# Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

## Formelsammlung

Prof. Dr. Roland Schuhr

Institut für Empirische Wirtschaftsforschung
Bereich Statistik
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der
Universität Leipzig

Stand: 22.03.2012

## Inhalt

# 1 Deskription univariater Datensätze

**Notation**

| | | |
|---|---|---|
| Merkmalsvariable | $X$ | |
| Realisationsmöglichkeiten | $\tilde{x}_i$ | $(i=1,\ldots,m)$ |
| Statistische Reihe | $x_\nu$ | $(\nu=1,\ldots,n)$ |
| Geordnete statistische Reihe | $x_{(\nu^*)}$, d.h. $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(\nu^*)} \le \ldots \le x_{(n)}$ | $(\nu^*=1,\ldots,n)$ |
| Absolute Häufigkeit | $n_i$ | $(i=1,\ldots,m)$ |
| Absolute Häufigkeitsverteilung | $(\tilde{x}_i, n_i)$ | $(i=1,\ldots,m)$ |
| Relative Häufigkeit | $h_i$ | $(i=1,\ldots,m)$ |
| Relative Häufigkeitsverteilung | $(\tilde{x}_i, h_i)$ | $(i=1,\ldots,m)$ |
| Klassen | $K_j$ | $(j=1,\ldots,m)$ |
| Median | $x_{med}$ | |
| Arithmetischer Mittelwert | $\bar{x}$ | |
| Standardabweichung | $\tilde{s}_X$ | |
| Quartile | $x_{[0.25]}$, $x_{[0.5]}$, $x_{[0.75]}$ | |

## 1.1 Eindimensionale Häufigkeitsverteilungen

### 1.1.1 Häufigkeitsverteilungen bei diskreten Variablen (unklassierte Häufigkeitsverteilungen)

**Absolute Häufigkeiten**

Es sei $X$ eine diskrete Variable mit den Realisationsmöglichkeiten $\tilde{x}_i \quad (i=1,\ldots,m)$. Die Anzahl der mit $\tilde{x}_i$ übereinstimmenden Messwerte aus der statistischen Reihe $x_\nu \ (\nu=1,\ldots,n)$ heißt die *absolute Häufigkeit von* $\tilde{x}_i$; geschrieben

$$n(X=\tilde{x}_i) \quad \text{oder kurz} \quad n_i \ .$$

**Relative Häufigkeiten**

$$h(X=\tilde{x}_i) = \frac{n(X=\tilde{x}_i)}{n} \quad \text{oder kurz} \quad h_i = \frac{n_i}{n}$$

**Kumulierte Häufigkeiten**

Es sei $X$ eine diskrete Variable mit den *geordneten* Realisationsmöglichkeiten $\tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_i < \ldots < \tilde{x}_m$. Man bezeichnet

$$N_i = n_1 + n_2 + \ldots + n_i = \sum_{u=1}^{i} n_u \qquad (i=1,\ldots,m)$$

als *kumulierte absolute Häufigkeiten* und

$$H_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_i = \sum_{u=1}^{i} h_u \qquad (i=1,\ldots,m)$$

als *kumulierte relative Häufigkeiten*.

### 1.1.2 Klassierte Häufigkeitsverteilungen bei stetigen oder quasistetigen Variablen

**Absolute Klassenhäufigkeiten**

Die **Anzahl der Messwerte** $x_\nu$ von $X$, die in die Klasse $K_j$ fallen, heißt *absolute Häufigkeit der Klasse* $K_j$*;* geschrieben

$$n(X \in K_j) \quad \text{oder kurz} \quad n_j\,.$$

Die Daten, die in die $j$-te Klasse $K_j$ fallen, werden im Folgenden auch $x_{\nu j}$ $(\nu = 1,\dots,n_j)$ geschrieben.

**Relative Klassenhäufigkeiten**

$$h(X \in K_j) = \frac{n(X \in K_j)}{n} \quad \text{oder kurz} \quad h_j = \frac{n_j}{n}$$

**Kumulierte absolute und relative Klassenhäufigkeiten**

$$N_j = \sum_{u=1}^{j} n_u \quad , \qquad H_j = \sum_{u=1}^{j} h_u \qquad (j = 1,\dots,m)$$

**Halboffene Intervalle und Klassenbreite**

Im Falle metrisch skalierte Daten wählt man als Klassen in der Regel *halboffene Intervalle*

$$K_j = [k_{j-1}, k_j) \qquad \text{oder} \qquad K_j = (k_{j-1}, k_j] \qquad (j = 1,\dots,m),$$

wobei $k_0 < k_1 < \cdots < k_j < \cdots < k_m$ die Anfangs- bzw. Endpunkte der Intervalle sind.

Die Differenz von End- und Anfangspunkt einer Klasse

$$b_j = k_j - k_{j-1}$$

bezeichnet man dann als *Klassenbreite* der $j$-ten Klasse.

**Normierte Klassenhäufigkeiten**

$$n_j^* = \frac{n_j}{b_j} \quad \text{bzw.} \quad h_j^* = \frac{h_j}{b_j} \qquad (j = 1,\dots,m)$$

**Häufigkeitsdichtefunktion**

$$d(x) = \begin{cases} h_j^* & \text{falls } x \in K_j \quad (j = 1,\dots,m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### 1.1.3 Empirische Verteilungsfunktion

$$v(x) = h(X \le x) = \frac{n(X \le x)}{n} \quad \text{für alle } x \in IR$$

## 1.2 Lagemaße

### Modus unklassierter Daten

$x_{mod}$ heißt *Modus* der Häufigkeitsverteilung, falls

$$n(X = x_{mod}) = \max_i n_i \qquad \text{bzw.} \qquad h(X = x_{mod}) = \max_i h_i \;.$$

### Modalklasse

$K_{mod}$ heißt *Modalklasse*, falls

$$n^*(X \in K_{mod}) = \max_j n_j^* \qquad \text{bzw.} \qquad h^*(X \in K_{mod}) = \max_j h_j^* \;.$$

### Modus klassierter Daten

$$x_{mod} = \frac{1}{2}(k_{mod-1} + k_{mod})$$

### Quantile (p-Quantil)

Gegeben sei die statistische Reihe $x_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ und die zugehörige geordnete statistische Reihe $x_{(\nu^*)}$ $(\nu^* = 1,\ldots,n)$. Das *p-Quantil* oder der *(100·p)-Prozentpunkt* des Datensatzes mit $0 \le p \le 1$ ist

$$x_{[p]} = \begin{cases} x_{(k)} & \text{falls } n \cdot p \text{ nicht ganzzahlig,} \\ & \text{mit } k = \text{kleinste natürliche Zahl größer } n \cdot p \\ \frac{1}{2}(x_{(k)} + x_{(k+1)}) & \text{falls } n \cdot p \text{ ganzzahlig,} \\ & \text{mit } k = n \cdot p\,. \end{cases}$$

### Median

$$x_{med} = x_{[0.5]} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right) & \text{falls } n \text{ gerade}. \end{cases}$$

### Unteres und oberes Quartil (1. und 3. Quartil)

$$x_{[0.25]} = \begin{cases} x_{(k)} & \text{falls } \frac{n}{4} \text{ nicht ganzzahlig,} \\ & \text{mit } k = \text{kleinste natürliche Zahl größer } \frac{n}{4} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{4}\right)} + x_{\left(\frac{n}{4}+1\right)}\right) & \text{falls } \frac{n}{4} \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$

$$x_{[0.75]} = \begin{cases} x_{(k)} & \text{falls } \frac{3n}{4} \text{ nicht ganzzahlig,} \\ & \text{mit } k = \text{kleinste natürliche Zahl größer } \frac{3n}{4} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{3n}{4}\right)} + x_{\left(\frac{3n}{4}+1\right)}\right) & \text{falls } \frac{3n}{4} \text{ ganzzahlig} \end{cases}$$

### Arithmetischer Mittelwert (ungewogenes arithmetisches Mittel, Durchschnitt)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{m} h_i \tilde{x}_i$$

**Klassenmerkmalssummen und Klassenmittelwerte**

$$S_j = \sum_{\nu=1}^{n_j} x_{\nu j} \quad , \quad \bar{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{\nu=1}^{n_j} x_{\nu j} = \frac{S_j}{n_j} \quad (j = 1,..,m)$$

**Gesamtmittelwert**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} S_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j \bar{x}_j = \sum_{j=1}^{m} h_j \bar{x}_j$$

**Gewogener arithmetischer Mittelwert (gewogener Durchschnitt)**

$$\bar{x} = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \cdot x_\nu \quad \text{mit} \quad 0 \le g_\nu \le 1 \quad (\nu = 1,\ldots,n) \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu = 1$$

**Geometrischer Mittelwert**

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu} = \left(\prod_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{m} \tilde{x}_i^{n_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{m} \tilde{x}_i^{h_i} \qquad (0 < x_\nu < \infty)$$

**Harmonischer Mittelwert**

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \frac{1}{\tilde{x}_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} h_i \cdot \frac{1}{\tilde{x}_i}}$$

## 1.3 Streuungsmaße

**Spannweite**

$$W = x_{(n)} - x_{(1)}$$

**Quartilsabstand und mittlere Quartilsabstand**

$$QA = x_{[0.75]} - x_{[0.25]}, \qquad \overline{QA} = \frac{1}{2}\left(x_{[0.75]} - x_{[0.25]}\right)$$

**5-Zahlen-Zusammenfassung**

| | | |
|---|---|---|
| | $x_{[0.5]}$ | |
| $x_{[0.25]}$ | | $x_{[0.75]}$ |
| $x_{(1)}$ | | $x_{(n)}$ |

**Mittlere absolute Abweichung vom Median**

$$MA_{x_{med}} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \left|x_\nu - x_{med}\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \left|\tilde{x}_i - x_{med}\right| = \sum_{i=1}^{m} h_i \cdot \left|\tilde{x}_i - x_{med}\right|$$

**Mittlere absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel**

$$MA_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left|x_\nu - \bar{x}\right| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \left|\tilde{x}_i - \bar{x}\right| = \sum_{i=1}^{m} h_i \cdot \left|\tilde{x}_i - \bar{x}\right|$$

**Varianz**

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{m} h_i \cdot (\tilde{x}_i - \bar{x})^2$$

**Standardabweichung**

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \cdot (\tilde{x}_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} h_i \cdot (\tilde{x}_i - \bar{x})^2}$$

**Verschiebungssatz für die Varianz**

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i \tilde{x}_i^2 - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{m} h_i \tilde{x}_i^2 - \bar{x}^2$$

**Klassenvarianzen**

$$\tilde{s}_j^2 = \frac{1}{n_j}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_{\nu j} - \bar{x}_j)^2 = \frac{1}{n_j}\sum_{\nu=1}^{n_j} x_{\nu j}^2 - \bar{x}_j^2 \qquad (j = 1,..,m)$$

**Gesamtvarianz klassierter Daten**

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n_j}(x_{\nu j} - \bar{x})^2 = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \tilde{s}_j^2 \cdot h_j}_{\text{interne Varianz}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \cdot h_j}_{\text{externe Varianz}}$$

**Variationskoeffizient**

$$VK = \frac{\tilde{s}}{\bar{x}}$$

**Quartilsdispersionskoeffizient**

$$QD = \frac{\overline{QA}}{x_{med}} = \frac{x_{[0.75]} - x_{[0.25]}}{2 \cdot x_{med}}$$

**Lineartransformation**

$$y_\nu = a + b \cdot x_\nu \qquad (\nu = 1,\ldots,n)$$

**Lageparameter linear transformierter Daten**

$$y_{mod} = a + b \cdot x_{mod} \quad , \quad y_{med} = a + b \cdot x_{med} \quad , \quad \bar{y} = a + b \cdot \bar{x}$$

**Streuungsmaße linear transformierter Daten**

$$\tilde{s}_y^2 = b^2\,\tilde{s}_x^2 \quad , \quad \tilde{s}_y = |b|\;\tilde{s}_x \quad , \quad MA_{y_{med}} = |b|\;MA_{x_{med}}$$

**Zentrierung**

$$y_\nu = x_\nu - \bar{x} \qquad (\nu = 1,\ldots,n)$$

Zentrierte Daten $y_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ besitzen das Mittel $\bar{y} = 0$ und die Standardabweichung $\tilde{s}_Y = \tilde{s}_X$ .

**Standardisierung**

$$z_\nu = \frac{x_\nu - \bar{x}}{\tilde{s}_X} \qquad (\nu = 1,\ldots,n)$$

Standardisierte Daten $z_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ besitzen das Mittel $\bar{z} = 0$ und die Standardabweichung $\tilde{s}_Z = 1$ .

## 1.4 Momente und Schiefemaße

**Schiefemomentenkoeffizient**

$$g_M = \frac{m_3(\bar{x})}{\tilde{s}^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2}\right)^3}$$

**Schiefequartilskoeffizient von Bowley**

$$g_Q = \frac{(x_{[0.75]} - x_{[0.5]}) - (x_{[0.5]} - x_{[0.25]})}{x_{[0.75]} - x_{[0.25]}} = \frac{(x_{[0.75]} - x_{med}) - (x_{med} - x_{[0.25]})}{QA} \qquad -1 \le g_Q \le 1$$

## 1.5 Die Bestandteile des Box-Plots

(*i*) Eine Skala parallel zur Hauptachse des Plots.

(*ii*) Ein Rechteck (Box) vom unteren Quartil $x_{[0.25]}$ bis zum oberen Quartil $x_{[0.75]}$ .

(*iii*) Senkrechte Striche, die den Median $x_{[0.5]}$, den kleinsten Wert $x_{(u)}$, der größer oder gleich dem unteren Ausreißerzaun $x_{[0.25]} - 1.5 \cdot QA$ ist, und den größten Wert $x_{(o)}$, der kleiner oder gleich dem oberen Ausreißerzaun $x_{[0.75]} + 1.5 \cdot QA$ ist, markieren.

(*iv*) Querstriche von der Box zu den beiden äußeren senkrechten Strichen.

(*v*) Mit dem Symbol * markierte Messwerte, die außerhalb der Zäune liegen (potentielle Ausreißer).

## 1.6 Konzentrationsmessung

Zur Vereinfachung der Notation wird im Folgenden unterstellt, dass die Messwerte $x_\nu$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ einer Variablen *X* bereits der Größe nach geordnet vorgegeben sind, so dass $0 < x_1 \le \ldots \le x_\nu \le \ldots \le x_n$ gilt.

### 1.6.1 Maße der relativen Konzentration (Disparitätsmaße)

**Berechnung der Lorenzkurve: Statistische Reihe**

Der Streckenzug, der Punkte

$$(0,0)\ ,\ (H_1,Q_1)\ ,\ (H_2,Q_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (H_n,Q_n) = (1,1)$$

mit

$$Q_\nu = \frac{\sum_{u=1}^{\nu} x_u}{\sum_{u=1}^{n} x_u} \quad , \quad H_\nu = \frac{\nu}{n}$$

verbindet, ist die *Lorenzkurve L* der statistischen Reihe.

Falls Anteilssätze $H_\nu$ und $Q_\nu$ in Prozent: $\left(H_\nu \cdot 100\%\ ,\ Q_\nu \cdot 100\%\right)$ $\quad (\nu = 1,\ldots,n)$.

**Berechnung der Lorenzkurve: Unklassierte Häufigkeitsverteilung**

Die Variable $X$ habe in einem Datensatz die Skalenwerte $\tilde{x}_i$ $(i = 1,\ldots,m)$ mit den relativen Häufigkeiten

$$h_i = \frac{n_i}{n} \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

angenommen. Ferner gelte

$$H_i = \sum_{u=1}^{i} h_u \quad \text{und} \quad Q_i = \sum_{u=1}^{i} q_u \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

mit $$q_i = \frac{\tilde{x}_i n_i}{S} = \frac{\tilde{x}_i h_i}{\bar{x}} \quad \text{und} \quad S = \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i n_i = n \cdot \bar{x}\,.$$

Der Streckenzug, der Punkte

$$(0,0)\ ,\ (H_1,Q_1)\ ,\ (H_2,Q_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (H_m,Q_m) = (1,1)$$

verbindet, ist die *Lorenzkurve L* der unklassierten Häufigkeitsverteilung.

**Berechnung der Lorenzkurve: Klassierte Häufigkeitsverteilung**

Die Werte der Variablen $X$ seien in $m$ Klassen $K_j$ $(j = 1,\ldots,m)$ eingeteilt. Bekannt seien neben den relativen Klassenhäufigkeiten $h_j$ auch die Klassenmerkmalssummen $S_j$ oder die Klassenmittelwerte $\bar{x}_j$. Ferner gelte

$$H_j = \sum_{u=1}^{j} h_u \quad \text{und} \quad Q_j = \sum_{u=1}^{j} q_u \qquad (j = 1,\ldots,m)$$

mit $$q_j = \frac{S_j}{S} = \frac{\bar{x}_j n_j}{S} \quad \text{und} \quad S = \sum_{j=1}^{m} S_j = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j n_j\,.$$

Der Streckenzug, der Punkte

$$(0,0)\ ,\ (H_1,Q_1)\ ,\ (H_2,Q_2)\ ,\ \ldots\ ,\ (H_m,Q_m) = (1,1)$$

verbindet, ist die *Lorenzkurve L* der klassierten Häufigkeitsverteilung.

