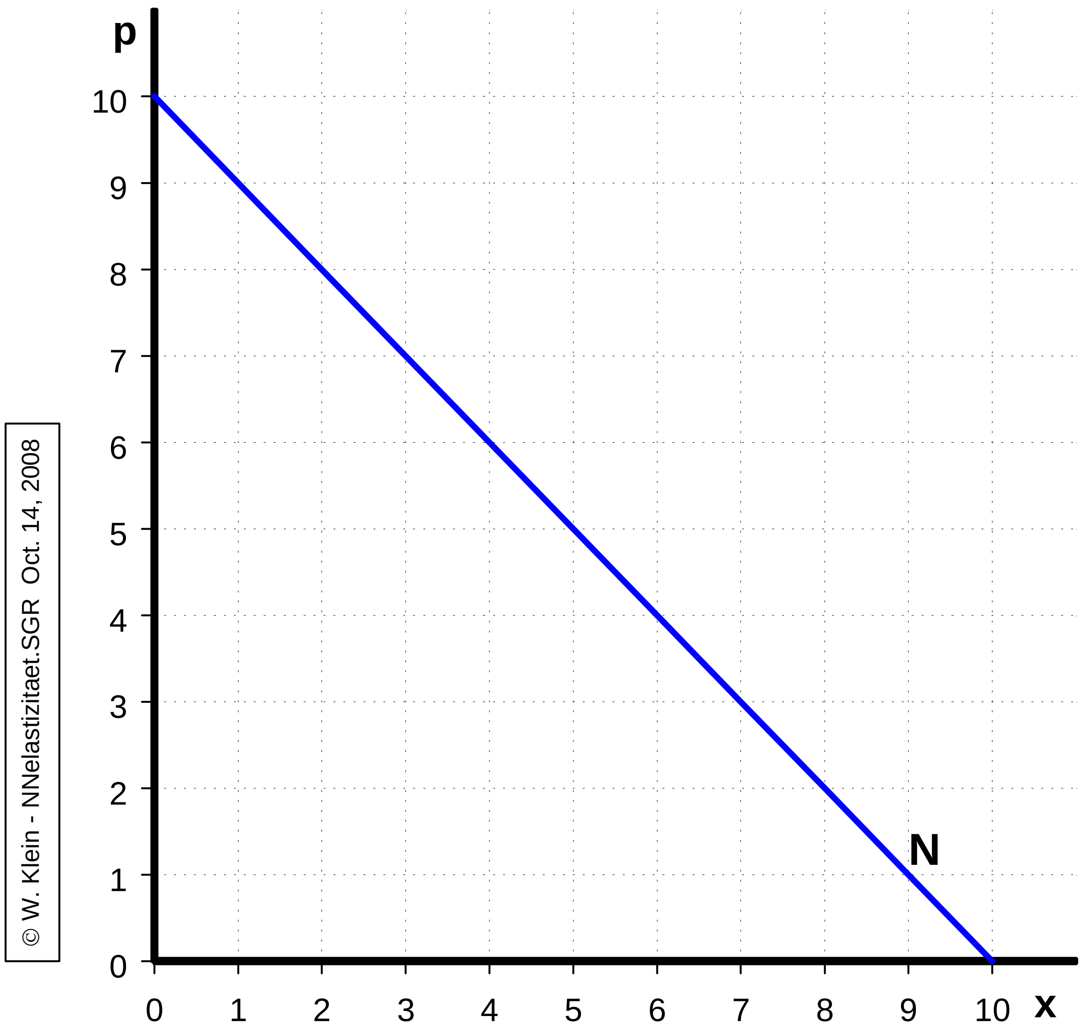
Falls der Preis (p) *steigt* gilt:

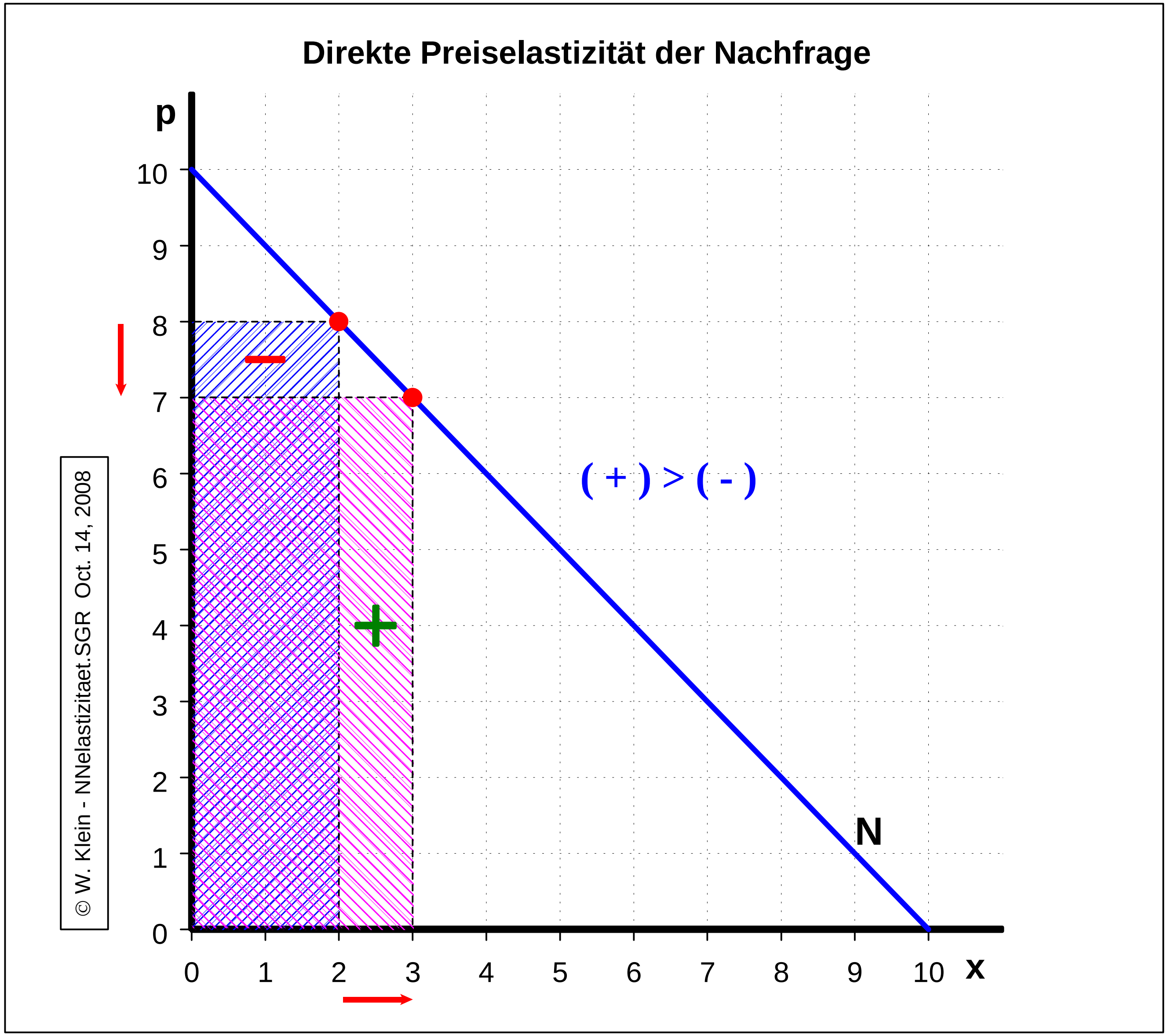
$$(4)\ \frac{(-)dx}{(+)dp}$$

Somit läßt sich auch schreiben:

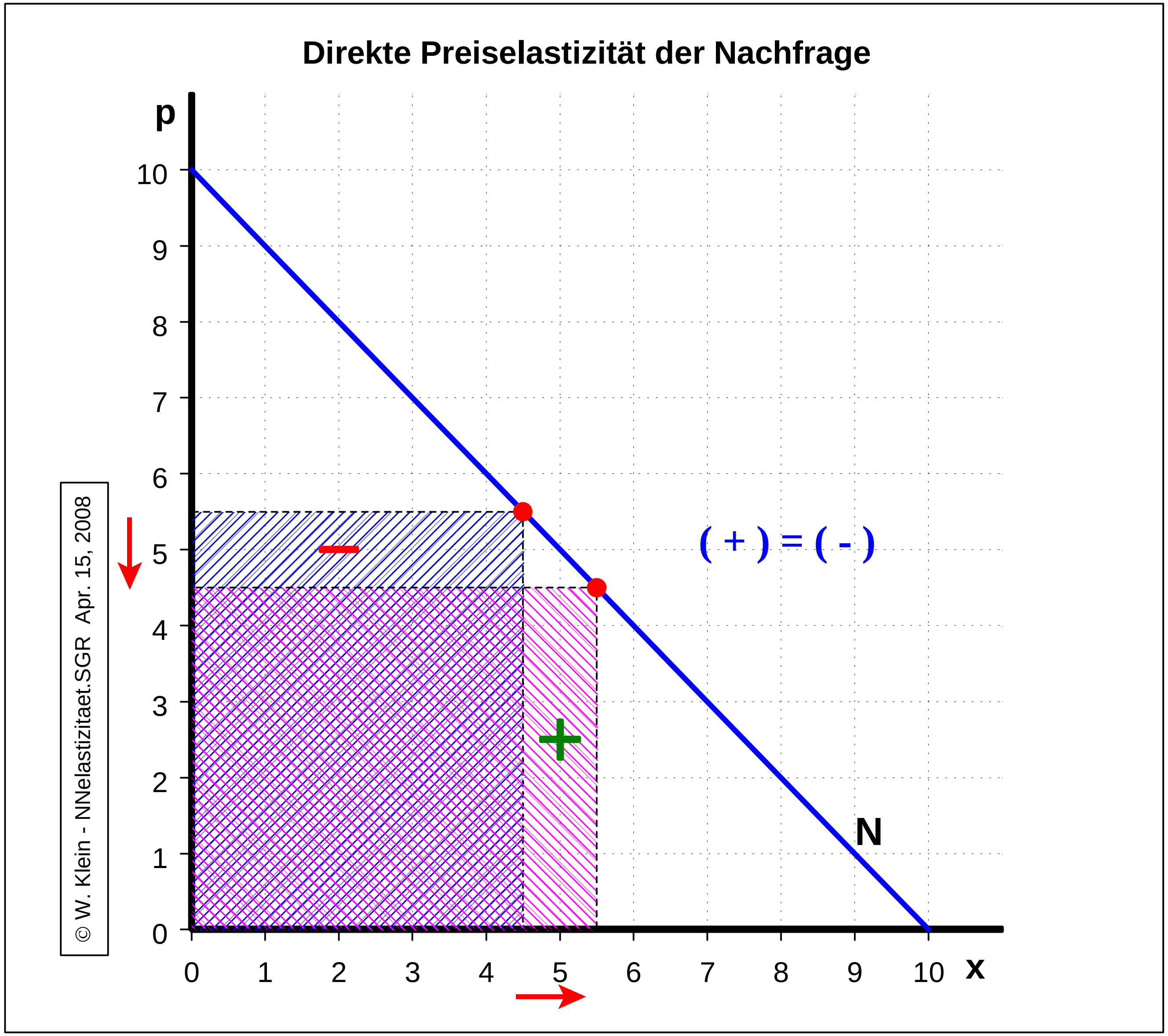
$$(5)\varepsilon_N = -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} \quad oder \quad (6)|\varepsilon_N| = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