**Gini-Koeffizient (Gini'sches Konzentrationsmaß)**

$$GK = \frac{F}{\frac{1}{2}} = 2F \qquad \text{mit} \qquad F = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_u h_u \left(Q_{u-1} + Q_u\right) \qquad 0 \le GK \le \frac{n-1}{n}$$

**Korrigierter Gini-Koeffizient**

$$GK^* = \frac{n}{n-1} GK \qquad\qquad 0 \le GK^* \le 1$$

**Variationskoeffizient**

$$VK = \frac{\tilde{s}}{\bar{x}} \qquad\qquad 0 \le VK \le \sqrt{n-1}$$

### 1.6.2 Maße der absoluten Konzentration

**Konzentrationsverhältnis, Konzentrationskurve**

*Konzentrationsverhältnis* (*concentration ratio*) der Ordnung κ mit $\kappa \in \{1,\dots,n\}$:

$$CR_\kappa = \frac{\sum_{\nu=n+1-k}^{n} x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu} \equiv \sum_{\nu=n+1-\kappa}^{n} q_\nu \quad \text{mit} \quad q_\nu = \frac{x_\nu}{S} \qquad\qquad 0 \le CR_\kappa \le 1$$

Trägt man die Paare ( $\kappa, CR_\kappa$ ) für alle κ als Punkte in ein Koordinatensystem ein, so heißt der verbindende Streckenzug *Konzentrationskurve*.

**Zusammenhang zwischen Lorenz- und Konzentrationskurve**

$$CR_\kappa = 1 - L(\tfrac{n-\kappa}{n}) \qquad (\kappa = 1,\dots,n) \ .$$

**Herfindahl-Koeffizient**

$$HK = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu^2 \quad \text{mit} \quad q_\nu = \frac{x_\nu}{S} \qquad\qquad \frac{1}{n} \le HK \le 1$$

**Zusammenhang zwischen Variations- und Herfindahl-Koeffizienten**

$$HK = \frac{VK^2 + 1}{n}$$

**Rosenbluth-Koeffizient**

$$RK = \frac{1}{2A} \qquad\qquad \frac{1}{n} \le RK \le 1$$

$$\text{mit} \quad A = \sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot q_\nu - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad q_\nu = \frac{x_\nu}{S}$$

**Zusammenhang zwischen Rosenbluth- und Gini-Koeffizienten**

$$RK = \frac{1}{n(1-GK)}$$

# 2 Deskription bivariater Datensätze

**Notation**

| | | |
|---|---|---|
| Merkmalsvariablen | $X, Y$ | |
| Realisationsmöglichkeiten | $\tilde{x}_i$ | $(i = 1,\ldots,m)$ |
| | $\tilde{y}_j$ | $(j = 1,\ldots,k)$ |
| Bivariater Datensatz | $(x_\nu, y_\nu)$ | $(\nu = 1,\ldots,n)$ |
| Gemeinsame absolute Häufigkeiten | $n_{ij}$ | $(i = 1,\ldots,m\,;\ j = 1,\ldots,k)$ |
| Gemeinsame relative Häufigkeiten | $h_{ij}$ | $(i = 1,\ldots,m\,;\ j = 1,\ldots,k)$ |
| Absolute Randhäufigkeiten | $n_{i\bullet}$ | $(i = 1,\ldots,m)$ |
| | $n_{\bullet j}$ | $(j = 1,\ldots,k)$ |
| Bedingte Häufigkeitsverteilungen | $h(\tilde{x}_i \mid \tilde{y}_j)$ | $(i = 1,\ldots,m)$ |
| | $h(\tilde{y}_j \mid \tilde{x}_i)$ | $(j = 1,\ldots,k)$ |
| Arithmetischen (Rand-) Mittelwerte | $\bar{x}\,,\ \bar{y}$ | |
| Varianzen der Randverteilung | $\tilde{s}_X^2\,,\ \tilde{s}_X^2$ | |
| Kovarianz | $\tilde{s}_{XY}$ | |
| Rangzahlenpaare | $(R(x_\nu), R(y_\nu))$ | $(\nu = 1,\ldots,n)$ |

## 2.1 Bivariate Häufigkeitsverteilungen und Randverteilungen

**Gemeinsame absolute Häufigkeiten**

Die Anzahl der mit $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)$ übereinstimmenden Messwertpaare des bivariaten Datensatzes $(x_\nu, y_\nu)$ $(\nu = 1,\ldots,n)$ heißt die *absolute gemeinsame Häufigkeit von* $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_j)$, geschrieben:

$$n(X = \tilde{x}_i, Y = \tilde{y}_j) \qquad \text{oder kurz} \qquad n_{ij}\ .$$

**Gemeinsame relative Häufigkeiten**

$$h(X = \tilde{x}_i, Y = \tilde{y}_j) = \frac{n(X = \tilde{x}_i, Y = \tilde{y}_j)}{n} \qquad \text{oder kurz} \qquad h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$$

**Kumulierte gemeinsame Häufigkeiten**

$$N_{ij} = \sum_{u=1}^{i} \sum_{v=1}^{j} n_{uv} \quad , \quad H_{ij} = \sum_{u=1}^{i} \sum_{v=1}^{j} h_{uv}$$

**Randhäufigkeiten der Merkmalsvariable** $X$

$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{k} n_{ij} = n(X = \tilde{x}_i) \quad , \quad h_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{k} h_{ij} = \frac{n_{i\bullet}}{n} = h(X = \tilde{x}_i) \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

**Randhäufigkeiten der Merkmalsvariable** $Y$

$$n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} n_{ij} = n(Y = \tilde{y}_j) \quad , \quad h_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} h_{ij} = \frac{n_{\bullet j}}{n} = h(Y = \tilde{y}_j) \qquad (j = 1,\ldots,k)$$

**Bivariate empirische Verteilungsfunktion**

$$v(x, y) = h(X \le x, Y \le y) = \frac{n(X \le x, Y \le y)}{n} \quad \text{für alle } x,y \in IR$$

## 2.2 Bedingte Verteilungen

**Bedingte Häufigkeit von $\tilde{x}_i$ gegeben $Y = \tilde{y}_j$**

$$h(\tilde{x}_i \mid \tilde{y}_j) = \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}}$$

**Bedingte Häufigkeit von $\tilde{y}_j$ gegeben $X = \tilde{x}_i$**

$$h(\tilde{y}_j \mid \tilde{x}_i) = \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}}$$

**Bedingter arithmetischer Mittelwert von *X* gegeben $Y = \tilde{y}_j$**

$$\bar{x}|\tilde{y}_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot h(\tilde{x}_i \mid \tilde{y}_j)$$

**Bedingter arithmetischer Mittelwert von *Y* gegeben $X = \tilde{x}_i$**

$$\bar{y} \mid \tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot h(\tilde{y}_j \mid \tilde{x}_i)$$

**Bedingte Varianz von *X* gegeben $Y = \tilde{y}_j$**

$$\tilde{s}_x^2 \mid \tilde{y}_j = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot h(\tilde{x}_i \mid \tilde{y}_j) - \left(\bar{x} \mid \tilde{y}_j\right)^2$$

**Bedingte Varianz von *Y* gegeben $X = \tilde{x}_i$**

$$\tilde{s}_y^2 \mid \tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{k} y_j^2 \cdot h(\tilde{y}_j \mid \tilde{x}_i) - \left(\bar{y} \mid \tilde{x}_i\right)^2$$

## 2.3 Maßzahlen für bivariate Verteilungen (Korrelationsrechnung)

**Kovarianz**

$$\tilde{s}_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(x_\nu - \bar{x}\right)\left(y_\nu - \bar{y}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(\tilde{x}_i - \bar{x}\right)\cdot\left(\tilde{y}_j - \bar{y}\right)\cdot n_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(\tilde{x}_i - \bar{x}\right)\cdot\left(\tilde{y}_j - \bar{y}\right)\cdot h_{ij}$$

**Verschiebungssatz für die Kovarianz**

$$\tilde{s}_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \cdot y_\nu - \bar{x}\cdot\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_j \cdot n_{ij} - \bar{x}\cdot\bar{y}$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_j \cdot h_{ij} - \bar{x}\cdot\bar{y} = \overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}$$

**Produkt-Moment-Korrelationskoeffizient (Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient)**

$$r_{XY} = \frac{\tilde{s}_{XY}}{\tilde{s}_X \cdot \tilde{s}_Y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})(y_\nu - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - \bar{y})^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu y_\nu - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2 - \bar{x}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu^2 - \bar{y}^2}}$$

**Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten**

Der Korrelationskoeffizient $r_{XY}$ ist eine normierte und dimensionslose Maßzahl mit den Eigenschaften:

(*i*) $-1 \le r_{XY} \le +1$ bzw. $|r_{XY}| \le 1$ (Normierung);

(*ii*) $r_{XY} = \pm 1$ gilt genau dann, wenn es zwei reelle Konstanten *a*, *b* mit $b \neq 0$ so gibt, dass

$$y_\nu = a + bx_\nu \qquad (v = 1,\dots,n)$$

erfüllt ist. Man sagt dann, zwischen *X* und *Y* besteht eine *exakte lineare Beziehung*.

**Rangkorrelationskoeffizient (nach Spearman)**

$$r_{SP} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}R(x_\nu)\cdot R(y_\nu) - \frac{(n+1)^2}{4}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}R(x_\nu)^2 - \frac{(n+1)^2}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}R(y_\nu)^2 - \frac{(n+1)^2}{4}}}$$

$(R(x_\nu), R(y_\nu))$ sind die zu den Messwertpaaren $(x_\nu, y_\nu)$ $(v = 1,\dots,n)$ gehörigen Rangzahlenpaare.

**Näherungswert für Rangkorrelationskoeffizient (exakt falls Daten ohne Bindungen)**

$$r_{SP} = 1 - \frac{6\cdot\sum_{\nu=1}^{n}\left(R(x_\nu) - R(y_\nu)\right)^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6\cdot\sum_{\nu=1}^{n}d_\nu^2}{n^3 - n} \qquad \text{mit } d_\nu = R(x_\nu) - R(y_\nu)$$

**Eigenschaften des Rangkorrelationskoeffizienten**

Der Rangkorrelationskoeffizient $r_{SP}$ ist eine normierte dimensionslose Maßzahl mit den Eigenschaften:

(*i*) $-1 \le r_{SP} \le +1$ bzw. $|r_{SP}| \le 1$ (Normierung);

(*ii*) $r_{SP} = \pm 1$ gilt genau dann, wenn eine beliebige monoton wachsende bzw. eine beliebige monoton fallende Funktion $f(x)$ existiert, so dass

$$y_\nu = f(x_\nu) \qquad (v = 1,\dots,n)$$

erfüllt ist. Man sagt dann, zwischen *X* und *Y* besteht ein *monotoner Zusammenhang*.

**Kontingenzkoeffizient (nach Pearson)**

**Erwartete gemeinsame absolute Häufigkeit**

$$e_{ij} = \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n} = n \cdot h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}$$

$\chi^2$ – **Koeffizient (Chi-Quadrat-Koeffizient)**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \qquad 0 \le \chi^2 < \infty$$

**Kontingenzkoeffizient (transformierter** $\chi^2$ – **Koeffizient)**

$$K_{XY} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \qquad 0 \le K_{XY} \le K_{XY}^{max} \quad \text{mit} \quad K_{XY}^{max} = \sqrt{\frac{min\{m,k\} - 1}{min\{m,k\}}}$$

**Korrigierter Kontingenzkoeffizienten**

$$K_{XY}^{*} = \frac{K_{XY}}{K_{XY}^{max}} \qquad 0 \le K_{XY}^{*} \le 1$$

**Lineartransformationen und Linearkombindationen**

**Kovarianz linear transformierter Daten**

Gegeben seien die Messwertpaare $(x_\nu, y_\nu)$ $(v = 1,...,n)$ der metrisch skalierten Variablen $X$, $Y$ und deren Lineartransformationen $(u_\nu, w_\nu)$ $(v = 1,...,n)$ mit

$$u_\nu = a + b \cdot x_\nu, \qquad w_\nu = c + d \cdot y_\nu, \qquad a,b,c,d \in IR,\ b \ne 0,\ d \ne 0 .$$

Zwischen der Kovarianz $\tilde{s}_{XY}$ der Ausgangsdaten und der Kovarianz $\tilde{s}_{UW}$ der transformierten Daten besteht der Zusammenhang:

$$\tilde{s}_{UW} = b \cdot d \cdot \tilde{s}_{XY} .$$

**Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient linear transformierter Daten**

$$r_{UW} = \frac{b \cdot d}{|b| \cdot |d|} \cdot r_{XY}$$

**Mittelwert und Varianz linear kombinierter Daten**

Gegeben seien die Messwertpaare $(x_\nu, y_\nu)$ $(v = 1,...,n)$ der metrisch skalierten Variablen $X$, $Y$ mit den univariaten Mittelwerten $\bar{x}$, $\bar{y}$ und den univariaten Varianzen $\tilde{s}_X^2$, $\tilde{s}_Y^2$ sowie die Linearkombinationen

$$z_\nu = a + bx_\nu + cy_\nu \ (v = 1,...,n) \quad \text{mit} \quad a,b,c \in IR,\ b \ne 0,\ c \ne 0 .$$

Für das arithmetische Mittel und die Varianz der Werte $z_\nu$ $(\nu = 1,...,n)$ gilt:

$(i)$ $\quad \bar{z} = a + b\bar{x} + c\bar{y}$

$(ii)$ $\quad \tilde{s}_Z^2 = b^2 \tilde{s}_X^2 + c^2 \tilde{s}_Y^2 + 2bc\tilde{s}_{XY}$ .

# 3 Indexrechnung

**Notation**

| | | |
|---|---|---|
| Zeitreihe | $x_t$ | $(t = 0,1,\ldots,T)$ |
| Basiszeit | $t = k$ (meist $t = 0$) | |
| Berichtszeit | $t \neq k$ | |
| Messzahl, Änderungsfaktor | $m_{k,t}$ | $(t = 0,1,\ldots,T)$ |
| Änderungssrate | $r_{k,t}$ | $(t = 1,2,\ldots,T)$ |
| Logarithmische Änderungssrate | $w_{k,t}$ | $(t = 1,2,\ldots,T)$ |
| Preis des Wirtschaftsguts *i* im Zeitpunkt *t* | $p_{i,t}$ | |
| Menge des Wirtschaftsguts *i* im Zeitpunkt *t* | $q_{i,t}$ | |
| Index | $I_{0,t}$ | $(t = 0,1,\ldots,T)$ |
| Preisindex | $P_{0,t}$ | $(t = 0,1,\ldots,T)$ |
| Mengenindex | $Q_{0,t}$ | $(t = 0,1,\ldots,T)$ |
| Wertindex | $V_{0,t}$ | $(t = 0,1,\ldots,T)$ |

**Messzahlen (Änderungs- oder Wachstumsfaktoren)**

$$m_{k,t} = \frac{x_t}{x_k} \qquad (t = 0,1,\ldots,T)$$

**Umbasierung von Messzahlen**

$$\frac{m_{k,t}}{m_{k,s}} = \frac{x_t}{x_k} \Big/ \frac{x_s}{x_k} = \frac{x_t}{x_s} = m_{s,t} \qquad (t = 0,1,\ldots,T)$$

**Änderungs- oder Wachstumsraten**

$$r_{k,t} = \frac{x_t - x_k}{x_k} = m_{k,t} - 1 \qquad (t = 1,2,\ldots,T)$$

**Logarithmische Änderungs- oder Wachstumsraten**

$$w_{k,t} = ln\,\frac{x_t}{x_k} = ln\,x_t - ln\,x_k \qquad (t = 1,2,\ldots,T)$$

**Durchschnittliche Änderungsfaktoren und -raten**

$$\overline{m}_g = \left(m_{0,1} \cdot m_{1,2} \cdot \ldots \cdot m_{T-1,T}\right)^{1/T} = \sqrt[T]{m_{0,1} \cdot m_{1,2} \cdot \ldots \cdot m_{T-1,T}} \quad , \quad \overline{r} = \overline{m}_g - 1$$

**Durchschnittliche logarithmische Änderungsrate**

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} w_{t-1,t} = \frac{w_{0,T}}{T}$$

**Preisindex nach Laspeyres**

$$P_{0,t}^{(La)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t} \cdot q_{i,0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,0} \cdot q_{i,0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i,t}}{p_{i,0}} \cdot g_{i,0} \quad \text{mit} \quad g_{i,0} = \frac{p_{i,0} \cdot q_{i,0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,0} \cdot q_{i,0}} \qquad (t = 0,1,2,\ldots)$$

**Preisindex nach Paasche**

$$P_{0,t}^{(Pa)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t} \cdot q_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,0} \cdot q_{i,t}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{p_{i,t}}{p_{i,0}}} \cdot g_{i,t}} \quad \text{mit} \quad g_{i,t} = \frac{p_{i,t} \cdot q_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t} \cdot q_{i,t}} \qquad (t = 0,1,2,\ldots)$$

**Fisher-Ideal-Preisindex**

$$P_{0,t}^{(Fi)} = \sqrt{P_{0,t}^{(La)} \cdot P_{0,t}^{(Pa)}} \qquad (t = 0,1,2,\ldots)$$

**Mengenindex nach Laspeyres**

$$Q_{0,t}^{(La)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i,t} \cdot p_{i,0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i,0} \cdot p_{i,0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i,t}}{q_{i,0}} \cdot g_{i,0} \quad \text{mit} \quad g_{i,0} = \frac{p_{i,0} \cdot q_{i,0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,0} \cdot q_{i,0}} \qquad (t = 0,1,2,\ldots)$$

**Mengenindex nach Paasche**

$$Q_{0,t}^{(Pa)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i,t} \cdot p_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i,0} \cdot p_{i,t}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{q_{i,t}}{q_{i,0}}} \cdot g_{i,t}} \quad \text{mit} \quad g_{i,t} = \frac{p_{i,t} \cdot q_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t} \cdot q_{i,t}} \qquad (t = 0,1,2,\ldots)$$

**Fisher-Ideal-Mengenindex**

$$Q_{0,t}^{(Fi)} = \sqrt{Q_{0,t}^{(La)} \cdot Q_{0,t}^{(Pa)}} \qquad (t = 0,1,2,\ldots)$$

**Umsatz- oder Wertindex**

$$V_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t} \cdot q_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,0} \cdot q_{i,0}} \qquad (t = 0,1,2,\ldots)$$

**Beziehung zwischen Wertindex und Preis- sowie Mengenindizes**

$$V_{0,t} = P_{0,t}^{(La)} \cdot Q_{0,t}^{(Pa)} = P_{0,t}^{(Pa)} \cdot Q_{0,t}^{(La)}$$

$$V_{0,t} = P_{0,t}^{(Fi)} \cdot Q_{0,t}^{(Fi)}$$

**Gesamtindex und Sektorenindizes**

Ein Gesamtaggregat ist in $j = 1,\dots,m$ Sektoren und jeder Sektor in $i = 1,\dots,n_j$ Untersektoren aufgegliedert. Für die Untersektoren seien Indizes $I_{i,j,0,t}$ vorgegeben, die auch einfache Messzahlen seien können. Aus dem Untersektorenindizes können bei vorgegebenen relativen Gewichten $\gamma_{i,j}^*$ Sektorenindizes $I_{j,0,t}$ berechnet werden:

$$I_{j,0,t} = \sum_{i=1}^{n_j} \gamma_{i,j}^* \cdot I_{i,j,0,t} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{n_j} \gamma_{i,j}^* = 1 \quad (j = 1,\dots,m).$$

Zwischen dem Gesamtindex $I_{0,t}$ und den Sektorenindizes $I_{j,0,t}$ besteht die Beziehung:

$$I_{0,t} = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \cdot I_{j,0,t} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \gamma_{i,j} \cdot I_{i,j,0,t} \text{ „}$$

wobei

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1 \quad , \quad \gamma_j = \sum_{i=1}^{n_j} \gamma_{i,j} \quad \text{und} \quad \gamma_{i,j} = \gamma_{i,j}^* \cdot \gamma_j$$

ist.

Für gegebene Werte von Gesamtindex und Sektorenindizes sind relativen Gewichte $\gamma_j$ $(j = 1,\dots,m)$ eindeutig durch das folgende Gleichungssystem bestimmt:

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \cdot I_{j,0,t} = I_{0,t} \qquad (t = 1,\dots,m-1)\ ,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j = 1\ .$$

**Umbasierung**

Umbasierung des Indexwerts $I_{u,t}$ mit der Basiszeit $u$ auf die neue Basiszeit $v$ im Falle $u > v$:

$$I_{v,t}^* = I_{u,v} \cdot I_{u,t}\ .$$

Umbasierung des Indexwerts $I_{u,t}$ mit der Basiszeit $u$ auf die neue Basiszeit $v$ im Falle $u < v$:

$$I_{v,t}^{**} = \frac{I_{u,t}}{I_{u,v}}\ .$$

# 4 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 4.1 Zufallsvorgänge und Wahrscheinlichkeitsräume

### Zufallsvorgang, Ergebnis

Ein *Zufallsvorgang* oder *Zufallsexperiment* ist ein Vorgang, dessen Ausgang im Rahmen verschiedener, prinzipiell bekannter Möglichkeiten ungewiss ist und der sich unter Einhaltung bestimmter Vorschriften beliebig oft (zumindest gedanklich) wiederholen lässt. Der nach Ablauf des Vorganges tatsächlich eingetretene Ausgang wird als *Ergebnis* des Zufallsvorgangs bezeichnet.

### Ergebnisraum

Eine Menge $\Omega$ heißt *Ergebnisraum* eines Zufallsvorgangs, wenn sie jedes mögliche Ergebnis des Vorgangs als Element enthält. Weitere Sprechweisen: *Grundraum*, *Stichprobenraum*.

### Ereignis, Ereignisfeld

Ein *Ereignis* $A$ eines Zufallsvorgangs ist eine Teilmenge des Ergebnisraumes $\Omega$, d.h. $A \subset \Omega$. Man sagt, ein Ereignis $A$ ist bei der Durchführung eingetreten, wenn das Ergebnis $\omega$ des Zufallsvorgangs ein Element von $A$ ist, also $\omega \in A$. Die Menge $\mathcal{F}$ aller zulässigen Ereignisse eines Zufallsvorgangs heißt *Ereignisfeld*.

### Unmögliches und sicheres Ereignis

(*i*) $\emptyset \subset \Omega$ heißt das *unmögliche* Ereignis ($\emptyset$ tritt sicher nicht ein);

(*ii*) $\Omega \subset \Omega$ heißt das *sichere* Ereignis ($\Omega$ tritt sicher ein).

### Elementarereignisse

Einelementige Teilmengen $A = \{\omega\}$ von $\Omega$ heißen *Elementarereignisse*.

### Operieren mit Ereignissen

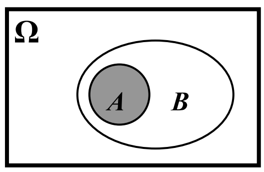
***Venn-Diagramm***

(*i*) *Gleichheit von Ereignissen*

Zwei Ereignisse $A$ und $B$ heißen gleich, in Zeichen $A = B$, wenn gilt: $\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B$.

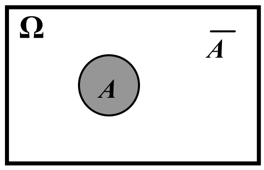
(*ii*) *Teilereignis*

Ein Ereignis $A$ heißt Teilereignis des Ereignisses $B$, in Zeichen $A \subset B$, wenn gilt: $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$. Man sagt, dass Ereignis $A$ zieht das Ereignis $B$ nach sich.



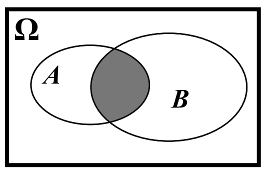

(*iii*) *Komplementärereignis*

Ist $A$ ein Ereignis, dann ist auch $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \notin A\}$ ein Ereignis und heißt komplementär zu $A$. Man sagt, $\overline{A}$ tritt genau dann ein, wenn $A$ nicht eintritt.



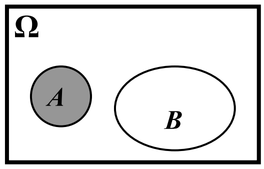

(*iv*) *Durchschnitt*

Sind $A$ und $B$ Ereignisse, dann ist auch $A \cap B = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \in A \wedge \omega \in B\}$ ein Ereignis und heißt Durchschnitt der Ereignisse $A$ und $B$. Man sagt, die Ereignisse $A$ und $B$ treten zugleich ein.



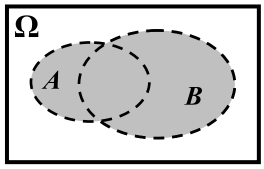
(*v*) *Disjunkte Ereignisse*

Zwei Ereignisse $A$ und $B$ heißen disjunkt (unverträglich), wenn gilt: $A \cap B = \varnothing$. Man sagt, wenn $A$ eintritt, tritt $B$ nicht ein.




(*vi*) *Vereinigung*

Sind $A$ und $B$ Ereignisse, dann ist auch $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$ ein Ereignis und heißt Vereinigung der Ereignisse $A$ und $B$. Man sagt, $A$ oder $B$ tritt ein.




#### W-Maß, W-Raum

Eine Abbildung $P : \mathcal{F} \to IR$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* (*W-Maß*), wenn sie die folgenden Kolmogorow´schen Axiome erfüllt:

**Axiom 1** $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse $A \in \mathcal{F}$ (*Nichtnegativitätsaxiom*)

**Axiom 2** $P(\Omega) = 1$ (*Normierungsaxiom*)

**Axiom 3** Für disjunkte Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \cap B = \varnothing$ gelte:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{(Additivität)}$$

Die reelle Zahl $P(A)$ heißt *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses $A$.

#### Operieren mit Wahrscheinlichkeiten

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum und $A, B, C \in \mathcal{F}$ Ereignisse. Dann gilt:

*(i)* $0 \leq P(A) \leq 1$

*(ii)* $P(\varnothing) = 0$

*(iii)* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (Gegenwahrscheinlichkeit)

*(iv)* $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (Monotonie)

*(v)* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Additionssatz für 2 Ereignisse)

*(vi)* $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ (Additionssatz für 3 Ereignisse)

## 4.2 Wahrscheinlichkeitskonzeptionen

#### Laplace-Wahrscheinlichkeit

Es liege ein Zufallsvorgang mit einem abzählbar-endlichem Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$, $N < \infty$, vor. Das Ereignisfeld sei $\mathcal{F} = P(\Omega)$. Die Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ $(i = 1, ..., N)$ seien gleichwahrscheinlich, d.h. sie sind hinsichtlich der Unbestimmtheit ihres Eintretens nicht unterscheidbar.

Dann ist für ein beliebiges Ereignis $A \in \mathcal{F}$ die *Laplace-Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten von $A$ festgelegt durch das Verhältnis

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{N} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} \,.$$

**Häufigkeiten von Ereignissen**

Bei der $n$-fach wiederholten Durchführung eines Zufallsvorgangs sei ein Ereignis $n(A)$-fach eingetreten. Wir bezeichnen $n(A)$ als die *absolute Häufigkeit* und

$$h_n(A) = \frac{n(A)}{n}$$

als die relative Häufigkeit von $A$.

**Statistische Wahrscheinlichkeit**

Die *statistische Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten eines Ereignisses $A$ ist die Zahl $P(A)$, um die sich die relative Häufigkeit $h_n(A)$ bei wachsender Versuchswiederholungszahl $n$ stabilisiert.

## 4.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

**Bedingte Wahrscheinlichkeit (von *A* unter der Bedingung *B*)**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{falls } P(B) > 0$$

**Gemeinsames Eintreten zweier Ereignisse (Multiplikationssatz)**

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

**Gemeinsames Eintreten dreier Ereignisse (Multiplikationssatz)**

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$$

**Vollständiges System**

Für einen gegebenen W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ seien $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkte Ereignisse, die den Ergebnisraum $\Omega$ ganz ausfüllen, d.h. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann bezeichnet man die Ereignisse als ein *vollständiges System*.

**Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ sei ein vollständiges System von Ereignissen und $B$ ein weiteres Ereignis mit $P(A_i) > 0$, $P(B) > 0$. Dann gilt:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \ .$$

**Theorem von Bayes**

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ sei ein vollständiges System von Ereignissen und $B$ ein weiteres Ereignis mit $P(A_i) > 0$, $P(B) > 0$. Dann gilt:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \qquad \text{für } k = 1,\ldots,m \ .$$

Im Spezialfall $m = 2$ gilt mit $A_1 = A$ und $A_2 = \overline{A}$:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})} \quad .$$

**Unabhängigkeit zweier Ereignisse**

Die Ereignisse $A$ und $B$ heißen *stochastisch unabhängig* (voneinander), wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \; .$$

**Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse**

Die Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_m$ heißen (*vollständig*) *stochastisch unabhängig*, wenn für jede beliebige Auswahl von ganzzahligen Indizes $i_1, i_2, ..., i_k$ mit

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m \qquad (k = 2, 3, ..., m)$$

die Gleichung

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{i_k}\right)$$

erfüllt ist.

## 4.4 Kombinatorik

**Fakultät**

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$$

**Binomialkoeffizient**

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \; ... \; \cdot (n-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdot \; ... \; \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

**Kombinationen**

Eine Auswahl von $n$ Objekten aus $N$ Objekten heißt *Kombination* von $n$ aus $N$ Objekten.

**Kombinationen ohne Wiederholung unter Berücksichtigung der Anordnung**

Für $N$ gegebene voneinander verschiedene Objekte ist die Anzahl der Kombinationen von $n$ aus $N$ Objekten mit Berücksichtigung der Anordnungen gleich

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot ... \cdot (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!} \; .$$

**Kombinationen ohne Wiederholung ohne Berücksichtigung der Anordnung**

Die Anzahl der Kombinationen von $n$ aus $N$ verschiedenen Objekten ohne Berücksichtigung der Anordnung ist

$$\binom{N}{n} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \; ... \; \cdot (N-n+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \; ... \; \cdot 2 \cdot 1} = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} \; .$$

**Kombinationen mit Wiederholung unter Berücksichtigung der Anordnung**

Die Anzahl der Kombinationen von $n$ aus $N$ verschiedenen wiederholbaren Objekten mit Berücksichtigung der Anordnung beträgt

$$N^n \; .$$

**Kombinationen mit Wiederholung ohne Berücksichtigung der Anordnung**

Die Anzahl der Kombinationen von $n$ aus $N$ verschiedenen wiederholbaren Objekten ohne Berücksichtigung der Anordnung ist

$$\binom{N+n-1}{n} \; .$$

# 5 Eindimensionale Zufallsvariablen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen

**Notation**

| | |
|---|---|
| Zufallsvariable | $X$ |
| Verteilungsfunktion | $F(x)$ |
| Wahrscheinlichkeitsfunktion | $f(x)$ |
| Dichtefunktion | $f(x)$ |
| Mittelwert, Erwartungswert | $\mu$, $E(X)$ |
| Varianz | $\sigma^2$ |
| Standardabweichung | $\sigma$ |

**Zufallsvariable**

Gegeben sei ein Zufallsexperiment mit dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Eine Abbildung

$$X : \Omega \to IR\ ,\quad \omega \mapsto X(\omega)$$

heißt [*eindimensionale*] *Zufallsvariable* [*über* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ], wenn für jede reelle Zahl $x$ die Menge

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\}$$

ein Element von $\mathcal{F}$ (d.h. ein Ereignis) ist. Ist $\omega$ das Ergebnis der Durchführung des Zufallsexperiments, dann heißt der zugehörige Wert $X(\omega)$ *Realisierung* oder *Realisation* der Zufallsvariablen $X$.

**Verteilungsfunktion**

Die Funktion

$$F : IR \to [\,0\,,1\,] \quad \text{mit} \quad x \mapsto F(x) = P(X \le x)$$

heißt *Verteilungsfunktion* der Zufallsvariablen $X$. Sie ordnet jeder reeller Zahl $-\infty < x < +\infty$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \le x)$ zu.

**Eigenschaften von Verteilungsfunktionen**

(*i*) $F$ ist monoton wachsend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$;

(*ii*) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(*iii*) $F$ ist rechtsstetig, d.h. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)$.

**Operieren mit Verteilungsfunktionen**

$F$ sei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $X$ und $a$, $b$ seien reelle Zahlen mit $a < b$. Es gilt:

(*i*) $P(X > a) = 1 - F(a)$

(*ii*) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

(*iii*) $P(X = a)$ = Höhe des Sprunges von $F$ im Punkt $a$

(*iv*) $P(X < a) = F(a) - P(X = a)$

(*v*) $P(X \ge a) = 1 - F(a) + P(X = a)$

(*vi*) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$

(*vii*) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$

(*viii*) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b)$.

**Diskrete Zufallsvariable**

Eine Zufallsvariable $X$ heißt *diskret*, wenn ihr Bildbereich endlich oder abzählbar unendlich viele Werte enthält. Wir bezeichnen diese Realisationsmöglichkeiten einfach mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Die Werte nennt man auch *Sprungstellen* und ihre Wahrscheinlichkeiten *Sprunghöhen*.

**Wahrscheinlichkeitsfunktion**

Es sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable. Die Funktion $f$: $IR \to [0\ ,\ 1]$ mit

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_i & \text{falls } x = x_i \ (i = 1,2,3,\ldots) \\ 0 & \text{sonst (alle übrigen reellen } x) \end{cases}$$

heißt die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* von $X$.

**Stetige Zufallsvariable, Dichtefunktion**

Eine Zufallsvariable $X$ heißt *stetig*, wenn eine nicht-negative Funktion $f(x)$ (d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in IR$) existiert, die für jede reelle Zahl $x$ die Gleichung

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

erfüllt, wobei $F(x) = P(X \leq x)$ die Verteilungsfunktion von $X$ ist. Die Funktion $f(x)$ heißt *Dichtefunktion* oder kurz *Dichte* von $X$.

**Eigenschaften von Dichtefunktionen**

(*i*) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

(*ii*) $P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ für beliebige $a, b \in IR$ mit $a \leq b$;

(*iii*) $F'(x) = f(x)$ falls $F(x)$ differenzierbar im Punkt $x$.