Direkte Preiselastizität der Nachfrage

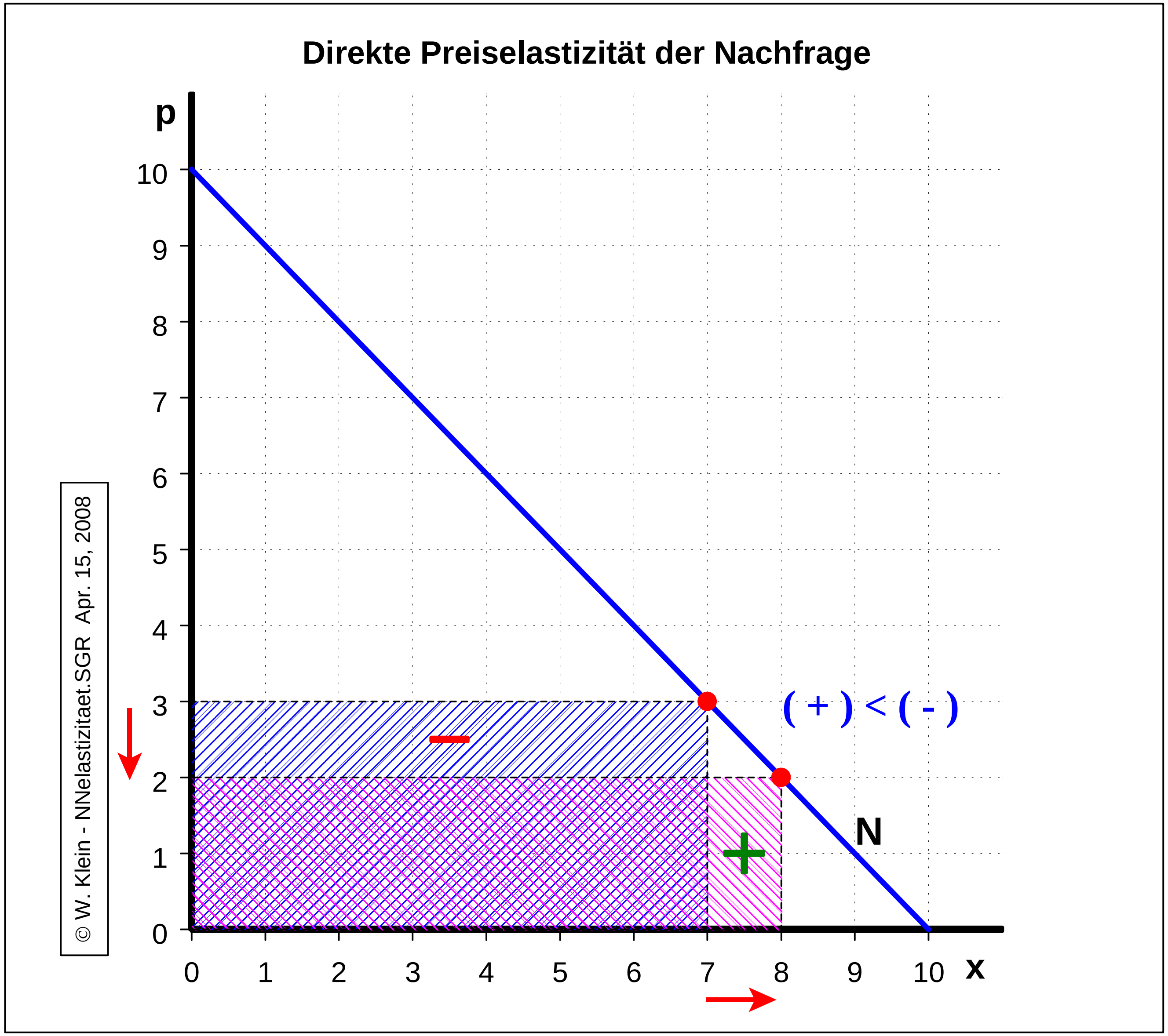


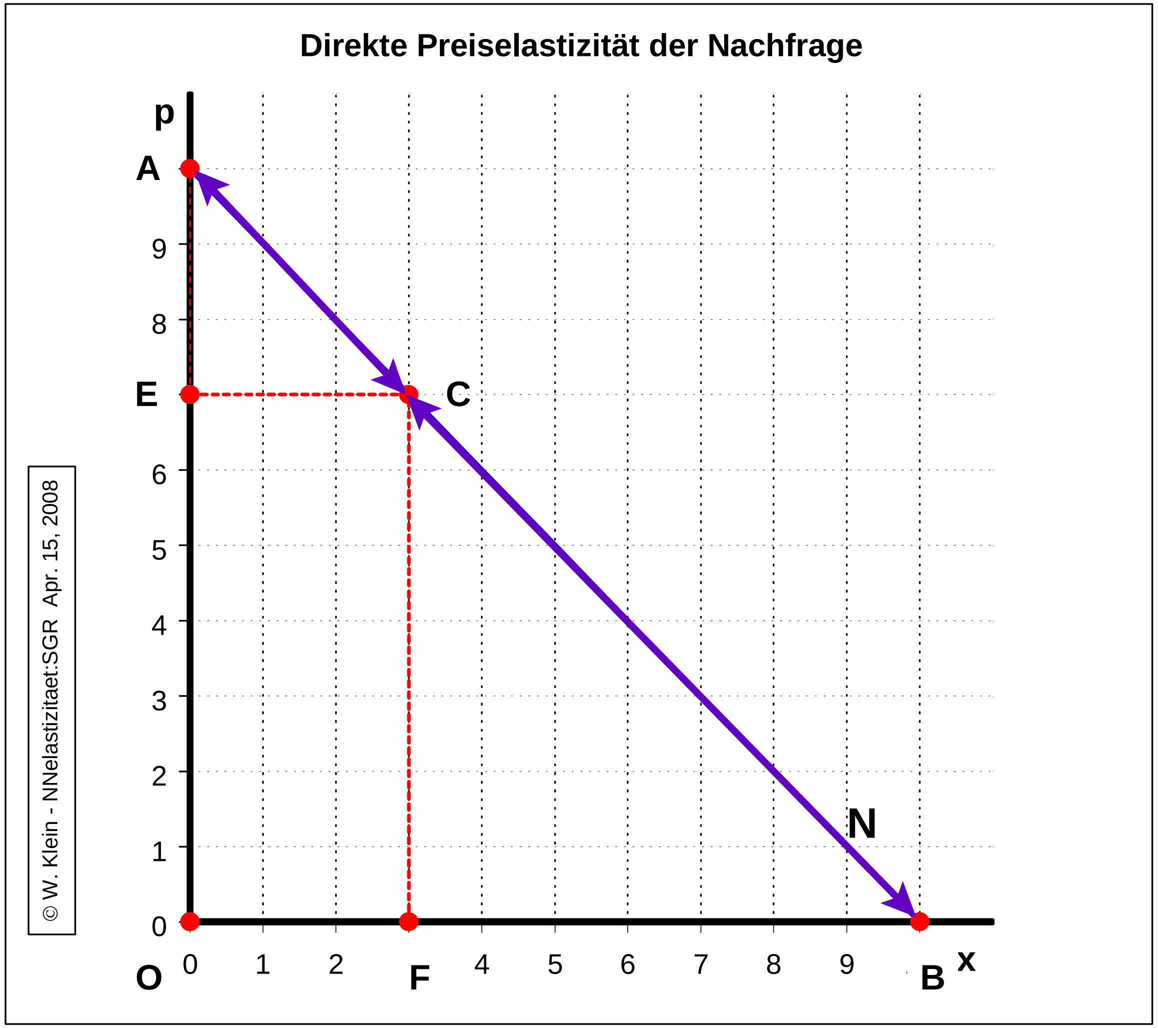


Direkte Preiselastizität der Nachfrage
p
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−
+
(+) > (-)
N
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
© W. Klein - NNelastizitaet.SGR Oct. 14, 2008