**Mittelwert, Erwartungswert**

$$E(X) = \mu = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot f(x_i) & \text{falls } X \text{ diskret mit den Sprungstellen } x_i \ (i = 1,2,\ldots) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

**Varianz**

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sigma^2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) & \text{falls } X \text{ diskret mit den Sprungstellen } x_i \ (i = 1,2,\ldots) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

**Standardabweichung**

$$\sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

**Verschiebungssatz der Varianz**

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

**Symmetrische Verteilung**

Eine Zufallsvariable $X$ mit der Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion $f(x)$ heißt *symmetrisch verteilt bezüglich einer Zahl c*, wenn für alle $x \in IR$ gilt: $f(c-x) = f(c+x)$ .

**Symmetriepunkt einer symmetrischen Verteilung**

Besitzt eine Zufallsvariable den Mittelwert $\mu$ und eine bezüglich der Zahl *c* symmetrische Verteilung, dann ist $c = \mu$ .

**Mittelwert und Varianz lineartransformierter Zufallsvariablen**

Es sei $X$ eine Zufallsvariable mit dem Mittelwert $E(X) = \mu_X$ und der Varianz $Var(X) = \sigma_X^2$, dann gilt für die lineartransformierte Variable $Y = a_0 + a_1 X$ mit $a_1 \neq 0$ :

$$E(Y) = a_0 + a_1 E(X) \quad \text{bzw.} \quad \mu_Y = a_0 + a_1 \mu_X \ ,$$

$$Var(Y) = a_1^2 Var(X) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_X^2 \ .$$

**Standardisierte Zufallsvariable**

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \quad \text{bzw.} \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

**Quantile, Median, Quartile**

Jede reelle Zahl $x_{[p]}$, die für eine vorgegebene Zahl *p* mit $0 < p < 1$ die Ungleichungen

$$P(X \leq x_{[p]}) \geq p \quad \text{und} \quad P(X \geq x_{[p]}) \geq 1 - p$$

beide erfüllt, heißt *p-Quantil* oder (*p·100*)%-*Punkt* (der Wahrscheinlichkeitsverteilung) der Zufallsvariablen *X*. Im Fall einer stetigen Zufallsvariablen vereinfacht sich die Bedingung zu

$$P(X \leq x_{[p]}) = F(x_{[p]}) = p \ .$$

$x_{[p]}$ muss nicht eindeutig bestimmt sein.

Das 0.5-Quantil (50%-Punkt) heißt *Median* und wird als Lagemaß einer Verteilung genutzt.

Die 0.25- und 0.75-Quantile (25%- und 75%-Punkte) heißen *unteres* bzw. *oberes Quartil*.

**Ungleichung von Tschebyschev**

Es sei $X$ eine Zufallsvariable mit dem Mittelwert $E(X) = \mu$ und der Varianz $Var(X) = \sigma^2$ . Dann gilt für jedes reelle $\varepsilon > 0$ :

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \text{oder äquivalent} \quad P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \ .$$

# 6 Mehrdimensionale Zufallsvariablen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen

**Zufallsvektor**

Mit $X_1,...,X_n$ seien $n \geq 2$ Zufallsvariablen über denselben W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bezeichnet. Das *n*-Tupel

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

heißt *n-Zufallsvektor*.

Der Zufallsvektor $\boldsymbol{X}$ ordnet einem Ergebnis $\omega \in \Omega$ des zugrundeliegenden Zufallsvorgangs ein *n*-Zahlentupel

$$\boldsymbol{X}(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in IR^n$$

zu, das als *Realisation* von $\boldsymbol{X}$ bezeichnet wird.

**Gemeinsame Verteilungsfunktion**

Die Funktion $F: IR^n \to [\,0,1\,]$ der *n* reellwertigen Veränderlichen $x_1,...,x_n$ mit

$$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) = P((X_1 \leq x_1) \cap \cdots \cap (X_n \leq x_n)) \equiv P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n)$$

heißt *Verteilungsfunktion des Zufallsvektor* $\boldsymbol{X}$ oder *gemeinsame Verteilungsfunktion* der Zufallsvariablen $X_1,...,X_n$.

**Diskreter Zufallsvektor**

Ein 2-Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X, Y)'$ heißt *diskret*, wenn er endlich oder höchstens abzählbar unendlich viele Wertepaare $(x_i, y_j)' \in IR^2$ mit $i = 1,2,...$ und $j = 1,2,...$ annehmen kann.

**Wahrscheinlichkeitsfunktion**

Die für alle $(x, y)' \in IR^2$ definierte Funktion $f_{XY}(x, y)$ mit

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y) = \begin{cases} p_{ij} & \text{falls } x = x_i, y = y_j \quad (i = 1,2,... ;\ j = 1,2,...) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion des Zufallsvektors* oder *gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion* der Zufallsvariablen *X, Y*.

**Stetiger Zufallsvektor, Dichtefunktion**

Ein 2-Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X, Y)'$ heißt *stetig*, wenn sich die zugehörige Verteilungsfunktion durch ein Zweifach-Integral der Form

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t_1, t_2)\,dt_2\,dt_1$$

darstellen lässt. Hierbei ist $f_{XY}(x, y)$ eine für alle $(x, y)' \in IR^2$ definierte nicht-negative Funktion und heißt *Dichtefunktion des Zufallsvektors* oder *gemeinsame Dichte* der Zufallsvariablen *X, Y*.

**Randverteilungsfunktion**

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty) \quad \text{bzw.} \quad F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty,y)$$

**Unabhängigkeit von Zufallsvariablen**

Die Komponenten eines $n$-Zufallsvektors $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)'$ heißen *stochastisch unabhängig*, wenn für alle reellen Zahlen $x_1,...,x_n$ gilt:

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)\ .$$

Ist dies nicht der Fall, so heißen die Zufallsvariablen *stochastisch abhängig*.

**Unabhängigkeit von Zufallsvariablen**

Die Komponenten eines $n$-Zufallsvektors $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)'$ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn für ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. Dichte für alle reellen $x_1,...,x_n$ gilt:

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)\ .$$

**Kovarianz**

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sigma_{XY}$$

**Korrelationskoeffizient (normierte Kovarianz)**

$$Corr(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho_{XY}$$

**Verschiebungssatz für die Kovarianz**

$$\sigma_{XY} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y\ .$$

**Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und Korrelation**

Wenn die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig sind, dann sind sie auch unkorreliert, d.h. $\sigma_{XY} = \rho_{XY} = 0$ . Die Umkehrung der Aussage gilt nicht allgemein.

**Mittelwert und Varianz der Linearkombination zweier Zufallsvariablen**

Es seien $\boldsymbol{X} = (X,Y)'$ ein 2-Zufallsvektor, $a_1, a_2 \neq 0$ reelle Konstanten und $Z = a_1 X + a_2 Y$ eine Linearkombination von $X$ und $Y$. Dann ist

$$\mu_Z = a_1\mu_X + a_2\mu_Y \quad \text{und} \quad \sigma_Z^2 = a_1^2\sigma_X^2 + a_2^2\sigma_Y^2 + 2a_1a_2\sigma_{XY}\ .$$

**Mittelwert und Varianz der Linearkombination mehrerer Zufallsvariablen**

Es seien $X_1,...,X_n$ Zufallsvariablen und $a_1,...,a_n$ reelle Konstanten. Dann gilt

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i),$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_i a_j Cov(X_i.X_j).$$

# 7 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungsmodelle

## 7.1 Diskrete Verteilungsmodelle

**Gleichverteilung oder uniforme Verteilung [** $X \sim U(m)$ **]**

| | |
|---|---|
| Wahrscheinlichkeits-funktion | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } x = x_i \ (i=1,\ldots,m) \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$ |
| Parameter | $m \in IN$ |
| Mittelwert, Varianz | $E(X) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$ , $\quad Var(X) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j\right)^2$ |

**Binomialverteilung [** $X \sim B(n, p)$ **]**

| | |
|---|---|
| Wahrscheinlichkeits-funktion | $f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{falls } x = 0,1,\cdots,n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |
| Parameter | $n, p$ mit $n \in IN, p \in IR$ und $0 < p < 1$ |
| Mittelwert, Varianz | $E(X) = n \cdot p$ , $\quad Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$ |
| Reproduktivität | $X \sim B(n_1, p)$ und $Y \sim B(n_2, p)$ seien unabhängig, dann gilt $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$. |

**Poisson-Verteilung [** $X \sim Po(\lambda)$ **]**

| | |
|---|---|
| Wahrscheinlichkeits-funktion | $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} & \text{falls } x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |
| Parameter | $\lambda \in IR$ , $\lambda > 0$ |
| Mittelwert, Varianz | $E(X) = Var(X) = \lambda$ |
| Reproduktivität | $X \sim Po(\lambda_1)$ und $Y \sim Po(\lambda_2)$ seien unabhängig, dann ist $X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$. |

**Geometrische Verteilung [** $X \sim G(p)$ **]**

| | |
|---|---|
| Wahrscheinlichkeits-funktion | $f(x) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^x & \text{falls } x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |
| Verteilungsfunktion | $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1-(1-p)^{int(x)+1} & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$ <br> ( $int(x)$ ist der ganzzahlige Anteil von $x$) |
| Parameter | $p \in IR$ und $0 < p < 1$ |
| Mittelwert, Varianz | $E(X) = \frac{1-p}{p}$ , $\quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ |

**Hypergeometrische Verteilung [ $X \sim H(n,N,M)$ ]**

| | |
|---|---|
| Wahrscheinlichkeits-funktion | $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{falls } x=a,a+1,\ldots,b-1,b\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ |
| Parameter | $n,N,M \in IN$ mit $n \le N$, $M \le N$, $a = max\{0,[n-(N-M)]\}$, $b = min\{n,M\}$ |
| Mittelwert, Varianz | $E(X)=n\cdot\dfrac{M}{N}=n\cdot p$ , <br> $Var(X)=n\cdot\dfrac{M}{N}\cdot\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\cdot\dfrac{N-n}{N-1}=n\cdot p\cdot(1-p)\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$ mit $p=M/N$ |

## 7.2 Stetige Verteilungsmodelle

**Rechteckverteilung [ $X \sim R(\alpha,\beta)$ ]**

| | |
|---|---|
| Dichtefunktion | $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\beta-\alpha} & \text{falls } \alpha\le x\le\beta\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ |
| Verteilungsfunktion | $F(x)=\begin{cases}0 & \text{falls } x<\alpha\\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{falls } \alpha\le x\le\beta\\ 1 & \text{falls } x>\beta\end{cases}$ |
| Parameter | $\alpha,\beta \in IR$ mit $\alpha<\beta$ |
| Mittelwert, Varianz | $E(X)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ , $Var(X)=\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$ |

**Exponentialverteilung [ $X \sim Ex(\lambda)$ ]**

| | |
|---|---|
| Dichtefunktion | $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{falls } x\ge 0\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases}$ |
| Verteilungsfunktion | $F(x)=\begin{cases}0 & \text{falls } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{falls } x\ge 0\end{cases}$ |
| Parameter | $\lambda \in IR$, $\lambda>0$ |
| Mittelwert, Varianz | $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ , $Var(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ |
| Markov-Eigenschaft | $P(X\le x+s \mid X>x)=P(X\le s)$ für alle reellen $x,s>0$ |

**Normalverteilung (Gauss-Verteilung) [ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ]**

| | |
|---|---|
| Dichtefunktion | $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $(-\infty<x<\infty)$ |
| Verteilungsfunktion | $F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dt$ |

| | |
|---|---|
| Parameter | $\mu, \sigma^2 \in IR$, $\sigma^2 > 0$ |
| Mittelwert, Varianz | $E(X) = \mu$ , $Var(X) = \sigma^2$ |
| Reproduktivität | Es seien $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ unabhängige Zufallsvariablen, dann gilt für alle reellen $a, b \neq 0$: $aX + bY \sim N\left(a\mu_X + b\mu_Y \ , \ a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2\right)$ . |

**Standardnormalverteilung [ $Z \sim N(0,1)$ ]**

| | |
|---|---|
| Dichtefunktion | $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ $(-\infty < z < \infty)$ |
| Verteilungsfunktion | $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ |
| Parameter | $\mu = 0, \ \sigma^2 = 1$, |
| Mittelwert, Varianz | $E(Z) = 0$ , $Var(Z) = 1$ |

**Verteilungsfunktionen/Quantile der Normal- und der Standardnormalverteilung**

Zwischen dem *p*-Quantil $x_{[p]}$ der $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung und dem *p*-Quantil $z_{[p]}$ der Standardnormalverteilung besteht die Beziehung

$$z_{[p]} = \frac{x_{[p]} - \mu}{\sigma} \qquad \text{oder} \qquad x_{[p]} = \mu + \sigma \cdot z_{[p]} \ .$$

Ferner gilt für alle reellen Zahlen *x*:

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi(\underbrace{\frac{x-\mu}{\sigma}}_{=z}) = \Phi(z) \ .$$

Außerdem gilt

$$P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \ .$$

**Symmetrie der Standardnormalverteilung**

Die Standardnormalverteilung ist symmetrisch bezüglich dem Punkt $\mu = 0$. Hieraus resultiert

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \qquad \text{und} \qquad z_{[p]} = -z_{[1-p]} \ .$$

**Zentrales Schwankungsintervall**

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Das Zahlenintervall

$$\left[\mu - z_{\left[1-\frac{\alpha}{2}\right]} \cdot \sigma \ , \ \mu + z_{\left[1-\frac{\alpha}{2}\right]} \cdot \sigma\right]$$

mit

$$P\left(\mu - z_{\left[1-\frac{\alpha}{2}\right]} \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z_{\left[1-\frac{\alpha}{2}\right]} \cdot \sigma\right) = 1 - \alpha$$

heißt zentrales Schwankungsintervall oder $z_{\left[1-\frac{\alpha}{2}\right]}$-faches $\sigma$-Intervall.

### Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy

$X_1, ..., X_n$ seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die alle den Mittelwert $\mu$ und die Varianz $\sigma^2$ besitzen. Dann konvergiert die Verteilungsfunktion $F_{Z_n}(z) = P(Z_n \le z)$ der Zufallsvariablen

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

mit wachsender Summandenzahl $n$ gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der $N(0,1)$-Verteilung:

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(z) = \Phi(z) \qquad (-\infty < z < \infty) \ .$$

### Grenzwertsatz von DeMoivre-Laplace

Es sei $X$ binomialverteilt mit den Parametern $n$ und $p$ sowie dem Erwartungswert $\mu = np$ und der Varianz $\sigma^2 = np(1-p)$. Dann konvergiert die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable

$$Z_n = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für $n \to \infty$ gegen die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der $N(0,1)$-Verteilung.

### Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur

Für $X \sim B(n, p)$ und ganzzahlige $x$ gilt:

$$F(x) = P(X \le x) \approx \Phi\left(\frac{x + 0.5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$$

$$b(x \mid n, p) = P(X = x) \approx \Phi\left(\frac{x + 0.5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 0.5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \ .$$

Als *Faustregel* sollte $n > \frac{9}{p(1-p)}$ gelten.

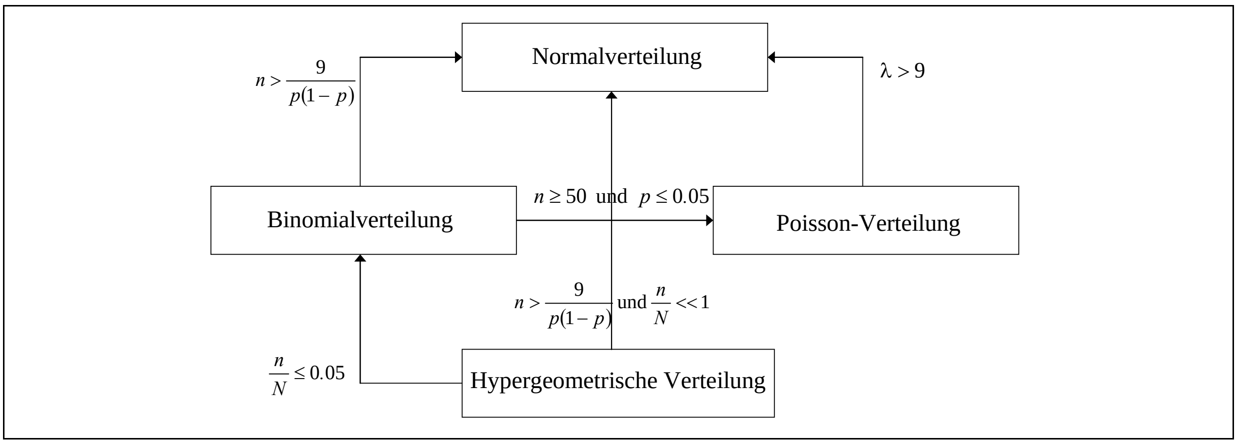
### Approximation der Poisson- durch die Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur

Für $X \sim Po(\lambda)$ gilt bei großem $\lambda$ (= $np$) und ganzzahlige $x$

$$F(x) = P(X \le x) \approx \Phi\left(\frac{x + 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \ .$$

Man beachte, dass $E(X) = Var(X) = \lambda$ ist. Als *Faustregel* sollte $\lambda > 9$ gelten.

### Approximationsbeziehungen zwischen verschiedenen Verteilungen



## 7.3 Stichprobenverteilungen

### Chi-Quadrat-Verteilung

$Z_1,...,Z_n$ seien $n$ stochastisch unabhängige, jeweils $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Die Verteilung der Quadratsumme

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

heißt *Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden* oder kurz $\chi^2(n)$-Verteilung. Die sogenannte Anzahl $n$ der Freiheitsgrade ist der Parameter der Verteilung.

### t-Verteilung (STUDENT-Verteilung)

$Z$ sei $N(0,1)$-verteilt, $\chi^2$ besitze eine $\chi^2(n)$-Verteilung, und beide Zufallsvariablen seien unabhängig voneinander. Die Verteilung der Zufallsvariable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2 / n}}$$

heißt *t-Verteilung mit n Freiheitsgraden* oder kurz $t(n)$*-Verteilung*. Die Anzahl $n$ der Freiheitsgrade ist der Parameter der Verteilung.

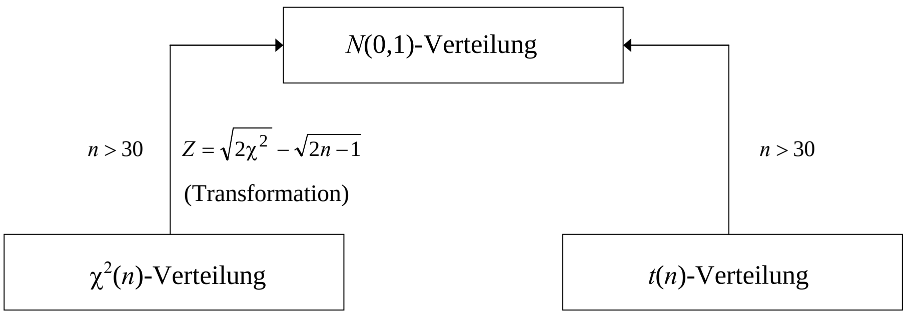
### F-Verteilung (Fisher-Verteilung)

Die Zufallsvariable $\chi_1^2$ sei $\chi^2(n)$-verteilt, die Zufallsvariable $\chi_2^2$ sei $\chi^2(m)$-verteilt, und beide Zufallsvariablen seien unabhängig voneinander. Die Verteilung der Zufallsvariable

$$F = \frac{\chi_1^2 / n}{\chi_2^2 / m}$$

heißt *F-Verteilung mit n und m Freiheitsgraden* oder kurz $F(n,m)$*-Verteilung*. Hierbei sind $n$ und $m$ positive ganze Zahlen. Sie sind die Parameter der Verteilung.

### Approximationsbeziehungen zwischen verschiedenen Verteilungen




Beachte: $Z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1} \Leftrightarrow \chi^2 = \frac{1}{2}\left(Z + \sqrt{2n-1}\right)^2$

# 8 Gesetze der großen Zahlen, Punktschätzung

### Einfache Zufallsstichprobe

Sei $X$ eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F(x)=P(X \le x)$. Ein Vektor $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)'$ von $n$ Stichprobenvariablen mit den Eigenschaften

(*i*) die Variablen $X_1,...,X_n$ sind alle identisch wie $X$ verteilt, d.h. sie besitzen alle die gleiche Verteilungsfunktion $F$;

(*ii*) die Variablen $X_1,...,X_n$ sind stochastisch unabhängig;

heißt *einfache Zufallsstichprobe* (mathematische Stichprobe) vom Umfang $n$ aus der Grundgesamtheit $X$ mit der Verteilungsfunktion $F$. Die Eigenschaften der Stichprobenvariablen bezeichnet man auch als *i.i.d.* (*independend and identically distributed*). Eine beobachtete Realisierung $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)'$ von $\boldsymbol{X}$ nennen wir *konkrete Stichprobe* oder einfach beobachtete Stichprobe.

### Stichprobenfunktion, Statistik

Eine Zufallsvariable $T=T(X_1,...,X_n)$, die als Funktion von Stichprobenvariablen $X_1,...,X_n$ definiert ist, heißt *Stichprobenfunktion* oder *Statistik*. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $T$ nennen wir *Stichprobenverteilung* von $T$. Liegt eine konkrete Stichprobenrealisation $x_1,...,x_n$ vor, dann nimmt die Stichprobenfunktion den konkreten Wert $t=T(x_1,...,x_n)$ als Realisation an.

### (Schwaches) Gesetz der großen Zahlen

$X_1,...,X_n$ sei eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n$ aus einer Grundgesamtheit $X$ mit dem Mittel $E(X)=\mu$ und der Varianz $Var(X)=\sigma^2$. Ferner sei $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu$ der arithmetische Mittelwert der Stichprobenvariablen. Dann gilt für beliebig kleine $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)=1.$$

### BERNOULLIS Gesetz der großen Zahlen

$X_1,...,X_n$ sei eine einfache Zufallsstichprobe vom Umfang $n$ aus einer dichotomen Grundgesamtheit $X$. Das interessierende Ereignis $A$ trete mit der Wahrscheinlichkeit $P(A)=p$ ein. Ferner sei $H_n(A)$ die relative Stichprobenhäufigkeit von $A$. Dann gilt für beliebig kleine $\varepsilon>0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|H_n(A)-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

### Hauptsatz der mathematischen Statistik (in abgeschwächter Form)

$V_n(x)$ sei die empirische Verteilungsfunktion einer einfachen Zufallsstichprobe vom Umfang $n$ aus der Grundgesamtheit $X$ mit der Verteilungsfunktion $F(x)$. Für beliebig kleine reelle $\varepsilon>0$ und jede reelle Zahl $x$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|V_n(x)-F(x)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

### Schätzfunktion, Schätzwert

Gegeben sei eine Realisierung $x_1,...,x_n$ der einfachen Zufallsstichprobe $X_1,...,X_n$ vom Umfang $n$ aus der Grundgesamtheit $X$ mit der unbekannten Kenngröße $\theta$. Eine Stichprobenfunktion $T_{n,\theta}=T(X_1,...,X_n)$, deren Realisierung $t_{n,\theta}=T(x_1,...,x_n)$ als Näherung der Kenngröße $\theta$ dient, heißt *Schätzfunktion* oder kurz *Schätzer* für $\theta$. Die Realisierung $t_{n,\theta}$ des Schätzers heißt *Schätzwert* für $\theta$. Den Schätzwert schreibt man häufig auch $\hat{\theta}$.

### Erwartungstreue, Verzerrung, Bias

Eine Schätzfunktion $T_{n,\theta}$ heißt *erwartungstreue* (oder *unverzerrte*) Schätzung für θ, falls $E\left(T_{n,\theta}\right)=\theta$ gilt. Anderenfalls heißt $T_{n,\theta}$ *verzerrt*, und die Differenz $E(T_{n,\theta})-\theta=B(T_{n,\theta})$ heißt der *Bias* oder der *systematische Fehler* von $T_{n,\theta}$. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} B\left(T_{n,\theta}\right)=0$ , so nennt man $T_{n,\theta}$ *asymptotisch erwartungstreu*.

### Relative und absolute Effizienz

Sind $T_{n,\theta}$ und $T^*_{n,\theta}$ zwei erwartungstreue Schätzfunktionen für die Kennzahl θ, so heißt $T^*_{n,\theta}$ *effizienter* als $T_{n,\theta}$, wenn für alle möglichen Werte von θ

$$Var\left(T^*_{n,\theta}\right)\leq Var\left(T_{n,\theta}\right)$$

erfüllt ist und für mindestens einen Wert das '<' Zeichen gilt. $T^*_{n,\theta}$ heißt *absolut effizient* oder *effizientester* Schätzer für θ, falls es keinen anderen erwartungstreuen Schätzer $T_{n,\theta}$ für θ gibt, der effizienter als $T^*_{n,\theta}$ ist.

### Konsistenz, stochastische Konvergenz

Eine Schätzfunktion $T_{n,\theta}=T(X_1,...,X_n)$ für die Kennzahl θ heißt (schwach) *konsistent*, wenn für jedes reelles $\varepsilon>0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|T_{n,\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1\,.$$

Man sagt dann auch, $T_{n,\theta}$ konvergiert stochastisch (konvergiert in Wahrscheinlichkeit) gegen θ und schreibt symbolisch $p\lim T_{n,\theta}=\theta$. Hierbei steht *plim* für „probability limit“.

### Hinreichende Bedingung für Konsistenz

Gilt $E(T_{n,\theta})=\theta$ oder zumindest $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_{n,\theta})=\theta$ und $\lim\limits_{n\to\infty} Var(T_{n,\theta})=0$, dann ist die Schätzfunktion $T_{n,\theta}$ (schwach) konsistent.

### Likelihoodfunktion, Maximum– Likelihood–Schätzung

Sei $x_1,...,x_n$ eine Realisation der einfachen Zufallsstichprobe $X_1,...,X_n$ aus der Grundgesamtheit $X$ mit der Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion $f_X(x\mid\theta)$. Die Funktion

$$L(\theta\mid x_1,...,x_n)=\prod_{\nu=1}^{n} f_X\left(x_\nu\mid\theta\right)$$

für alle zulässigen Werte von θ heißt die *Likelihoodfunktion der konkreten Stichprobe* $x_1,...,x_n$. Gilt in der Stelle $\theta=\hat{\theta}$

$$L\left(\hat{\theta}|x_1,...,x_n\right)\geq L\left(\theta|x_1,...,x_n\right) \qquad \text{für alle möglichen Werte von } \theta,$$

so ist $\hat{\theta}\equiv t_{n,\theta}=T\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ der *Maximum-Likelihood*-(*ML*)-*Schätzwer*t für θ. Die zugehörige Stichprobenfunktion $T_{n,\theta}=T\left(X_1,\cdots,X_n\right)$ heißt der *Maximum-Likelihood*-(*ML*)-*Schätzer* für θ.

Zur praktischen Bestimmung von ML-Schätzern bedient man sich häufig der Differentialrechnung. Hierbei kann man sich zunutze machen, dass $L\left(\theta\mid x_1,...,x_n\right)$ genau dort ein Maximum besitzt, wo auch die logarithmierte Likelihoodfunktion oder *Loglikelihoodfunktion*

$$\ln L\left(\theta\mid x_1,...,x_n\right)=\ln\prod_{\nu=1}^{n} f_X\left(x_\nu\mid\theta\right)=\sum_{\nu=1}^{n}\ln f_X\left(x_\nu\mid\theta\right)$$

ein Maximum besitzt. Eine Summe ist i.d.R. leichter zu differenzieren als ein Produkt.

# 9 Confidence Intervals and Tests of Hypotheses

**Symbols**

| | |
|---|---|
| $N(\mu,\sigma^2)$ | normal distribution with mean $\mu$ and variance $\sigma^2$ |
| $N(0,1)$ | standard normal distribution |
| $B(1,p)$ | Bernoulli distribution |
| $z_{[p]}$ | $p$-quantile of the standard normal distribution (**notice:** $z_{[p]} = -z_{[1-p]}$) |
| $t_{[p;n]}$ | $p$-quantile of the $t$-distribution with $n$ degrees of freedom (**notice:** $t_{[p;n]} = -t_{[1-p;n]}$) |
| $\chi^2_{[p;n]}$ | $p$-quantile of the $\chi^2$-distribution with $n$ degrees of freedom |
| $f_{[p;n,m]}$ | $p$-quantile of the $F$-distribution with $n$ and $m$ degrees of freedom |
| $\alpha$ | significance level |
| $x_{med}$ | median of a distribution |
| $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu$ | sample mean |
| $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(X_\nu - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^2 - n\overline{X}^2\right)$ | sample variance |

**Interval Estimation**

**Confidence interval for the mean of a normal distribution**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,\dots,X_n$ from a $N(\mu,\sigma^2)$-population; $\mu,\sigma^2$ unknown

100(1-α)% confidence interval:

$$\left[\overline{X} - t_{[1-\alpha/2;n-1]} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + t_{[1-\alpha/2;n-1]} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Remark: For $n$>30 $t_{[p;n-1]}$ can be approximated by the standard normal $p$-quantile $z_{[p]}$.

**Confidence interval for the variance of a normal distribution**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,\dots,X_n$ from a $N(\mu,\sigma^2)$-population; $\mu,\sigma^2$ unknown

100(1-α)% confidence interval:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{[1-\alpha/2;n-1]}}\ ;\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{[\alpha/2;n-1]}}\right]$$

**Large sample confidence interval for the mean of a distribution (arbitrary distribution)**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ from a population with unknown mean μ and variance $\sigma^2$; $n$ large

Approximate 100(1-α)% confidence interval:

$$\left[\overline{X} - z_{[1-\alpha/2]} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{[1-\alpha/2]} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

**Required sample size for estimating the mean of a distribution (arbitrary distribution)**

Sample: Independent sample variables from a population with unknown mean μ and known variance $\sigma^2$; $L^*$ is an upper bound for the length of the confidence interval

Lower bound for the sample size:

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{[1-\alpha/2]} \cdot \sigma}{L^*}\right)^2$$

Remark: The resulting bound should be large to justify the formula by the central limit theorem.

**Large sample confidence interval for the probability of a Bernoulli distribution**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ from a Bernoulli population with unknown probability $p$; $n$ large

Approximate 100(1-α)% confidence interval:

$$\left[\overline{X} - z_{[1-\alpha/2]} \cdot \sqrt{\frac{\overline{X} \cdot (1-\overline{X})}{n}}\,;\,\overline{X} + z_{[1-\alpha/2]} \cdot \sqrt{\frac{\overline{X} \cdot (1-\overline{X})}{n}}\right]$$

**Required sample size for estimating the probability of a Bernoulli distribution**

Sample: Independent sample variables from a Bernoulli population with unknown probability $p$; $L^*$ is an upper bound for the length of the confidence interval

Lower bound for the sample size:

$$n \geq \left(\frac{z_{[1-\alpha/2]}}{L^*}\right)^2$$

Remark: The resulting bound should be large to justify the formula by the central limit theorem.

**Confidence interval for the difference of means of two normal distributions (equal variances)**

Samples: Two independent samples of $n$ independent, $N(\mu_x, \sigma_x^2)$-distributed sample variables $X_1,...,X_n$ and $m$ independent, $N(\mu_y, \sigma_y^2)$-distributed sample variables $Y_1,...,Y_m$; $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ unknown, but $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

100(1-α)% confidence interval:

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) - t_{[1-\alpha/2;n+m-2]} \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\,;\,(\overline{X}-\overline{Y}) + t_{[1-\alpha/2;n+m-2]} \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right], \text{ where } S_p^2 = \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}$$

**Confidence interval for the difference of means of two normal distributions (unequal variances)**

Samples: Two independent samples of $n$ independent, $N(\mu_x,\sigma_x^2)$-distributed sample variables $X_1,...,X_n$ and $m$ independent, $N(\mu_y,\sigma_y^2)$-distributed sample variables; $\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2$ unknown, but $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

100(1-α)% confidence interval:

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{[1-\alpha/2;df]}\cdot\sqrt{\frac{S_x^2}{n}+\frac{S_y^2}{m}}\;;\;(\overline{X}-\overline{Y})+t_{[1-\alpha/2;df]}\cdot\sqrt{\frac{S_x^2}{n}+\frac{S_y^2}{m}}\right],\text{ where } df=\frac{(1+Q)^2}{\frac{Q^2}{n-1}+\frac{1}{m-1}} \text{ and } Q=\frac{S_x^2\cdot m}{S_y^2\cdot n}$$

**Confidence interval for the ratio of variances of two normal distributions**

Samples: Two independent samples of $n$ independent, $N(\mu_x,\sigma_x^2)$-distributed sample variables $X_1,...,X_n$ and $m$ independent, $N(\mu_y,\sigma_y^2)$-distributed sample variables $Y_1,...,Y_m$; $\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2$ unknown

100(1-α)% confidence interval:

$$\left[\frac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\frac{1}{f_{[\alpha/2;n-1,m-1]}}\;;\;\frac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\frac{1}{f_{[1-\alpha/2;n-1,m-1]}}\right]$$

**Large sample confidence interval for the difference of means of two distributions (arbitrary distribution)**

Samples: Two independent samples of $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ and $m$ independent sample variables $Y_1,...,Y_m$ from populations with unknown means $\mu_x,\mu_y$ and variances $\sigma_x^2,\sigma_y^2$; $n$ and $m$ large

Approximate 100(1-α)% confidence interval:

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-z_{[1-\alpha/2]}\cdot\sqrt{\frac{S_x^2}{n}+\frac{S_y^2}{m}}\;;\;(\overline{X}-\overline{Y})+z_{[1-\alpha/2]}\cdot\sqrt{\frac{S_x^2}{n}+\frac{S_y^2}{m}}\right]$$

## Tests of Hypotheses

### t-test (normal distribution)

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ from a $N(\mu,\sigma^2)$-population; $\mu,\sigma^2$ unknown

| Hypotheses $H_0$ | $H_1$ | test-statistic; distribution of the statistic under the null hypothesis | critical values |
|---|---|---|---|
| $\mu=\mu_0$ | $\mu\neq\mu_0$ | $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}$ ; $t$-distribution with $n$-1 degrees of freedom (for $n$>30 the $t$-distribution can be approximated by $N(0,1)$) | $t_{[\alpha/2;n-1]}$ , $t_{[1-\alpha/2;n-1]}$ |
| $\mu\leq\mu_0$ | $\mu>\mu_0$ | | $t_{[1-\alpha;n-1]}$ |
| $\mu\geq\mu_0$ | $\mu<\mu_0$ | | $t_{[\alpha;n-1]}$ |