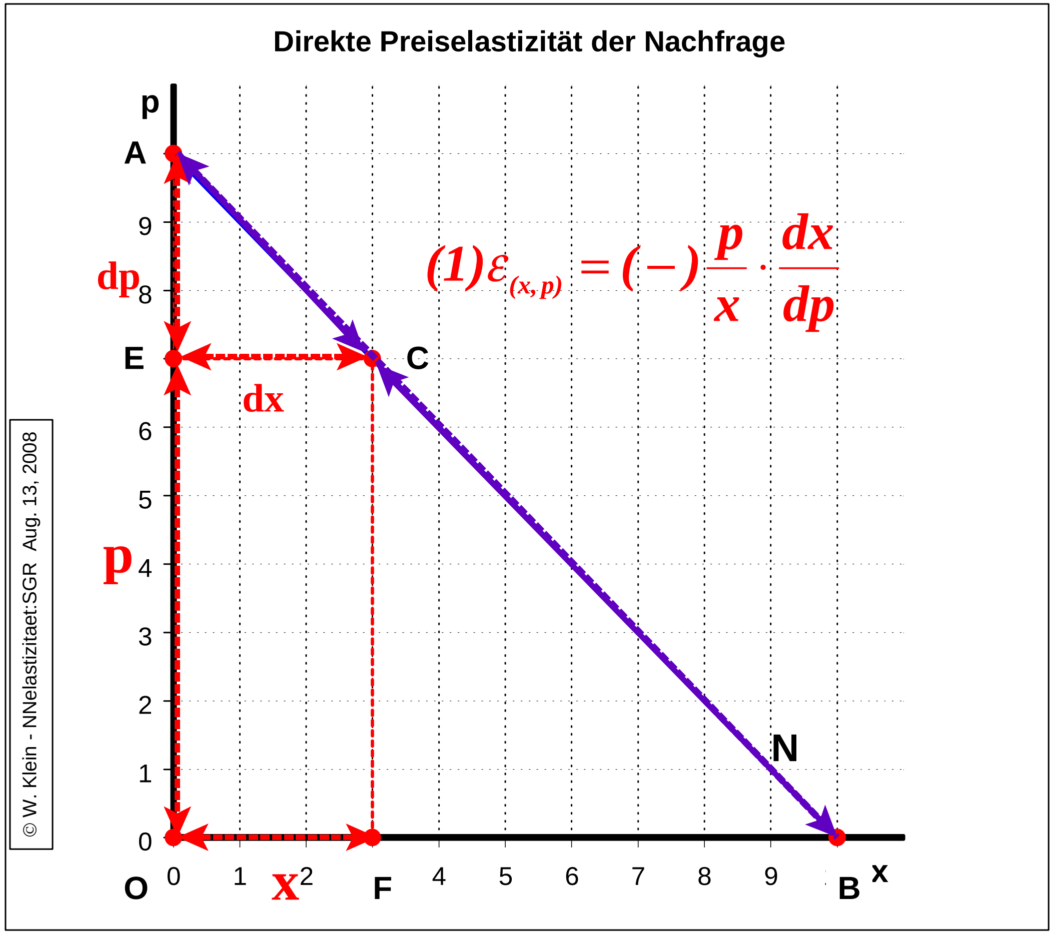


Direkte Preiselastizität der Nachfrage
p
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
N
(+) = (-)
© W. Klein - NNelastizitaet.SGR Apr. 15, 2008


Direkte Preiselastizität der Nachfrage
p
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
(+) < (-)
N
© W. Klein - NNelastizitaet.SGR Apr. 15, 2008



Für eine *lineare Nachfragefunktion* läßt sich das Maß der Punktelastizität als das Verhältnis der Strecken CB zu AC darstellen. Dies ergibt sich aus den folgenden Überlegungen.



- **Entlang einer linearenNachfragefunktion ist deren Steigung konstant, d.h.: *dx/dp* = konstant!**
- **Somit gilt dann auch:**

  ***dx/dp* = EC/AE**

- **Im Punkt C gilt zudem:**

  ***p/x* = EO/OF**

- **Für den Ausdruck des Koeffizienten der direkten Preiselastizität der Nachfrage läßt sich somit auch schreiben:**

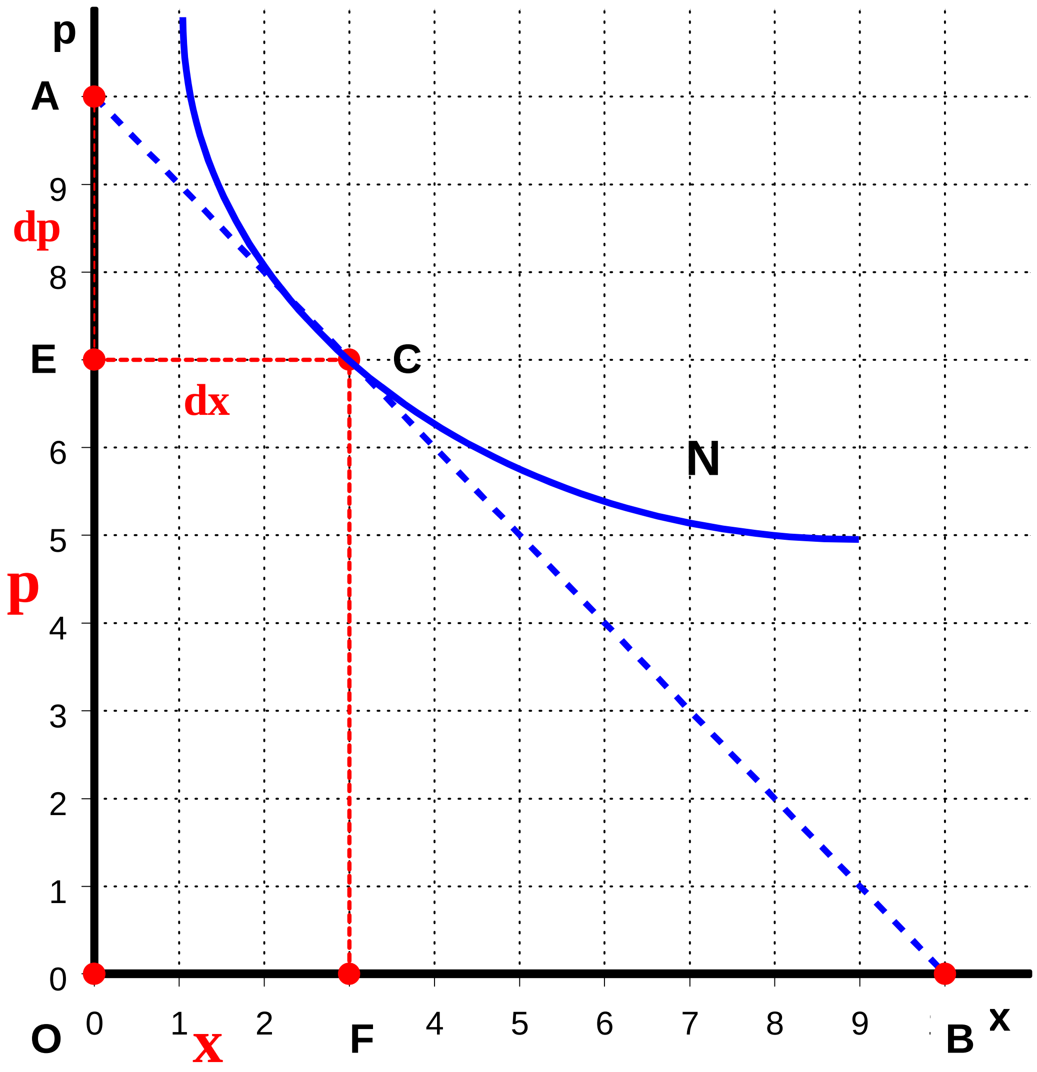
$\epsilon_{(x,p)}$ **= (-)[EO/OF]•[EC/AE]**

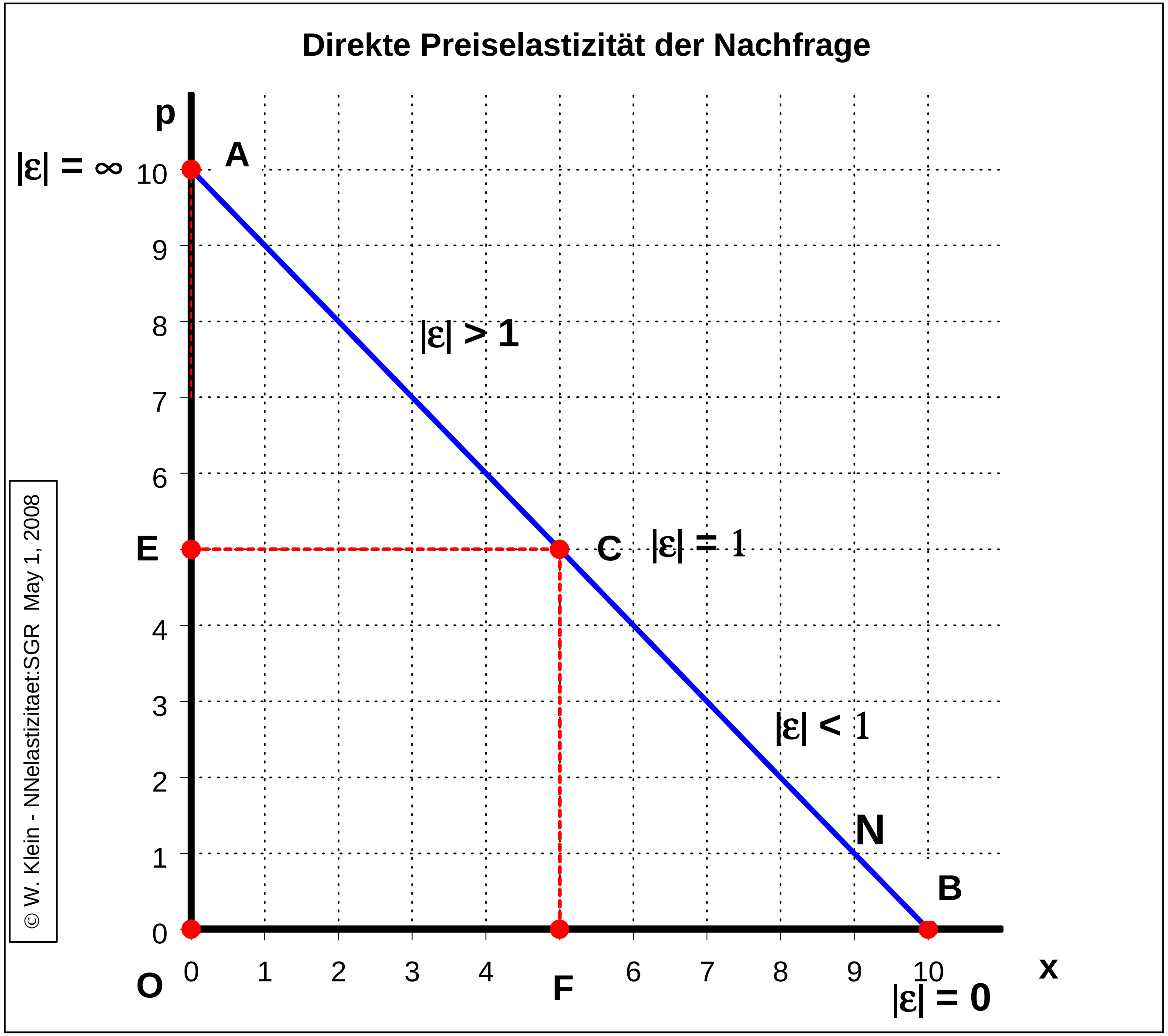
- **Da EC = OF gilt auch:**

$\epsilon_{(x,p)}$ **= (-)[EO/OF]•[OF/AE]**
= (-) EO/AE

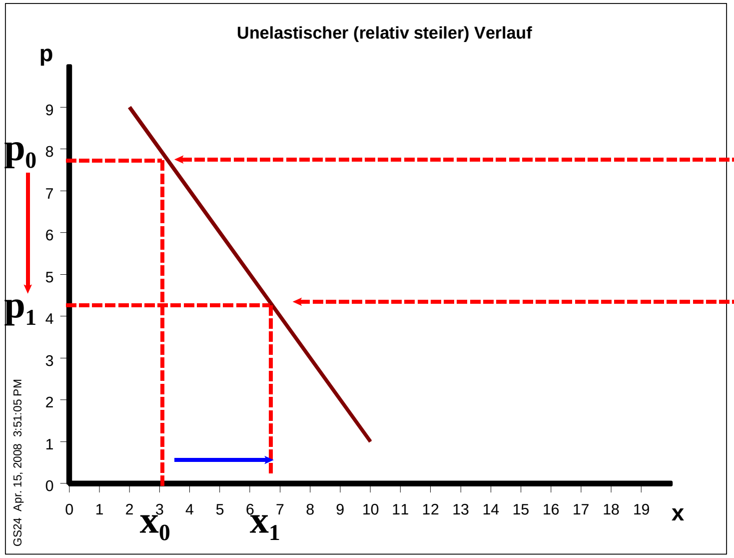
Laut Strahlensatz gilt somit auch: EO/AE = CB/AC