**Chi-square-test (normal distribution)**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ from a $N(\mu,\sigma^2)$-population; $\mu,\sigma^2$ unknown

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | critical values |
|---|---|---|
| $\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$<br>$\sigma^2\le\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$<br>$\sigma^2\ge\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ | $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ ; $\chi^2$-distribution with $n$-1 degrees of freedom | $\chi^2_{[\alpha/2;n-1]}$, $\chi^2_{[1-\alpha/2;n-1]}$<br>$\chi^2_{[1-\alpha;n-1]}$<br>$\chi^2_{[\alpha;n-1]}$ |

**Large samples Gauß-test for the mean of an arbitrary distribution**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ from a population with unknown mean μ and variance $\sigma^2$; $n$ large

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | critical values |
|---|---|---|
| $\mu=\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$<br>$\mu\le\mu_0$ $\mu>\mu_0$<br>$\mu\ge\mu_0$ $\mu<\mu_0$ | $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}$ ; asymptotic $N$(0,1)-distribution | $z_{[\alpha/2]}$ , $z_{[1-\alpha/2]}$<br>$z_{[1-\alpha]}$<br>$z_{[\alpha]}$ |

**Large samples Gauß-test for the probability of a Bernoulli distribution**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ from a Bernoulli population with unknown probability $p$; $n$ large

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | critical values |
|---|---|---|
| $p=p_0$ $p\neq p_0$<br>$p\le p_0$ $p>p_0$<br>$p\ge p_0$ $p<p_0$ | $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$ ; asymptotic $N$(0,1)-distribution | $z_{[\alpha/2]}$ , $z_{[1-\alpha/2]}$<br>$z_{[1-\alpha]}$<br>$z_{[\alpha]}$ |

**Two sample t-test (normal distributions)**

Samples: Two independent samples of independent, $N(\mu_x,\sigma_x^2)$-distributed sample variables $X_1,...,X_n$ and independent, $N(\mu_y,\sigma_y^2)$-distributed sample variables $Y_1,...,Y_m$; $\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2$ unknown, but $\sigma_x^2=\sigma_y^2$

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | critical values |
|---|---|---|
| $\mu_x=\mu_y$ $\mu_x\neq\mu_y$<br>$\mu_x\le\mu_y$ $\mu_x>\mu_y$<br>$\mu_x\ge\mu_y$ $\mu_x<\mu_y$ | $\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}$ where $S_p^2=\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}$ ;<br>$t$-distribution with $n+m-2$ degrees of freedom | $t_{[\alpha/2;n+m-2]}$ , $t_{[1-\alpha/2;n+m-2]}$<br>$t_{[1-\alpha;n+m-2]}$<br>$t_{[\alpha;n+m-2]}$ |

**Two sample Welch-test (normal distributions)**

Samples: Two independent samples of independent, $N\left(\mu_x,\sigma_x^2\right)$-distributed sample variables $X_1,...,X_n$ and independent, $N\left(\mu_y,\sigma_y^2\right)$-distributed sample variables $Y_1,...,Y_m$; $\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2$ unknown, but $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$

| hypotheses<br>$H_0$ $\quad$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | critical values |
|---|---|---|
| $\mu_x = \mu_y \quad \mu_x \neq \mu_y$<br>$\mu_x \leq \mu_y \quad \mu_x > \mu_y$<br>$\mu_x \geq \mu_y \quad \mu_x < \mu_y$ | $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n}+\dfrac{S_y^2}{m}}} \qquad \left( df = \dfrac{(1+Q)^2}{\dfrac{Q^2}{n-1}+\dfrac{1}{m-1}} \;,\; Q = \dfrac{S_x^2 \cdot m}{S_y^2 \cdot n} \right)$ ;<br>$t$-distribution with $df$ degrees of freedom | $t_{[\alpha/2;df]}$ , $t_{[1-\alpha/2;df]}$<br>$t_{[1-\alpha;df]}$<br>$t_{[\alpha;df]}$ |

**Two sample F-test (normal distributions)**

Samples: Two independent samples of independent, $N\left(\mu_x,\sigma_x^2\right)$-distributed sample variables $X_1,...,X_n$ and independent, $N\left(\mu_y,\sigma_y^2\right)$-distributed sample variables $Y_1,...,Y_m$; $\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2$ unknown

| hypotheses<br>$H_0$ $\quad$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | critical values |
|---|---|---|
| $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 \quad \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$<br>$\sigma_x^2 \leq \sigma_y^2 \quad \sigma_x^2 > \sigma_y^2$<br>$\sigma_x^2 \geq \sigma_y^2 \quad \sigma_x^2 < \sigma_y^2$ | $\dfrac{S_x^2}{S_y^2}$ ;<br>$F$-distribution with $n$-1 and $m$-1 degrees of freedom | $f_{[\alpha/2;n-1,m-1]}$ , $f_{[1-\alpha/2;n-1,m-1]}$<br>$f_{[1-\alpha;n-1,m-1]}$<br>$f_{[\alpha;n-1,m-1]}$ |

**Two sample Gauß-test for large samples (arbitrary distributions)**

Samples: Two independent samples of $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ and $m$ independent sample variables $Y_1,...,Y_m$ from populations with unknown moments $\mu_x,\mu_y,\sigma_x^2,\sigma_y^2$ ; $n$ and $m$ large

| hypotheses<br>$H_0$ $\quad$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | large sample critical values |
|---|---|---|
| $\mu_x = \mu_y \quad \mu_x \neq \mu_y$<br>$\mu_x \leq \mu_y \quad \mu_x > \mu_y$<br>$\mu_x \geq \mu_y \quad \mu_x < \mu_y$ | $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n}+\dfrac{S_y^2}{m}}}$ ; asymptotic $N(0,1)$-distribution | $z_{[\alpha/2]}$ , $z_{[1-\alpha/2]}$<br>$z_{[1-\alpha]}$<br>$z_{[\alpha]}$ |

**Two sample Gauß-test for large samples (Bernoulli distributions)**

Samples: Two independent samples of $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ and $m$ independent sample variables $Y_1,...,Y_m$ from Bernoulli populations with unknown probabilities $p_x, p_y$ ; $n$ and $m$ large

| hypotheses<br>$H_0$ $\quad$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | large sample critical values |
|---|---|---|
| $p_x = p_y \quad p_x \neq p_y$<br>$p_x \leq p_y \quad p_x > p_y$<br>$p_x \geq p_y \quad p_x < p_y$ | $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)}}$ where $\hat{p} = \dfrac{n\cdot\overline{X}+m\cdot\overline{Y}}{n+m}$ ;<br>asymptotic $N(0,1)$-distribution | $z_{[\alpha/2]}$ , $z_{[1-\alpha/2]}$<br>$z_{[1-\alpha]}$<br>$z_{[\alpha]}$ |

**Wilcoxon signed ranks test (distribution-free)**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,\ldots,X_n$ from a *continuously* and *symmetrically* distributed population with median $x_{med}$

Symbols: $D_\nu = X_\nu - x_{med_0}$ , $R(|D_\nu|) =$ rank of $|D_\nu|$ , $Z_\nu = \begin{cases} 1 & X_\nu > x_{med_0} \\ 0 & X_\nu < x_{med_0} \end{cases}$ for $\nu=1,\ldots,n$

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistics;<br>distribution of the statistics under the null hypothesis | large sample critical values |
|---|---|---|
| $x_{med} = x_{med_0}$ $x_{med} \neq x_{med_0}$<br>$x_{med} \leq x_{med_0}$ $x_{med} > x_{med_0}$<br>$x_{med} \geq x_{med_0}$ $x_{med} < x_{med_0}$ | $T = \sum_{\nu=1}^{n} R(\lvert D_\nu\rvert)\cdot Z_\nu$ ;<br>non-standard distribution, critical values are tabled for small sample sizes $n \leq 30$ in literature<br>$\dfrac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$ ; asymptotic $N(0,1)$-distribution | $z_{[\alpha/2]}$ , $z_{[1-\alpha/2]}$<br>$z_{[1-\alpha]}$<br>$z_{[\alpha]}$ |

**Wilcoxon sum of ranks test (distribution-free)**

Samples: Two independent samples of $n$ independent sample variables $X_1,\ldots,X_n$ and $m$ independent sample variables $Y_1,\ldots,Y_m$ from *continuously* distributed populations with medians $x_{med}, y_{med}$

Symbol: $R(X_\nu) =$ rank of $X_\nu$ ($\nu=1,\ldots,n$) in a pooled sample $X_1,\ldots,X_n$ , $Y_1,Y_2,\ldots,Y_m$

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistics;<br>distribution of the statistics under the null hypothesis | large sample critical values |
|---|---|---|
| $x_{med} = y_{med}$ $x_{med} \neq y_{med}$<br>$x_{med} \leq y_{med}$ $x_{med} > y_{med}$<br>$x_{med} \geq y_{med}$ $x_{med} < y_{med}$ | $T = \sum_{\nu=1}^{n} R(X_\nu)$ ;<br>non-standard distribution, critical values are tabled for small sample sizes $n \leq 30$ in literature<br>$\dfrac{T - \frac{n(n+m+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n\cdot m(n+m+1)}{12}}}$ ; asymptotic $N(0,1)$-distribution | $z_{[\alpha/2]}$ , $z_{[1-\alpha/2]}$<br>$z_{[1-\alpha]}$<br>$z_{[\alpha]}$ |

**Signs test (distribution-free)**

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,\ldots,X_n$ from a *continuously* distributed population with median $x_{med}$

Symbol: $D_\nu = X_\nu - x_{med_0}$ for $\nu = 1,\ldots,n$

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistics; distribution of the statistics under the null hypothesis | large sample critical values |
|---|---|---|
| $x_{med} = x_{med_0}$ $x_{med} \neq x_{med_0}$<br>$x_{med} \leq x_{med_0}$ $x_{med} > x_{med_0}$<br>$x_{med} \geq x_{med_0}$ $x_{med} < x_{med_0}$ | $T$ = number of negative differences $D_\nu$ ; binomial distribution with parameters $n$ and $p$=0.5<br>$\dfrac{T - n/2}{\sqrt{n/4}}$ ; asymptotic $N(0,1)$-distribution | $z_{[\alpha/2]}$ , $z_{[1-\alpha/2]}$<br>$z_{[1-\alpha]}$<br>$z_{[\alpha]}$ |

### Kolmogorov-Smirnov Goodness-of-Fit test

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ from a population with unknown *continuous* cumulative distribution function $F(x)$

Symbol: $\hat{F}(x)=\frac{1}{n}$ (number of $X_i$ less than or equal to $x$) for all $-\infty < x < \infty$ (sample cumulative distribution function)

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistic; distribution of the statistic under the null hypothesis | critical value |
|---|---|---|
| $F(x)=F_0(x)$ $F(x)\neq F_0(x)$<br>$F_0(x)$ is completley specified under the null | $\sup_{-\infty<x<\infty}\left\vert\hat{F}(x)-F_0(x)\right\vert$ ; non-standard distribution ,<br>critical values $c_{[1-\alpha]}$ are tabled in literature | $c_{[1-\alpha]}$ |

### Chi-Square Goodness-of-Fit test

Sample: $n$ independent sample variables $X_1,...,X_n$ from a population with unknown cumulative distribution function $F(x)$

Symbols: $n_1,...,n_k$ = sample frequencies of $k$ classes or categories; $n\cdot p_1,...,n\cdot p_k$ = expected sample frequencies under the null

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | large sample critical value |
|---|---|---|
| $F(x)=F_0(x)$ $F(x)\neq F_0(x)$<br>$F_0(x)$ is completely specified under the null | $\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_j-n\cdot p_j)^2}{n\cdot p_j}$ ; asymptotic $\chi^2$-distribution with $k$–1 degrees of freedom | $\chi^2_{[1-\alpha;k-1]}$ |
| $H_0$ $H_1$ | | |
| $F(x)=F_0(x)$ $F(x)\neq F_0(x)$<br>$r$ parameters of $F_0(x)$ estimated by maximum-likelihood | $\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_j-n\cdot p_j)^2}{n\cdot p_j}$ ; asymptotic $\chi^2$-distribution with $k$–$r$–1 degrees of freedom | $\chi^2_{[1-\alpha;k-r-1]}$ |
| | (for finite sample sizes $n$ the $\chi^2$-approximations are reliable provided $n\cdot p_j>5$ for all $j$=1,...,$k$) | |

### Chi-Square test of independence

Sample: Sample of $n$ independent pairs of sample variables $(X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n)$ from the discrete population $X$ with $m$ different categories and the discrete population $Y$ with $k$ different categories

Symbols: $n_{11},...,n_{mk}$ = sample frequencies of $m\cdot k$ pairs of categories; $n_{i\bullet}$, $n_{\bullet j}$ = marginal sample frequencies of single categories; $e_{11},...,e_{mk}$ = expected sample frequencies under the null

| hypotheses<br>$H_0$ $H_1$ | test-statistic;<br>distribution of the statistic under the null hypothesis | large sample critical value |
|---|---|---|
| $X$ und $Y$ are independent / $X$ und $Y$ are not independent | $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_{ij}-e_{ij})^2}{e_{ij}}$ where $e_{ij}=\frac{n_{i\bullet}\cdot n_{\bullet j}}{n}$<br>asymptotic $\chi^2$-distribution with $(m-1)(k-1)$ degrees of freedom | $\chi^2_{[1-\alpha;(m-1)(k-1)]}$ |

# 10 Regressionsanalyse

## 10.1 Lineare Einfachregression

### Voraussetzungen des (klassischen) linearen Regressionsmodells

A–1 Verfügbar sind $n$ Messwertpaare zweier metrischer Variablen $X$ und $Y$. Die Wertepaare fassen wir als Realisierungen von Stichprobenvariablenpaaren $(x_\nu, y_\nu)$ $(\nu = 1,\dots,n)$ auf. Die zum Regressor $X$ gehörigen Variablen $x_1,\dots,x_n$ sind deterministisch; ihre Werte sind fest vorgegeben und nicht alle gleich, so dass $\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2 > 0$ erfüllt ist. Die zum Regressanden $Y$ gehörigen Variablen $y_1,\dots,y_n$ sind Zufallsvariablen. $y_\nu$ steht für den potentiellen Messwert des Regressanden $Y$ bei gegebenem Wert $x_\nu$.

A–2 Zwischen den Zufallsvariablen $y_\nu$ und den festen Werten $x_\nu$ besteht der lineare Zusammenhang

$$y_\nu = \beta_0 + \beta_1 x_\nu + \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1,\dots,n).$$

A–3 Die zufälligen Störvariablen $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit

$$E(\varepsilon_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1,\dots,n),$$

$$Var(\varepsilon_\nu) = \sigma^2 = \text{const.} \qquad (\nu = 1,\dots,n).$$

$$Cov(\varepsilon_\nu, \varepsilon_\kappa) = 0. \qquad \text{für alle } \nu \neq k.$$

A–4∗ $$\varepsilon_\nu \sim N(0,\sigma^2) \qquad (\nu = 1,\dots,n).$$

### KQ- und ML-Schätzfunktionen für die Parameter des linearen Regressionsmodells

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{\nu=1}^{n}\hat{\varepsilon}_\nu^2 \qquad \text{mit} \qquad \hat{\varepsilon}_\nu = y_\nu - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_\nu \quad (\nu = 1,\dots,n)$$

### Streuungszerlegung

$$\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - \bar{y})^2}_{TSS} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - \hat{y}_\nu)^2}_{RSS} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}(\hat{y}_\nu - \bar{y})^2}_{ESS} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}\hat{\varepsilon}_\nu^2}_{RSS} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}(\hat{y}_\nu - \bar{y})^2}_{ESS}$$

### Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = r_{XY}^2 \qquad 0 \le R^2 \le 1$$

**Standardfehler (Standardabweichungen) der geschätzten Regressionskoeffizienten**

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}{n \cdot \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2}} = \hat{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - n\bar{x}^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2}} = \hat{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - n\bar{x}^2}}$$

**Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ für die Regressionskoeffizienten**

$$\left[\hat{\beta}_0 - t_{[1-\alpha/2;n-2]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \;,\; \hat{\beta}_0 + t_{[1-\alpha/2;n-2]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\left[\hat{\beta}_1 - t_{[1-\alpha/2;n-2]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \;,\; \hat{\beta}_1 + t_{[1-\alpha/2;n-2]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

**Hypothesentests für die Regressionskoeffizienten**

| Hypothesen $H_0$ | Hypothesen $H_1$ | Teststatistik und deren Verteilung unter Gültigkeit von $H_0$ | kritische Werte |
|---|---|---|---|
| $\beta_0 = b_0$ | $\beta_0 \neq b_0$ | | $\pm t_{[1-\alpha/2;n-2]}$ |
| $\beta_0 \leq b_0$ | $\beta_0 > b_0$ | $T_1 = \frac{\hat{\beta}_0 - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \sim t(n-2)$ | $t_{[1-\alpha;n-2]}$ |
| $\beta_0 \geq b_0$ | $\beta_0 < b_0$ | | $t_{[\alpha;n-2]}$ |
| $\beta_1 = b_1$ | $\beta_1 \neq b_1$ | | $\pm t_{[1-\alpha/2;n-2]}$ |
| $\beta_1 \leq b_1$ | $\beta_1 > b_1$ | $T_2 = \frac{\hat{\beta}_1 - b_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \sim t(n-2)$ | $t_{[1-\alpha;n-2]}$ |
| $\beta_1 \geq b_1$ | $\beta_1 < b_1$ | | $t_{[\alpha;n-2]}$ |

**Prognosefunktion (Punktprognose) für $y_0$**

$$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$$

**Konfidenzintervall (Prognoseintervall) für $y_0$ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$**

$$[\hat{y}_0 - t_{[1-\alpha/2;n-2]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{Y}_0 - Y_0} \;,\; \hat{y}_0 + t_{[1-\alpha/2;n-2]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{Y}_0 - Y_0}]$$

mit

$$\hat{\sigma}_{\hat{Y}_0 - Y_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2}\right)} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu - \bar{x})^2 = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 - n\bar{x}^2$$

## 10.2 Lineare Mehrfachregression

### Voraussetzungen des (klassischen) linearen Regressionsmodells

A–1 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$

mit $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ .