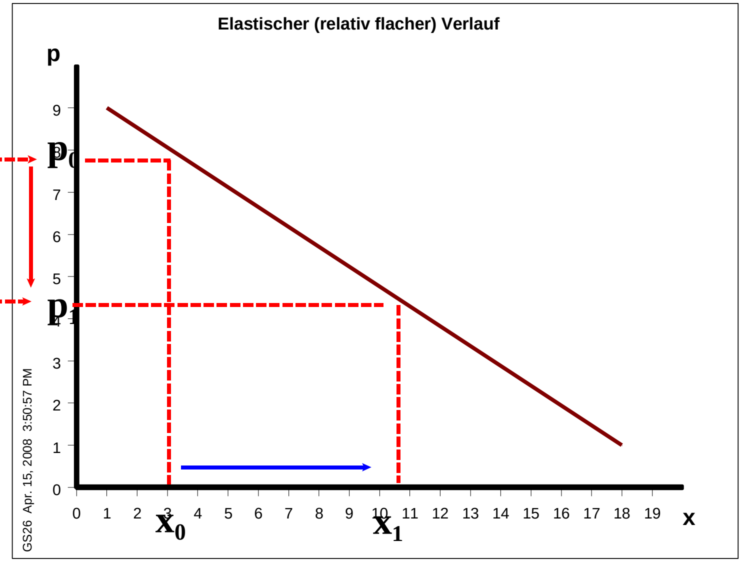
Direkte Preiselastizität der Nachfrage - nichtlineare Nachfragefunktion

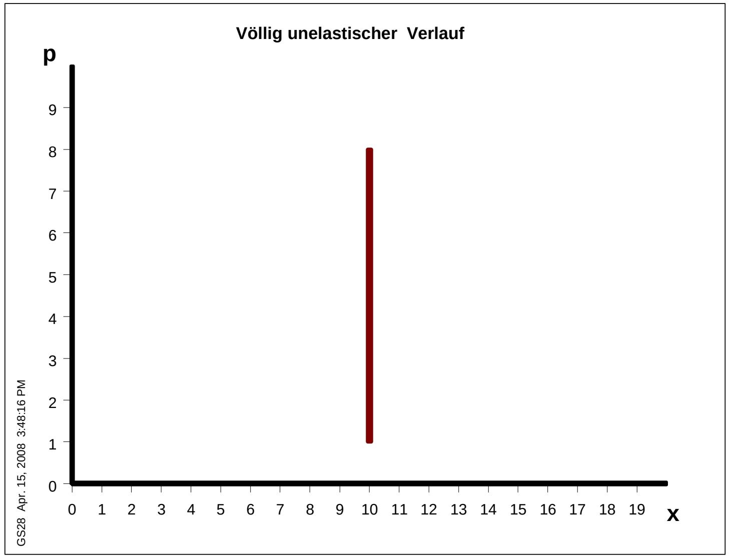


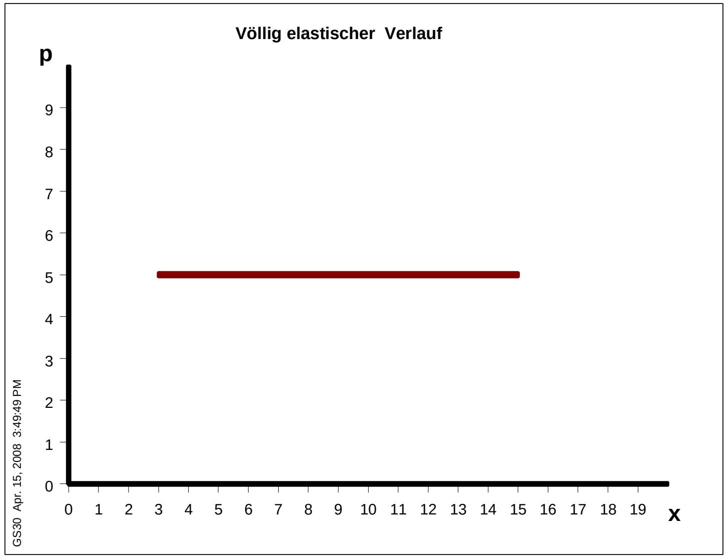

Direkte Preiselastizität der Nachfrage
p
|ε| = ∞
A
10
9
8
7
6
E
4
3
2
1
0
|ε| > 1
C
|ε| = 1
|ε| < 1
N
B
O
0
1
2
3
4
F
6
7
8
9
10
x
|ε| = 0
© W. Klein - NNelastizitaet:SGR May 1, 2008

Elastischer - unelastischer Verlauf einer Nachfragekurve

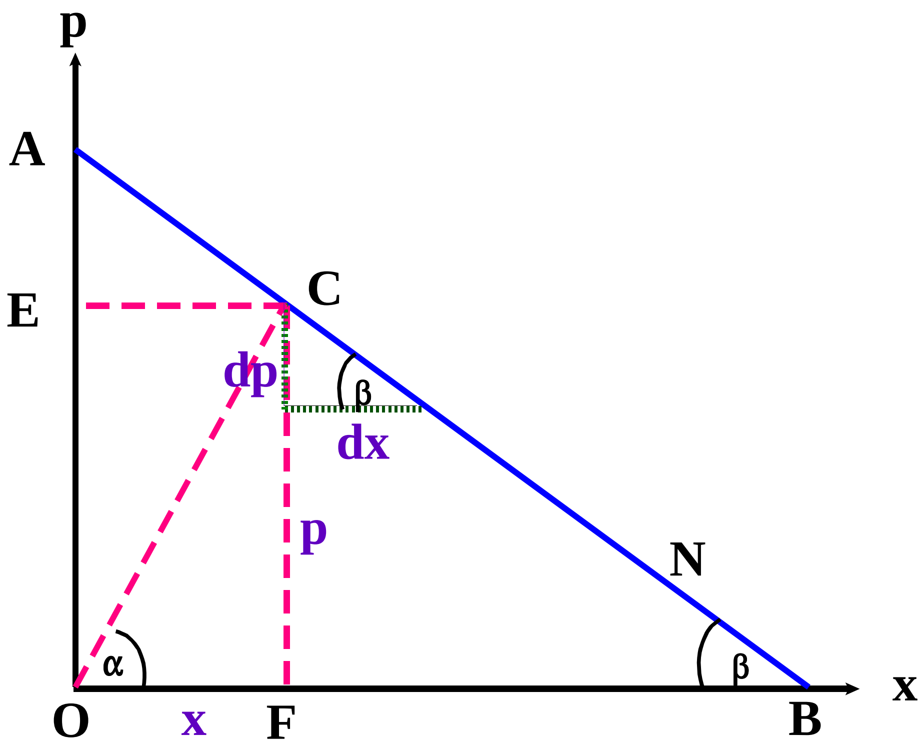








Trigonometrische Bestimmung der direkten Preiselastizität der Nachfrage bei einer linearen Nachfragefunktion



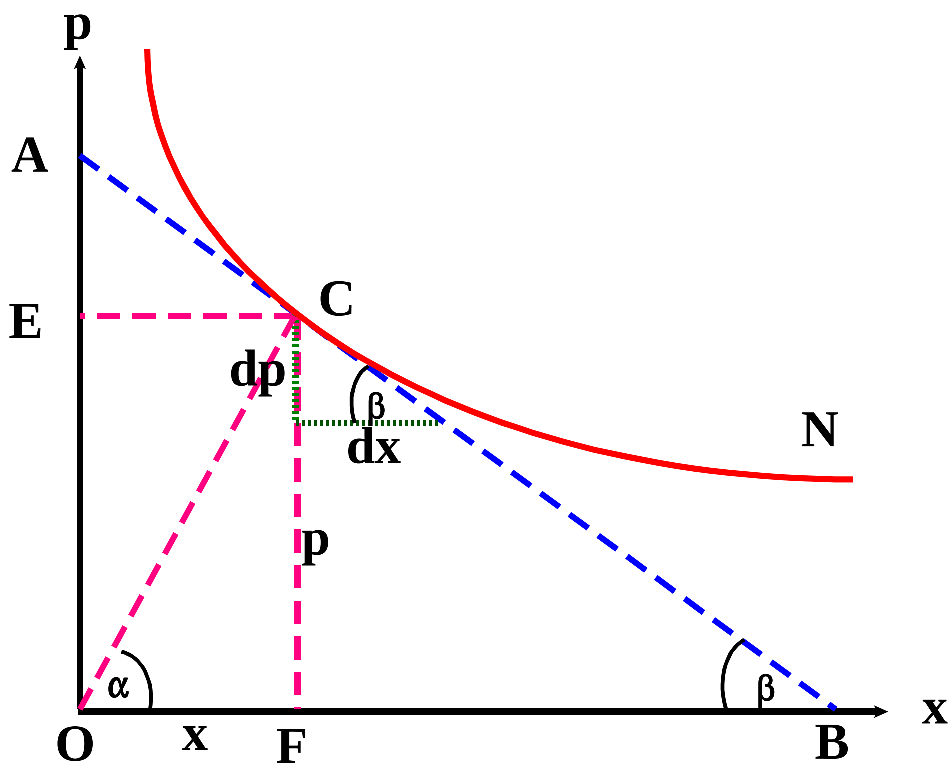
$$(1)\ \varepsilon_N = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

$$(3)\ \cot\beta = -\frac{dx}{dp}$$

$$(2)\ tg\alpha = \frac{p}{x}$$

$$\boxed{(4)\ \varepsilon_N = -\frac{tg\alpha}{tg\beta}}$$

Trigonometrische Bestimmung der direkten Preiselastizität der Nachfrage bei einer nicht-linearen Nachfragefunktion



(1) $\varepsilon_N = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

(3) $\cot \beta = -\frac{dx}{dp}$

(2) $tg\alpha = \frac{p}{x}$

(4) $\boxed{\varepsilon_N = -\frac{tg\alpha}{tg\beta}}$

Aufgabe

Die Funktion einer (linear und normal verlaufenden) Nachfragefunktion (NN’) für ein Gut (x) in Abhängigkeit seines Preises (p) sei wie folgt gegeben:

$$(1)\ p = 10 - 0{,}5x$$

Bestimmen Sie den Wert (Betrag) der direkten Preiselastizität der Nachfrage $\epsilon_N = (p/x)(dx/dp)$ für

- **p = 8**
- **x = 10**
- **p = 2**

Lösung: Aufgabe 16

$$p = 10 - 0{,}5x; \quad \varepsilon_N = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} \quad x = f(p)$$

$$-----------------------$$

$$x = 20 - 2p \quad x' = \frac{dx}{dp} = -2$$

$$-----------------------$$

$$Beispiel\ 1:\ p = 8;$$

$$(1)8 = 10 - 0{,}5x \Rightarrow (2)\,x = 4$$

$$(3)\varepsilon_N = \frac{8}{4} \cdot -2 = -4$$

$$------------------------$$

$$Beispiel\ 2:\ x = 10$$

$$(1)\,p = 10 - 0{,}5 \cdot 10 \Rightarrow (2)\,p = 5$$

$$(3)\varepsilon_N = \frac{5}{10} \cdot -2 = -1$$

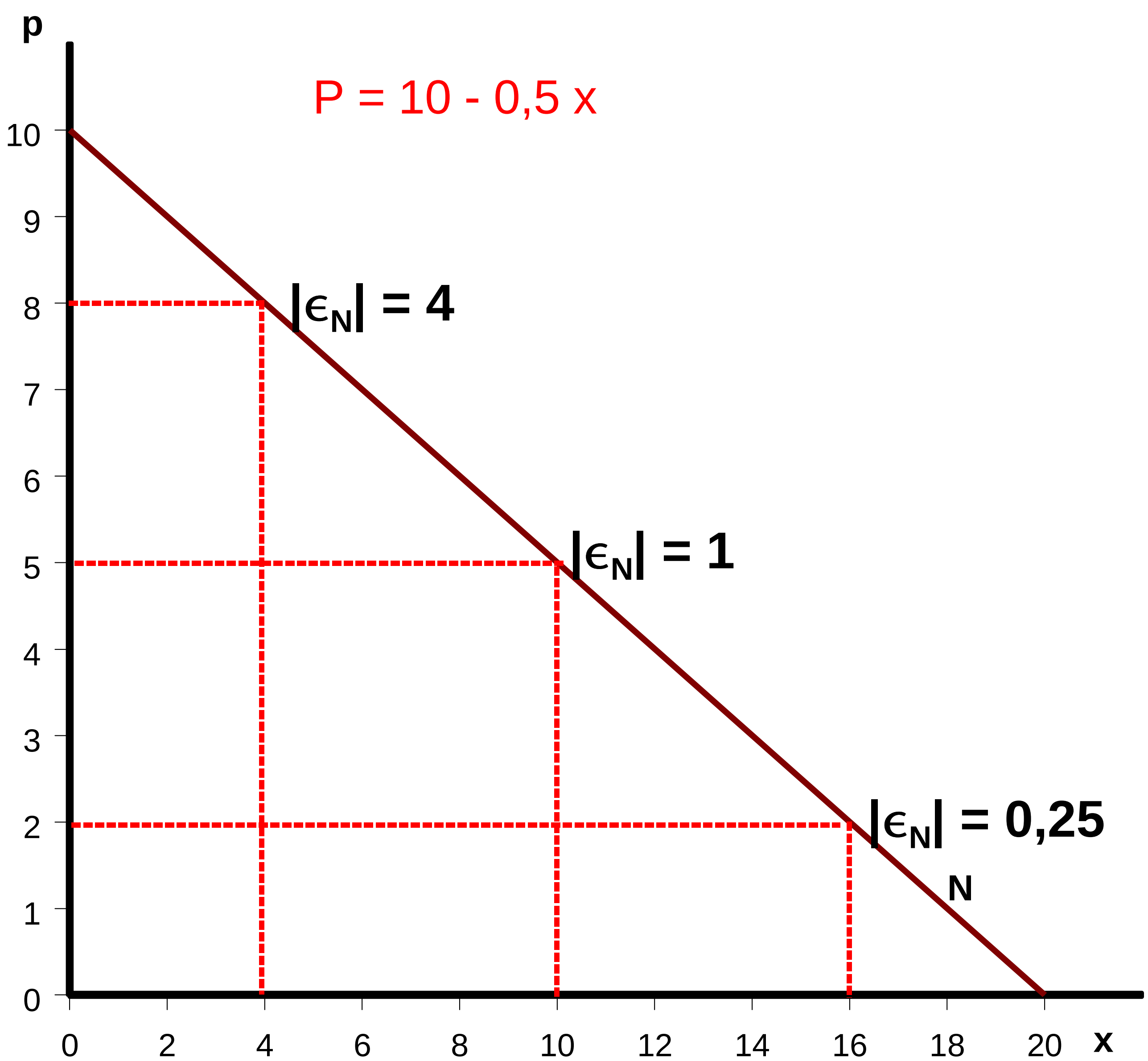
$$------------------$$

$$Beispiel\ 3:\ p = 2;$$

$$(1)2 = 10 - 0{,}5x \Rightarrow (2)\,x = 16$$

$$(3)\varepsilon_N = \frac{2}{16} \cdot -2 = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

Direkte Preiselastizität der Nachfrage - Beispiel



Kreuzpreiselastizität der Nachfrage

Es wird der Zusammenhang zwischen der *Nachfrageveränderung* nach einem Gut, z. B. (x_1) und der dies bewirkenden Änderung des *Preises eines anderen Gutes* (x_{2}), also (p_2)analysiert.

In richtiger ökonomischer Interpretation heißt die Nachfragefunktion des Marktes:

$$(1)\ y = f(x) \longrightarrow (1)\ x_1 = f(p_2)$$

Der hierauf bezogene Koeffizient der Kreuzpreiselastizität lautet dann:

$$(2)\ \varepsilon_{(y,x)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \longrightarrow \boxed{(2)\ \varepsilon_K = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{dx_1}{dp_2}}$$

Vermittels des Kreuzpreiselastizitätskoeffizienten lassen sich die Eigenschaften der über diesen Koeffizienten verbundenen Güter bestimmen. Es sei p_2 *gesunken.*

$$(3)\ \varepsilon_K = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{(+)dx_1}{(-)dp_2}$$

$\epsilon_{K)} < 0$. Komplementäre Güter

$$(4)\ \varepsilon_K = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{(-)dx_1}{(-)dp_2}$$

$\epsilon_{K)} > 0$. Substitutive Güter

$$(5)\ \varepsilon_K = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{(0)dx_1}{(-)dp_2}$$

$\epsilon_{K)} = 0$. Neutrale Güter

Einkommenselastizität

Es wird der Zusammenhang zwischen der *Nachfrageveränderung* nach einem Gut, z. B. (x) und der dies bewirkenden Änderung des *Einkommens(Y)* analysiert.

In richtiger ökonomischer Interpretation heißt die entsprechende Funktion:

$$(1)\ y = f(x) \longrightarrow (1)\ x = f(Y)$$

Der hierauf bezogene Koeffizient der Einkommenselastizität lautet dann:

$$(2)\ \varepsilon_{(y,x)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \longrightarrow \boxed{(2)\ \varepsilon_{Y} = \frac{Y}{x} \cdot \frac{dx}{dY}}$$

Güterkategorien:

$\epsilon_Y > 1$ → superiores Gut

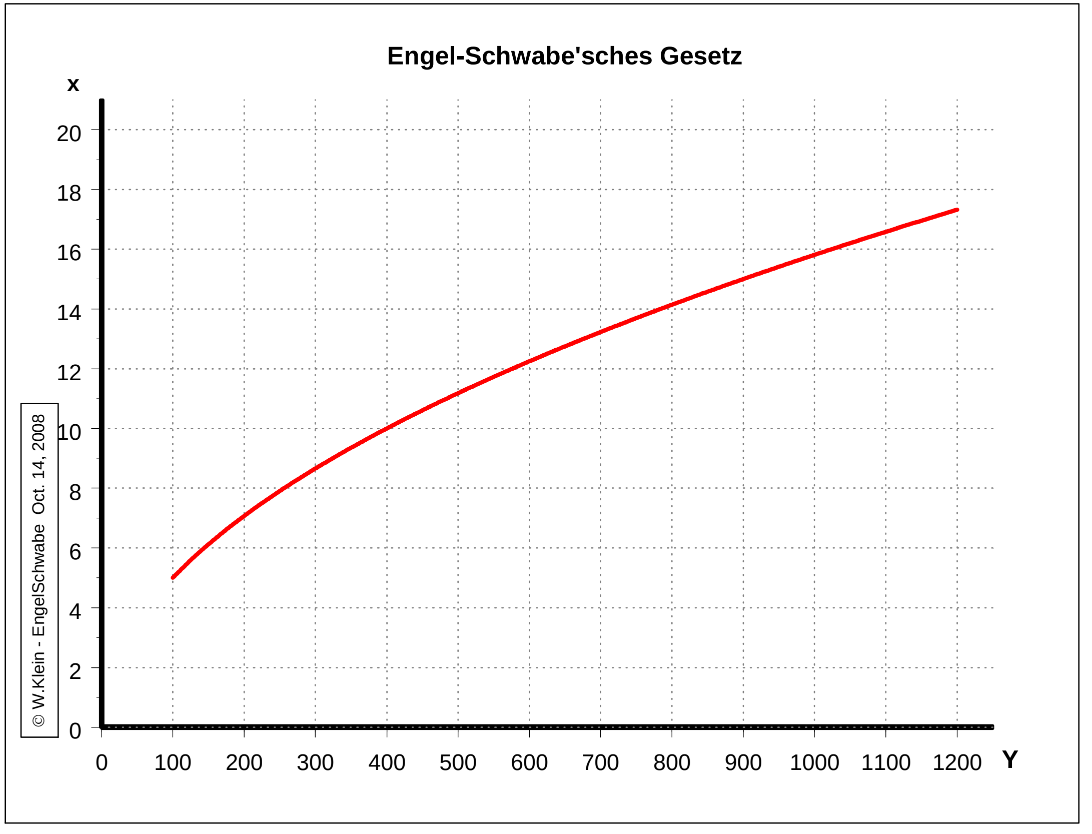
$0 < \epsilon_Y < 1$ → inferiores Gut

$\epsilon_Y < 0$ → absolut inferiores Gut

Das ENGEL-SCHWABEsche Gesetz beschreibt den Umstand, daß mit zunehmendem Einkommen die Ausgaben für bestimmten Güter (Grundnahrungsmittel, Mietwohnraum) *unterproportional* steigen, d. h. die Nachfrage (x) nach diesen Gütern unterprortional zum Einkommensanstieg zunimmt!
Diese Güter sind somit als relativ inferiore zu qualifizieren, weil deren Einkommenselastizität den Wert $0 < \epsilon_Y < 1$ aufweist. Eine Funktion, die diesen Umstand beschreibt, kann wie folgt formuliert werden:

$$(1) x = aY^b \quad mit \quad a > 0 \quad und \quad 0 < b < 1$$

$$x = 0{,}5Y^{1/2}$$



Direkte Preiselastizität des Angebots

Es wird der Zusammenhang zwischen der *Angebotsveränderung* eines Gutes, z. B. (x) und der dies bewirkenden Änderung des *Preises dieses Gutes*, also (p)analysiert.