A–2 $\boldsymbol{X}$ ist eine nicht-stochastische (feste) Matrix. Es gilt $rg(\boldsymbol{X}) = p+1$; d.h. $\boldsymbol{X}$ hat vollen Spaltenrang und ist daher spaltenregulär.

A–3 Die Störungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ sind zufällige Größen mit $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}$ und $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}$ .

A–4* $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n\left(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}\right)$ -

### KQ- und ML-Schätzfunktionen für die Parameter des linearen Regressionsmodells

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{n-p-1} \quad \text{mit} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})\boldsymbol{y} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X}'$$

### Streuungszerlegung

$$\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - \bar{y})^2}_{TSS} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}(y_\nu - \hat{y}_\nu)^2}_{RSS} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}(\hat{y}_\nu - \bar{y})^2}_{ESS} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}\hat{\varepsilon}_\nu^2}_{RSS} + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}(\hat{y}_\nu - \bar{y})^2}_{ESS}$$

### Bestimmtheitsmaße

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} \qquad 0 \le R^2 \le 1$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{RSS}{n-p-1}}{\frac{TSS}{n-1}} = 1 - \frac{n-1}{n-p-1} \cdot \left(1 - R^2\right)$$

### Kovarianzmatrix und Standardfehler der geschätzten Regressionskoeffizienten

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = \hat{\sigma}^2 (\boldsymbol{X'X})^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i} = \hat{\sigma} \cdot \sqrt{a_{jj}} \quad \text{mit} \quad j = i+1 \text{ und } i = 0,1,\ldots,p$$

$a_{jj}$ kennzeichnet das $j$-te Diagonalelement der Matrix $(\boldsymbol{X'X})^{-1}$ .

### Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ für den *i*-ten Regressionskoeffizienten

$$\left[\hat{\beta}_i - t_{[1-\alpha/2;n-p-1]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i} \;,\; \hat{\beta}_i + t_{[1-\alpha/2;n-p-1]} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}\right]$$

**Hypothesentests für den *i*-ten Regressionskoeffizienten**

| Hypothesen $H_0$ | Hypothesen $H_1$ | Teststatistik und deren Verteilung unter Gültigkeit von $H_0$ | kritische Werte |
|---|---|---|---|
| $\beta_i = b$ | $\beta_i \neq b$ | $T_1 = \dfrac{\hat{\beta}_i - b}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \sim t(n-p-1)$ | $\pm t_{[1-\alpha/2;n-p-1]}$ |
| $\beta_i \leq b$ | $\beta_i > b$ | | $t_{[1-\alpha;n-p-1]}$ |
| $\beta_i \geq b$ | $\beta_i < b$ | | $t_{[\alpha;n-p-1]}$ |

**Prognosefunktion (Punktprognose) für *y*$_0$**

$$y_0 - \boldsymbol{x}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{x}_0' = (1, x_{01}, \ldots, x_{0p})$$

**Konfidenzintervall (Prognoseintervall) für *y*$_0$ zum Konfidenzniveau** $1-\alpha$

$$\left[\boldsymbol{x}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{[1-\alpha/2;n-p-1]} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}^2 \boldsymbol{x}_0' (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{x}_0}\ ,\ \boldsymbol{x}_0'\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{[1-\alpha/2;n-p-1]} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}^2 \boldsymbol{x}_0' (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{x}_0}\right]$$

# Binomialverteilung

Verteilungsfunktionen $F(x|n,p)$ ausgewählter Binomialverteilungen

$$[\,F(x|n,p) = 1 - F(n-x-1|n,1-p) \quad \text{für} \quad p > 0.5\,]$$

| n | x | | | | | p | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** |
| **2** | **0** | 0.9025 | 0.8100 | 0.7225 | 0.6400 | 0.5625 | 0.4900 | 0.4225 | 0.3600 | 0.3025 | 0.2500 |
| | **1** | 0.9975 | 0.9900 | 0.9775 | 0.9600 | 0.9375 | 0.9100 | 0.8775 | 0.8400 | 0.7975 | 0.7500 |
| | **2** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **3** | **0** | 0.8574 | 0.7290 | 0.6141 | 0.5120 | 0.4219 | 0.3430 | 0.2746 | 0.2160 | 0.1664 | 0.1250 |
| | **1** | 0.9927 | 0.9720 | 0.9393 | 0.8960 | 0.8438 | 0.7840 | 0.7183 | 0.6480 | 0.5748 | 0.5000 |
| | **2** | 0.9999 | 0.9990 | 0.9966 | 0.9920 | 0.9844 | 0.9730 | 0.9571 | 0.9360 | 0.9089 | 0.8750 |
| | **3** | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **4** | **0** | 0.8145 | 0.6561 | 0.5220 | 0.4096 | 0.3164 | 0.2401 | 0.1785 | 0.1296 | 0.0915 | 0.0625 |
| | **1** | 0.9860 | 0.9477 | 0.8905 | 0.8192 | 0.7383 | 0.6517 | 0.5630 | 0.4752 | 0.3910 | 0.3125 |
| | **2** | 0.9995 | 0.9963 | 0.9880 | 0.9728 | 0.9492 | 0.9163 | 0.8735 | 0.8208 | 0.7585 | 0.6875 |
| | **3** | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9984 | 0.9961 | 0.9919 | 0.9850 | 0.9744 | 0.9590 | 0.9375 |
| | **4** | | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **5** | **0** | 0.7738 | 0.5905 | 0.4437 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.1160 | 0.0778 | 0.0503 | 0.0313 |
| | **1** | 0.9774 | 0.9185 | 0.8352 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.4284 | 0.3370 | 0.2562 | 0.1875 |
| | **2** | 0.9988 | 0.9914 | 0.9734 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.7648 | 0.6826 | 0.5931 | 0.5000 |
| | **3** | 1.0000 | 0.9995 | 0.9978 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9460 | 0.9130 | 0.8688 | 0.8125 |
| | **4** | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9947 | 0.9898 | 0.9815 | 0.9687 |
| | **5** | | | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **6** | **0** | 0.7351 | 0.5314 | 0.3771 | 0.2621 | 0.1780 | 0.1176 | 0.0754 | 0.0467 | 0.0277 | 0.0156 |
| | **1** | 0.9672 | 0.8857 | 0.7765 | 0.6554 | 0.5339 | 0.4202 | 0.3191 | 0.2333 | 0.1636 | 0.1094 |
| | **2** | 0.9978 | 0.9842 | 0.9527 | 0.9011 | 0.8306 | 0.7443 | 0.6471 | 0.5443 | 0.4415 | 0.3438 |
| | **3** | 0.9999 | 0.9987 | 0.9941 | 0.9830 | 0.9624 | 0.9295 | 0.8826 | 0.8208 | 0.7447 | 0.6562 |
| | **4** | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9954 | 0.9891 | 0.9777 | 0.9590 | 0.9308 | 0.8906 |
| | **5** | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9982 | 0.9959 | 0.9917 | 0.9844 |
| | **6** | | | | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **7** | **0** | 0.6983 | 0.4783 | 0.3206 | 0.2097 | 0.1335 | 0.0824 | 0.0490 | 0.0280 | 0.0152 | 0.0078 |
| | **1** | 0.9556 | 0.8503 | 0.7166 | 0.5767 | 0.4449 | 0.3294 | 0.2338 | 0.1586 | 0.1024 | 0.0625 |
| | **2** | 0.9962 | 0.9743 | 0.9262 | 0.8520 | 0.7564 | 0.6471 | 0.5323 | 0.4199 | 0.3164 | 0.2266 |
| | **3** | 0.9998 | 0.9973 | 0.9879 | 0.9667 | 0.9294 | 0.8740 | 0.8002 | 0.7102 | 0.6083 | 0.5000 |
| | **4** | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9953 | 0.9871 | 0.9712 | 0.9444 | 0.9037 | 0.8471 | 0.7734 |
| | **5** | | 1.0000 | 0,9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9962 | 0.9910 | 0.9812 | 0.9643 | 0.9375 |
| | **6** | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9994 | 0.9984 | 0.9963 | 0.9922 |
| | **7** | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **8** | **0** | 0.6634 | 0.4305 | 0.2725 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0577 | 0.0319 | 0.0168 | 0.0084 | 0.0039 |
| | **1** | 0.9428 | 0.8131 | 0.6572 | 0.5033 | 0.3671 | 0.2553 | 0.1691 | 0.1064 | 0.0632 | 0.0352 |
| | **2** | 0.9942 | 0.9619 | 0.8948 | 0.7969 | 0.6785 | 0.5518 | 0.4278 | 0.3154 | 0.2201 | 0.1445 |
| | **3** | 0.9996 | 0.9950 | 0.9786 | 0.9437 | 0.8862 | 0.8059 | 0.7064 | 0.5941 | 0.4770 | 0.3633 |
| | **4** | 1.0000 | 0.9996 | 0.9971 | 0.9896 | 0.9727 | 0.9420 | 0.8939 | 0.8263 | 0.7396 | 0.6367 |
| | **5** | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9958 | 0.9887 | 0.9747 | 0.9502 | 0.9115 | 0.8555 |
| | **6** | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9964 | 0.9915 | 0.9819 | 0.9648 |
| | **7** | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9983 | 0.9961 |
| | **8** | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **9** | **0** | 0.6302 | 0.3874 | 0.2316 | 0.1342 | 0.0751 | 0.0404 | 0.0207 | 0.0101 | 0.0046 | 0.0020 |
| | **1** | 0.9288 | 0.7748 | 0.5995 | 0.4362 | 0.3003 | 0.1960 | 0.1211 | 0.0705 | 0.0385 | 0.0195 |
| | **2** | 0.9916 | 0.9470 | 0.8591 | 0.7382 | 0.6007 | 0.4628 | 0.3373 | 0.2318 | 0.1495 | 0.0898 |
| | **3** | 0.9994 | 0.9917 | 0.9661 | 0.9144 | 0.8343 | 0.7297 | 0.6089 | 0.4826 | 0.3614 | 0.2539 |
| | **4** | 1.0000 | 0.9991 | 0.9944 | 0.9804 | 0.9511 | 0.9012 | 0.8283 | 0.7334 | 0.6214 | 0.5000 |
| | **5** | | 0.9999 | 0.9994 | 0.9969 | 0.9900 | 0.9747 | 0.9464 | 0.9006 | 0.8342 | 0.7461 |
| | **6** | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9957 | 0.9888 | 0.9750 | 0.9502 | 0.9102 |
| | **7** | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9986 | 0.9962 | 0.9909 | 0.9805 |
| | **8** | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9992 | 0.9980 |
| | **9** | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| **10** | **0** | 0.5987 | 0.3487 | 0.1969 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0283 | 0.0135 | 0.0060 | 0.0025 | 0.0010 |
| | **1** | 0.9139 | 0.7361 | 0.5443 | 0.3758 | 0.2440 | 0.1493 | 0.0860 | 0.0464 | 0.0233 | 0.0107 |
| | **2** | 0.9885 | 0.9298 | 0.8202 | 0.6778 | 0.5256 | 0.3828 | 0.2616 | 0.1673 | 0.0996 | 0.0547 |
| | **3** | 0.9990 | 0.9872 | 0.9500 | 0.8791 | 0.7759 | 0.6496 | 0.5138 | 0.3823 | 0.2660 | 0.1719 |
| | **4** | 0.9999 | 0.9984 | 0.9901 | 0.9672 | 0.9219 | 0.8497 | 0.7515 | 0.6331 | 0.5044 | 0.3770 |
| | **5** | 1.0000 | 0.9999 | 0.9986 | 0.9936 | 0.9803 | 0.9527 | 0.9051 | 0.8338 | 0.7384 | 0.6230 |
| | **6** | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9740 | 0.9452 | 0.8980 | 0.8281 |
| | **7** | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9952 | 0.9877 | 0.9726 | 0.9453 |
| | **8** | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 | 0.9955 | 0.9893 |
| | **9** | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 |
| | **10** | | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