In richtiger ökonomischer Interpretation heißt die Angebotsfunktion des Marktes:

$$(1)\; y = f(x) \longrightarrow (1)\; x = f(p)$$

Nach der Formel des Elastizitätskoeffizienten und unter der Annahme

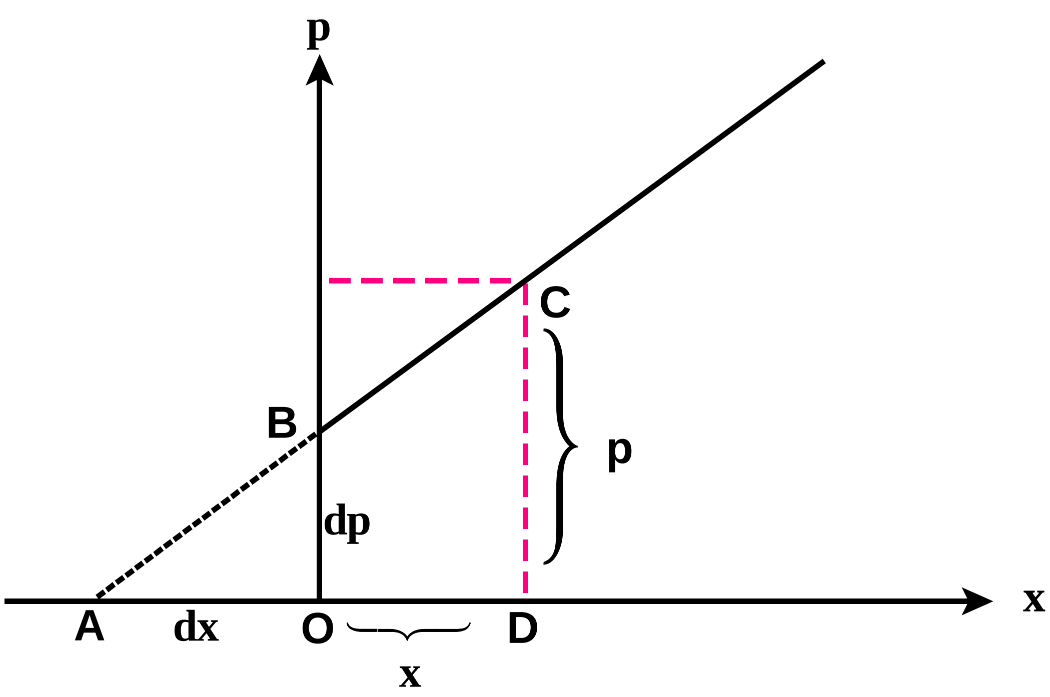
einer "normal" verlaufenden Angebotsfunktion (-kurve) ergibt sich

daraus:

$$(2)\; \varepsilon_{(y,x)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \longrightarrow \boxed{(2)\quad \varepsilon_A = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}}$$

Die Preiselastizität des Angebots im Punkt C

Preiselastizität im Punkt C = AD/OD

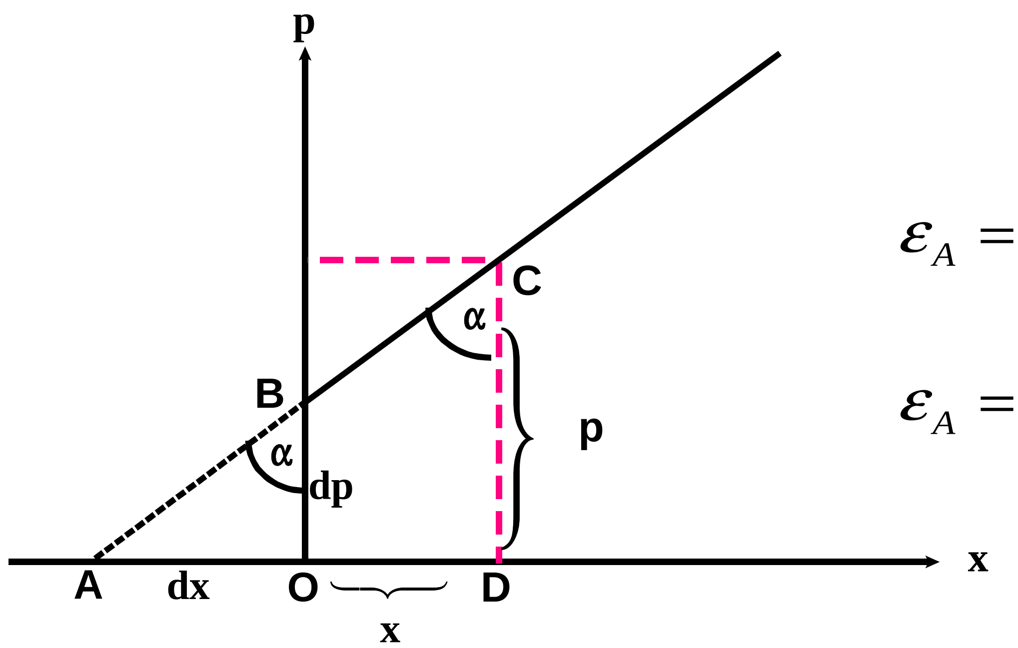


Für eine lineare Angebotsfunktion ergibt sich als Maß der Punktelastizität das Verhältnis der Strecken AD zu OD. Dies ergibt sich aus den folgenden Überlegungen.

Preiselastizität des Angebots im Punkt C

- Entlang einer linearen Angebotsfunktion ist deren Steigung konstant, d.h. dx/dp = konstant
- Somit gilt dann auch: dx/dp = AO/BO = AD/CD
- Im Punkt C gilt zudem: p/x = CD/OD

Preiselastizität im Punkt C = AD/OD



$$\varepsilon_A = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

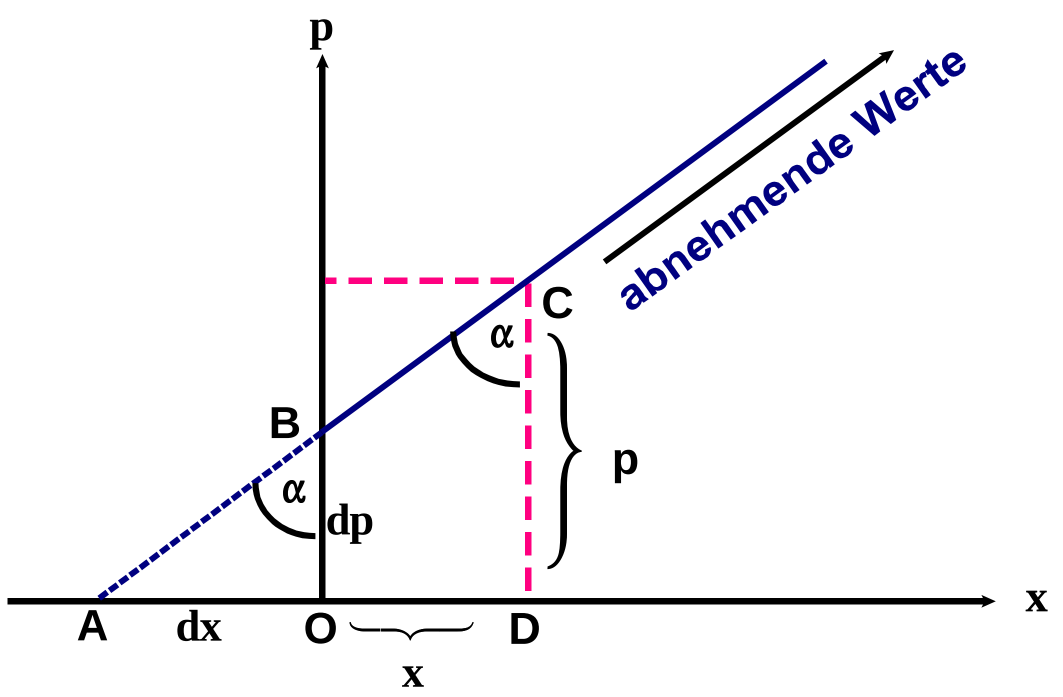
$$\varepsilon_A = \frac{\cancel{CD}}{OD} \cdot \frac{AD}{\cancel{CD}} = AD / OD$$

Die Preiselastizität des Angebots im Punkt C

- Somit läßt sich für die direkte Preiselastizität des Angebots auch schreiben:
- ϵ_A = CD/OD •AD/CD = AD/OD

q.e.d.

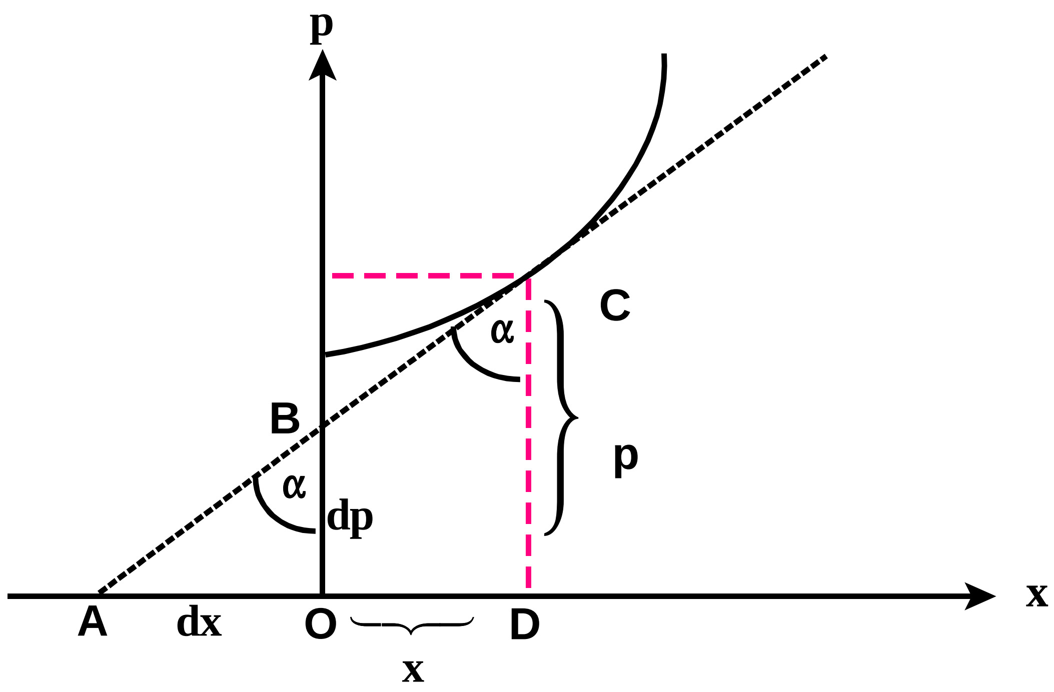
Preiselastizität im Punkt C = AD/OD



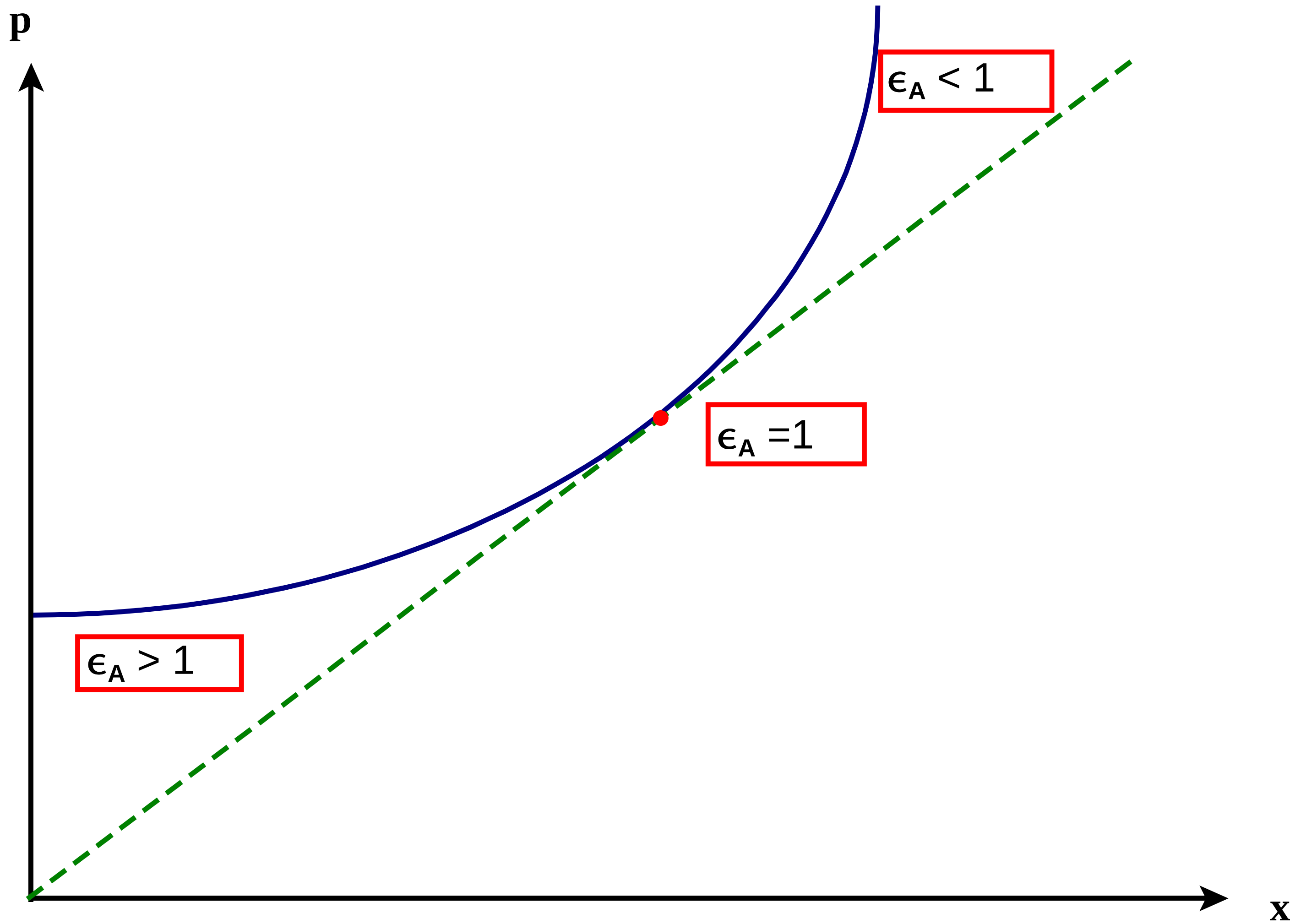
Die Preiselastizität des Angebots im Punkt C

- Entlang einer nicht-linearen Angebotsfunktion ist deren Steigung durch den Steigungswinkel der zugehörigen Tangente bestimmbar: tgα = dx/dp
- Somit gilt dann auch: dx/dp = AO/BO = AD/CD
- Im Punkt C gilt zudem: p/x = CD/OD

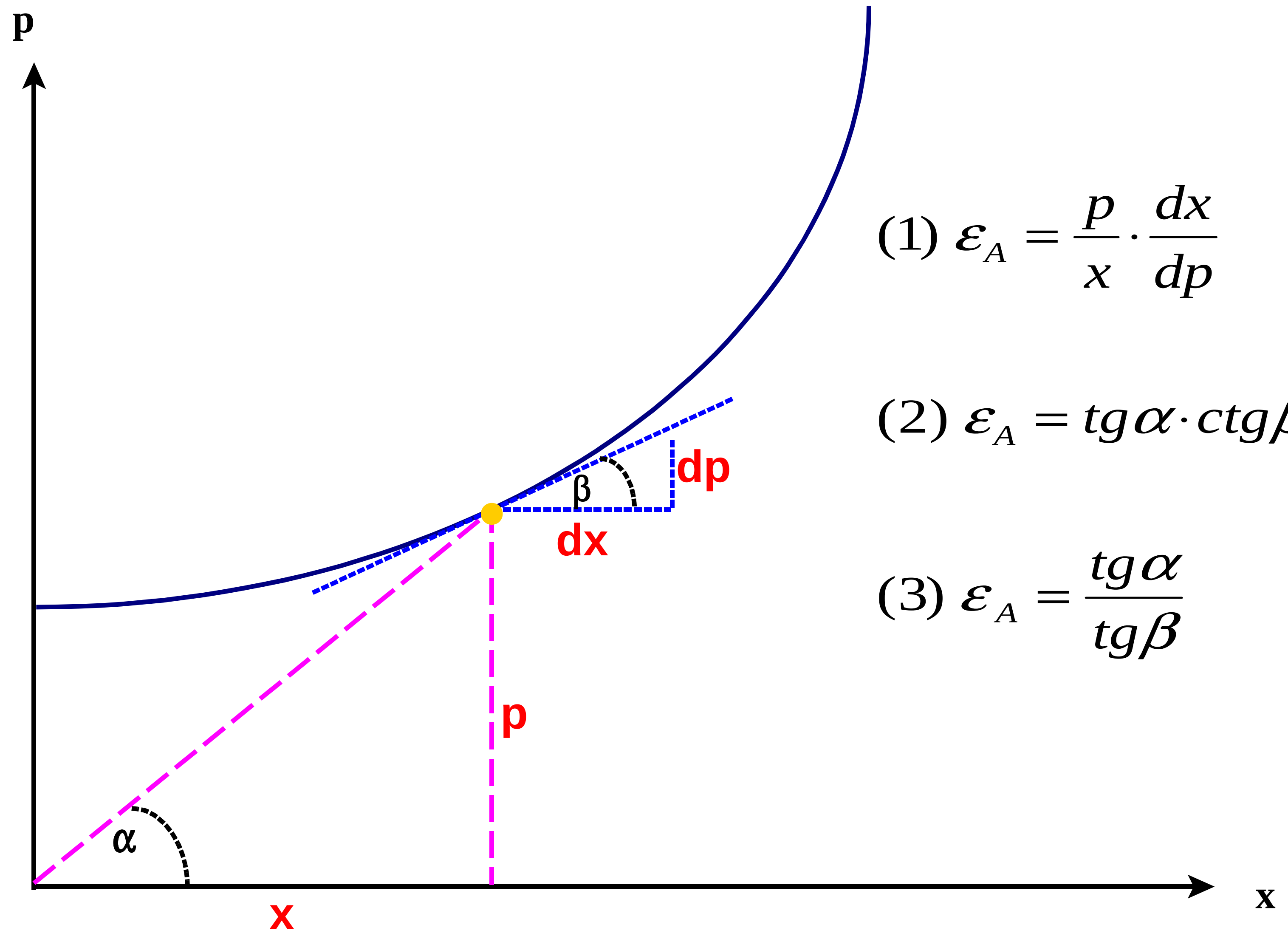
Preiselastizität im Punkt C = AD/OD



Elastizitätsstrukturen einer nicht-linearen Angebotsfunktion



Elastizitätsstrukturen einer nicht-linearen Angebotsfunktion
trigonometrische Herleitung



$$(1)\ \varepsilon_A = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

$$(2)\ \varepsilon_A = tg\alpha \cdot ctg\beta$$

$$(3)\ \varepsilon_A = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

Produktionselastizität

Die Produktionselastizität beschreibt die *relative Änderung des Gesamtertrags* der Produktion (Output (x)) auf Grund der *relativen Mengenänderung* eines variablen Produktionsfaktors (v). Im “Ein Produkt - Zwei Faktoren - Modellfall” gilt somit

$$(1)\ x = f(v\ \ )$$

wobei der andere Faktor als konstant und mit postivem Wert unterstellt wird. Die Produktionslastizität läßt sich demgemäß formulieren:

$$(2)\ \varepsilon_P = \frac{relative\ \ddot{A}nderung\ von\ x}{relative\ \ddot{A}nderung\ von\ v_{(v)}}$$

Das heist konkret:

$$(3)\ \varepsilon_P = \frac{v_{(v)}}{x} \cdot \frac{dx}{dv_{(v)}}$$

$$(2)\ \varepsilon_{(y,x)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Nun entsprechen aber die Ausdrücke “$v_{(v)}/x$” dem Wert: “1/Durchschnittsertrag (DE$_{(v)}$)”;”1/Durchschnittsprodukt (DP$_{(v)}$)” und “dx/dv$_{(v)}$” dem “Grenzertrag(Grenzprodukt:GE$_{(v)}$”;”Grenzprodukt GP$_{(v)}$”, so daß auch geschrieben werden kann:

$$\boxed{(4a)\ \varepsilon_P = \frac{GE_{(v)}}{DE_{(v)}} \quad oder \quad (4b)\ \varepsilon_P = \frac{GP_{(v)}}{DP_{(v)}}}$$

Produktionselastizitäten der Produktionsfaktoren (v_1; v_2) einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion.

Die Produktionselastizität ist definiert als

$$(1)\ \varepsilon_P = \frac{v_{(1,2)}}{x} \cdot \frac{dx}{dv_{(1,2)}} = \frac{GP_{(1,2)}}{DE_{(1,2)}}$$

Für die allgemeine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Gestalt

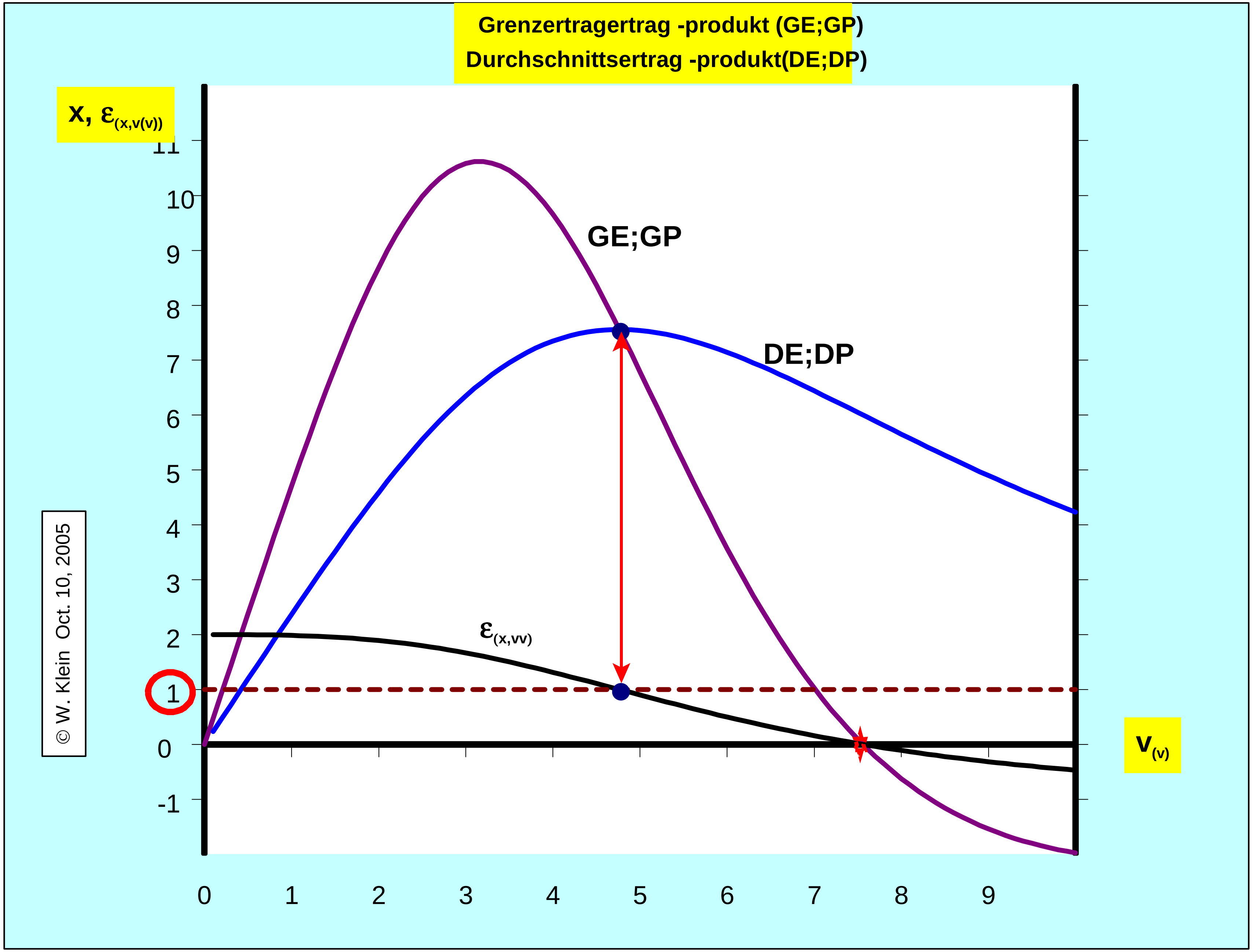
$$(2)\ x = v_1^{\alpha} \cdot v_2^{\beta}$$

ergibt sich somit für die *Produktionselastizität des Faktors (v_1)*

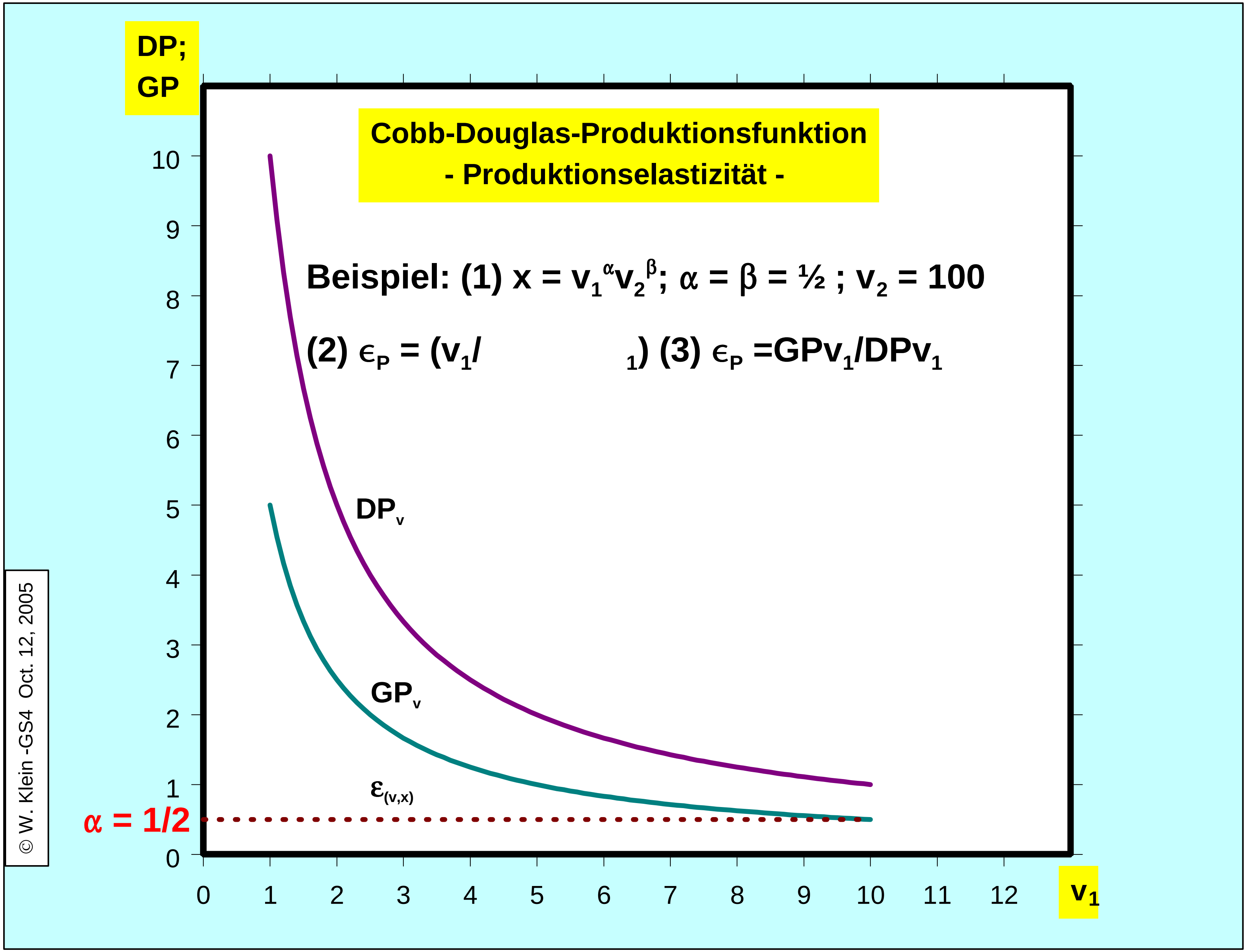
$$(3)\ \varepsilon_P = \frac{v_1}{x} \cdot \frac{dx}{dv_1} = \frac{GP_1}{DE_1} = \frac{\alpha \cdot v_1^{(\alpha-1)} \cdot v_2^{\beta}}{v_1^{(1-\alpha)} \cdot v_2^{\beta}} = \boxed{\alpha}$$

und für die *Produktionselastizität des Faktors (v_2)*

$$(4)\ \varepsilon_P = \frac{v_2}{x} \cdot \frac{dx}{dv_2} = \frac{GP_2}{DE_2} = \frac{\beta \cdot v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(\beta-1)}}{v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(1-\beta)}} = \boxed{\beta}$$



Grenzertragertrag -produkt (GE;GP)
Durchschnittsertrag -produkt(DE;DP)
x, ε(x,v(v))
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
GE;GP
DE;DP
ε(x,vv)
v(v)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
© W. Klein Oct. 10, 2005



Cobb-Douglas-Produktionsfunktion
- Produktionselastizität -
Beispiel: (1) $x = v_1^{\alpha} v_2^{\beta}$; $\alpha = \beta = ½$; $v_2 = 100$
(2) $\epsilon_P = (v_1/$ $_1)$ (3) $\epsilon_P = GPv_1/DPv_1$
DP;
GP
DP_v
GP_v
$\varepsilon_{(v,x)}$
$\alpha = 1/2$
v_1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
© W. Klein -GS4 Oct. 12, 2005