*Fortsetzung 1 Binomialverteilung*

| *n* | *x* | | | | | *p* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **0.05** | **0.10** | **0.15** | **0.20** | **0.25** | **0.30** | **0.35** | **0.40** | **0.45** | **0.50** |
| **11** | **0** | 0.5688 | 0.3138 | 0.1673 | 0.0859 | 0.0422 | 0.0198 | 0.0088 | 0.0036 | 0.0014 | 0.0005 |
| | **1** | 0.8981 | 0.6974 | 0.4922 | 0.3221 | 0.1971 | 0.1130 | 0.0606 | 0.0302 | 0.0139 | 0.0059 |
| | **2** | 0.9848 | 0.9104 | 0.7788 | 0.6174 | 0.4552 | 0.3127 | 0.2001 | 0.1189 | 0.0652 | 0.0327 |
| | **3** | 0.9984 | 0.9815 | 0.9306 | 0.8389 | 0.7133 | 0.5696 | 0.4256 | 0.2963 | 0.1911 | 0.1133 |
| | **4** | 0.9999 | 0.9972 | 0.9841 | 0.9496 | 0.8854 | 0.7897 | 0.6683 | 0.5328 | 0.3971 | 0.2744 |
| | **5** | 1.0000 | 0.9997 | 0.9973 | 0.9883 | 0.9657 | 0.9218 | 0.8513 | 0.7535 | 0.6331 | 0.5000 |
| | **6** | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9980 | 0.9924 | 0.9784 | 0.9499 | 0.9006 | 0.8262 | 0.7256 |
| | **7** | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9957 | 0.9878 | 0.9707 | 0.9390 | 0.8867 |
| | **8** | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9980 | 0.9941 | 0.9852 | 0.9673 |
| | **9** | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9978 | 0.9941 |
| | **10** | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9995 |
| | **11** | | | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 |
| **12** | **0** | 0.5404 | 0.2824 | 0.1422 | 0.0687 | 0.0317 | 0.0138 | 0.0057 | 0.0022 | 0.0008 | 0.0002 |
| | **1** | 0.8816 | 0.6590 | 0.4435 | 0.2749 | 0.1584 | 0.0850 | 0.0424 | 0.0196 | 0.0083 | 0.0032 |
| | **2** | 0.9804 | 0.8891 | 0.7358 | 0.5583 | 0.3907 | 0.2528 | 0.1513 | 0.0834 | 0.0421 | 0.0193 |
| | **3** | 0.9978 | 0.9744 | 0.9078 | 0.7946 | 0.6488 | 0.4925 | 0.3467 | 0.2253 | 0.1345 | 0.0730 |
| | **4** | 0.9998 | 0.9957 | 0.9761 | 0.9274 | 0.8424 | 0.7237 | 0.5833 | 0.4382 | 0.3044 | 0.1938 |
| | **5** | 1.0000 | 0.9995 | 0.9954 | 0.9806 | 0.9456 | 0.8822 | 0.7873 | 0.6652 | 0.5269 | 0.3872 |
| | **6** | | 0.9999 | 0.9993 | 0.9961 | 0.9857 | 0.9614 | 0.9154 | 0.8418 | 0.7393 | 0.6128 |
| | **7** | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9972 | 0.9905 | 0.9745 | 0.9427 | 0.8883 | 0.8062 |
| | **8** | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9983 | 0.9944 | 0.9847 | 0.9644 | 0.9270 |
| | **9** | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9972 | 0.9921 | 0.9807 |
| | **10** | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9968 |
| | **11** | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 |
| | **12** | | | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 |
| **13** | **0** | 0.5133 | 0.2542 | 0.1209 | 0.0550 | 0.0238 | 0.0097 | 0.0037 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 |
| | **1** | 0.8646 | 0.6213 | 0.3983 | 0.2336 | 0.1267 | 0.0637 | 0.0296 | 0.0126 | 0.0049 | 0.0017 |
| | **2** | 0.9755 | 0.8661 | 0.6920 | 0.5017 | 0.3326 | 0.2025 | 0.1132 | 0.0579 | 0.0269 | 0.0112 |
| | **3** | 0.9969 | 0.9658 | 0.8820 | 0.7473 | 0.5843 | 0.4206 | 0.2783 | 0.1686 | 0.0929 | 0.0461 |
| | **4** | 0.9997 | 0.9935 | 0.9658 | 0.9009 | 0.7940 | 0.6543 | 0.5005 | 0.3530 | 0.2279 | 0.1334 |
| | **5** | 1.0000 | 0.9991 | 0.9925 | 0.9700 | 0.9198 | 0.8346 | 0.7159 | 0.5744 | 0.4268 | 0.2905 |
| | **6** | | 0.9999 | 0.9987 | 0.9930 | 0.9757 | 0.9376 | 0.8705 | 0.7712 | 0.6437 | 0.5000 |
| | **7** | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9944 | 0.9818 | 0.9538 | 0.9023 | 0.8212 | 0.7095 |
| | **8** | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9960 | 0.9874 | 0.9679 | 0.9302 | 0.8666 |
| | **9** | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9975 | 0.9922 | 0.9797 | 0.9539 |
| | **10** | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9959 | 0.9888 |
| | **11** | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 |
| | **12** | | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| | **13** | | | | | | | | | | 1.0000 |
| **14** | **0** | 0.4877 | 0.2288 | 0.1028 | 0.0440 | 0.0178 | 0.0068 | 0.0024 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0001 |
| | **1** | 0.8470 | 0.5846 | 0.3567 | 0.1979 | 0.1010 | 0.0475 | 0.0205 | 0.0081 | 0.0029 | 0.0009 |
| | **2** | 0.9699 | 0.8416 | 0.6479 | 0.4481 | 0.2811 | 0.1608 | 0.0839 | 0.0398 | 0.0170 | 0.0065 |
| | **3** | 0.9958 | 0.9559 | 0.8535 | 0.6982 | 0.5213 | 0.3552 | 0.2205 | 0.1243 | 0.0632 | 0.0287 |
| | **4** | 0.9996 | 0.9908 | 0.9533 | 0.8702 | 0.7415 | 0.5842 | 0.4227 | 0.2793 | 0.1672 | 0.0898 |
| | **5** | 1.0000 | 0.9985 | 0.9885 | 0.9561 | 0.8883 | 0.7805 | 0.6405 | 0.4859 | 0.3373 | 0.2120 |
| | **6** | | 0.9998 | 0.9978 | 0.9884 | 0.9617 | 0.9067 | 0.8164 | 0.6925 | 0.5461 | 0.3953 |
| | **7** | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9976 | 0.9897 | 0.9685 | 0.9247 | 0.8499 | 0.7414 | 0.6047 |
| | **8** | | | 1.0000 | 0.9996 | 0.9978 | 0.9917 | 0.9757 | 0.9417 | 0.8811 | 0.7880 |
| | **9** | | | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9983 | 0.9940 | 0.9825 | 0.9574 | 0.9102 |
| | **10** | | | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9989 | 0.9961 | 0.9886 | 0.9713 |
| | **11** | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9978 | 0.9935 |
| | **12** | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9991 |
| | **13** | | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| | **14** | | | | | | | | | | 1.0000 |
| **15** | **0** | 0.4633 | 0.2059 | 0.0873 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 |
| | **1** | 0.8290 | 0.5490 | 0.3186 | 0.1671 | 0.0802 | 0.0353 | 0.0142 | 0.0052 | 0.0017 | 0.0005 |
| | **2** | 0.9638 | 0.8159 | 0.6042 | 0.3980 | 0.2361 | 0.1268 | 0.0617 | 0.0271 | 0.0106 | 0.0037 |
| | **3** | 0.9945 | 0.9444 | 0.8227 | 0.6482 | 0.4613 | 0.2969 | 0.1727 | 0.0905 | 0.0424 | 0.0176 |
| | **4** | 0.9994 | 0.9873 | 0.9383 | 0.8358 | 0.6865 | 0.5155 | 0.3519 | 0.2173 | 0.1204 | 0.0592 |
| | **5** | 0.9999 | 0.9978 | 0.9832 | 0.9389 | 0.8516 | 0.7216 | 0.5643 | 0.4032 | 0.2608 | 0.1509 |
| | **6** | 1.0000 | 0.9997 | 0.9964 | 0.9819 | 0.9434 | 0.8689 | 0.7548 | 0.6098 | 0.4522 | 0.3036 |
| | **7** | | 1.0000 | 0.9994 | 0.9958 | 0.9827 | 0.9500 | 0.8868 | 0.7869 | 0.6535 | 0.5000 |
| | **8** | | | 0.9999 | 0.9992 | 0.9958 | 0.9848 | 0.9578 | 0.9050 | 0.8182 | 0.6964 |
| | **9** | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 | 0.9876 | 0.9662 | 0.9231 | 0.8491 |
| | **10** | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9972 | 0.9907 | 0.9745 | 0.9408 |
| | **11** | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9981 | 0.9937 | 0.9824 |
| | **12** | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9963 |
| | **13** | | | | | | | .1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 |
| | **14** | | | | | | | | | 1.0000 | 1.0000 |
| | **15** | | | | | | | | | | |

*Fortsetzung 2 Binomialverteilung*

| n | x | p | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 |
| 20 | 0 | 0.3585 | 0.1216 | 0.0388 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | |
| | 1 | 0.7358 | 0.3917 | 0.1756 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0021 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 |
| | 2 | 0.9245 | 0.6769 | 0.4049 | 0.2061 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0121 | 0.0036 | 0.0009 | 0.0002 |
| | 3 | 0.9841 | 0.8670 | 0.6477 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0444 | 0.0160 | 0.0049 | 0.0013 |
| | 4 | 0.9974 | 0.9568 | 0.8298 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.1182 | 0.0510 | 0.0189 | 0.0059 |
| | 5 | 0.9997 | 0.9887 | 0.9327 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.2454 | 0.1256 | 0.0553 | 0.0207 |
| | 6 | 1.0000 | 0.9976 | 0.9781 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.4166 | 0.2500 | 0.1299 | 0.0577 |
| | 7 | | 0.9996 | 0.9941 | 0.9679 | 0.8982 | 0.7723 | 0.6010 | 0.4159 | 0.2520 | 0.1316 |
| | 8 | | 0.9999 | 0.9987 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.7624 | 0.5956 | 0.4143 | 0.2517 |
| | 9 | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9974 | 0.9861 | 0.9520 | 0.8782 | 0.7553 | 0.5914 | 0.4119 |
| | 10 | | | 1.0000 | 0.9994 | 0.9961 | 0.9829 | 0.9468 | 0.8725 | 0.7507 | 0.5881 |
| | 11 | | | | 0.9999 | 0.9991 | 0.9949 | 0.9804 | 0.9435 | 0.8692 | 0.7483 |
| | 12 | | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9987 | 0.9940 | 0.9790 | 0.9420 | 0.8684 |
| | 13 | | | | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9935 | 0.9786 | 0.9423 |
| | 14 | | | | | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9936 | 0.9793 |
| | 15 | | | | | | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9941 |
| | 16 | | | | | | | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 |
| | 17 | | | | | | | | | 1.0000 | 0.9998 |
| | 18 | | | | | | | | | | 1.0000 |
| | 19 | | | | | | | | | | |
| | 20 | | | | | | | | | | |
| 25 | 0 | 0.2774 | 0.0718 | 0.0172 | 0.0038 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | | | |
| | 1 | 0.6424 | 0.2712 | 0.0931 | 0.0274 | 0.0070 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | |
| | 2 | 0.8729 | 0.5371 | 0.2537 | 0.0982 | 0.0321 | 0.0090 | 0.0021 | 0.0004 | 0.0001 | |
| | 3 | 0.9659 | 0.7636 | 0.4711 | 0.2340 | 0.0962 | 0.0332 | 0.0097 | 0.0024 | 0.0005 | 0.0000 |
| | 4 | 0.9928 | 0.9020 | 0.6821 | 0.4207 | 0.2137 | 0.0905 | 0.0321 | 0.0095 | 0.0023 | 0.0005 |
| | 5 | 0.9988 | 0.9666 | 0.8385 | 0.6167 | 0.3783 | 0.1935 | 0.0826 | 0.0294 | 0.0086 | 0.0020 |
| | 6 | 0.9998 | 0.9905 | 0.9305 | 0.7800 | 0.5611 | 0.3407 | 0.1734 | 0.0736 | 0.0258 | 0.0073 |
| | 7 | 1.0000 | 0.9977 | 0.9745 | 0.8909 | 0.7265 | 0.5118 | 0.3061 | 0.1536 | 0.0639 | 0.0216 |
| | 8 | | 0.9995 | 0.9920 | 0.9532 | 0.8506 | 0.6769 | 0.4668 | 0.2735 | 0.1340 | 0.0539 |
| | 9 | | 0.9999 | 0.9979 | 0.9827 | 0.9287 | 0.8106 | 0.6303 | 0.4246 | 0.2424 | 0.1148 |
| | 10 | | 1.0000 | 0.9995 | 0.9944 | 0.9703 | 0.9022 | 0.7712 | 0.5858 | 0.3843 | 0.2122 |
| | 11 | | | 0.9999 | 0.9985 | 0.9893 | 0.9558 | 0.8746 | 0.7323 | 0.5426 | 0.3450 |
| | 12 | | | 1.0000 | 0.9996 | 0.9966 | 0.9825 | 0.9396 | 0.8462 | 0.6937 | 0.5000 |
| | 13 | | | | 0.9999 | 0.9991 | 0.9940 | 0.9745 | 0.9222 | 0.8173 | 0.6550 |
| | 14 | | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9982 | 0.9907 | 0.9656 | 0.9040 | 0.7878 |
| | 15 | | | | | 1.0000 | 0.9995 | 0.9971 | 0.9868 | 0.9560 | 0.8852 |
| | 16 | | | | | | 0.9999 | 0.9992 | 0.9957 | 0.9826 | 0.9461 |
| | 17 | | | | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9942 | 0.9784 |
| | 18 | | | | | | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9927 |
| | 19 | | | | | | | | 0.9999 | 0.9996 | 0.9980 |
| | 20 | | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 |
| | 21 | | | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 |
| | 22 | | | | | | | | | | 1.0000 |

# Poisson-Verteilung

Verteilungsfunktionen ausgewählter Poisson-Verteilungen

| | λ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | **0.5** | **1.0** | **1.5** | **2.0** | **2.5** | **3.0** | **3.5** | **4.0** | **4.5** | **5.0** |
| **0** | 0.6065 | 0.3679 | 0.2231 | 0.1353 | 0.0821 | 0.0498 | 0.0302 | 0.0183 | 0.0111 | 0.0067 |
| **1** | 0.9098 | 0.7358 | 0.5578 | 0.4060 | 0.2873 | 0.1991 | 0.1359 | 0.0916 | 0.0611 | 0.0404 |
| **2** | 0.9856 | 0.9197 | 0.8088 | 0.6767 | 0.5438 | 0.4232 | 0.3208 | 0.2381 | 0.1736 | 0.1247 |
| **3** | 0.9982 | 0.9810 | 0.9344 | 0.8571 | 0.7576 | 0.6472 | 0.5366 | 0.4335 | 0.3423 | 0.2650 |
| **4** | 0.9998 | 0.9963 | 0.9814 | 0.9473 | 0.8912 | 0.8153 | 0.7254 | 0.6288 | 0.5321 | 0.4405 |
| **5** | 1.0000 | 0.9994 | 0.9955 | 0.9834 | 0.9580 | 0.9161 | 0.8576 | 0.7851 | 0.7029 | 0.6160 |
| **6** | | 0.9999 | 0.9991 | 0.9955 | 0.9858 | 0.9665 | 0.9347 | 0.8893 | 0.8311 | 0.7622 |
| **7** | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9989 | 0.9958 | 0.9881 | 0.9733 | 0.9489 | 0.9134 | 0.8666 |
| **8** | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9989 | 0.9962 | 0.9901 | 0.9786 | 0.9597 | 0.9319 |
| **9** | | | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9967 | 0.9919 | 0.9829 | 0.9682 |
| **10** | | | | | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9972 | 0.9933 | 0.9863 |
| **11** | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9991 | 0.9976 | 0.9945 |
| **12** | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9992 | 0.9980 |
| **13** | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9993 |
| **14** | | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 |
| **15** | | | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 |
| **16** | | | | | | | | | | 1.0000 |

| | λ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | **6.0** | **7.0** | **8.0** | **9.0** | **10.0** | **11.0** | **12.0** | **13.0** | **14.0** | **15.0** |
| **0** | 0.0025 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0001 | | | | | | |
| **1** | 0.0174 | 0.0073 | 0.0030 | 0.0012 | 0.0005 | 0.0002 | | | | |
| **2** | 0.0620 | 0.0296 | 0.0138 | 0,0062 | 0.0028 | 0.0012 | 0.0005 | 0.0002 | 0.0001 | |
| **3** | 0.1512 | 0.0818 | 0.0424 | 0.0212 | 0.0103 | 0.0049 | 0.0023 | 0.0011 | 0.0005 | 0.0002 |
| **4** | 0.2851 | 0.1730 | 0.0996 | 0.0550 | 0.0293 | 0.0151 | 0.0076 | 0.0037 | 0.0018 | 0.0009 |
| **5** | 0.4457 | 0.3007 | 0.1912 | 0.1157 | 0.0671 | 0.0375 | 0.0203 | 0.0107 | 0.0055 | 0.0028 |
| **6** | 0.6063 | 0.4497 | 0.3134 | 0.2068 | 0.1301 | 0.0786 | 0.0458 | 0.0259 | 0.0142 | 0.0076 |
| **7** | 0.7440 | 0.5987 | 0.4530 | 0.3239 | 0.2202 | 0.1432 | 0.0895 | 0.0540 | 0.0316 | 0.0180 |
| **8** | 0.8472 | 0.7291 | 0.5925 | 0.4557 | 0.3328 | 0.2320 | 0.1550 | 0.0998 | 0.0621 | 0.0375 |
| **9** | 0.9161 | 0.8305 | 0.7166 | 0.5874 | 0.4579 | 0.3405 | 0.2424 | 0.1658 | 0.1094 | 0.0699 |
| **10** | 0.9574 | 0.9015 | 0.8159 | 0.7060 | 0.5830 | 0.4599 | 0.3472 | 0.2517 | 0.1757 | 0.1185 |
| **11** | 0.9799 | 0.9467 | 0.8881 | 0.8030 | 0.6968 | 0.5793 | 0.4616 | 0.3532 | 0.2600 | 0.1848 |
| **12** | 0.9912 | 0.9730 | 0.9362 | 0.8758 | 0.7916 | 0.6887 | 0.5760 | 0.4631 | 0.3585 | 0.2676 |
| **13** | 0.9964 | 0.9872 | 0.9658 | 0.9261 | 0.8645 | 0.7813 | 0.6815 | 0.5730 | 0.4644 | 0.3632 |
| **14** | 0.9986 | 0.9943 | 0.9827 | 0.9585 | 0.9165 | 0.8540 | 0.7720 | 0.6751 | 0.5704 | 0.4657 |
| **15** | 0.9995 | 0.9976 | 0.9918 | 0.9780 | 0.9513 | 0.9074 | 0.8444 | 0.7636 | 0.6694 | 0.5681 |
| **16** | 0.9998 | 0.9990 | 0.9963 | 0.9889 | 0.9730 | 0.9441 | 0.8987 | 0.8355 | 0.7559 | 0.6641 |
| **17** | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9947 | 0.9857 | 0.9678 | 0.9370 | 0.8905 | 0.8272 | 0.7489 |
| **18** | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9976 | 0.9928 | 0.9823 | 0.9626 | 0.9302 | 0.8826 | 0.8195 |
| **19** | | 1.0000 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9965 | 0.9907 | 0.9787 | 0.9573 | 0.9235 | 0.8752 |
| **20** | | | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9953 | 0.9884 | 0.9750 | 0.9521 | 0.9170 |
| **21** | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9977 | 0.9939 | 0.9859 | 0.9712 | 0.9469 |
| **22** | | | | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9970 | 0.9924 | 0.9833 | 0.9673 |
| **23** | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9985 | 0.9960 | 0.9907 | 0.9805 |
| **24** | | | | | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9980 | 0.9950 | 0.9888 |
| **25** | | | | | | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9974 | 0.9938 |
| **26** | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9987 | 0.9967 |
| **27** | | | | | | | 0.9999 | 0.9998 | 0.9994 | 0.9983 |
| **28** | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9991 |
| **29** | | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 |
| **30** | | | | | | | | | 0.9999 | 0.9998 |
| **31** | | | | | | | | | 1.0000 | 0.9999 |
| **32** | | | | | | | | | | 1.0000 |

# Normalverteilung

Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung

$[\ \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)\ ]$

**Beispiel:** $\Phi(2.36) = 0.99087$; Man liest diesen Wert im Schnittpunkt von Zeile 2.3 mit Spalte 0.06 ab.

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0.0** | .50000 | .50399 | .50798 | .51197 | .51596 | .51994 | .52393 | .52791 | .53189 | .53586 |
| **0.1** | .53983 | .54380 | .54776 | .55172 | .55568 | .55962 | .56356 | .56750 | .57143 | .57535 |
| **0.2** | .57926 | .58317 | .58707 | .59096 | .59484 | .59871 | .60257 | .60642 | .61027 | .61410 |
| **0.3** | .61792 | .62172 | .62552 | .62931 | .63308 | .63684 | .64058 | .64431 | .64803 | .65174 |
| **0.4** | .65543 | .65910 | .66276 | .66641 | .67004 | .67365 | .67725 | .68083 | .68439 | .68794 |
| **0.5** | .69147 | .69498 | .69847 | .70195 | .70541 | .70885 | .71227 | .71567 | .71905 | .72241 |
| **0.6** | .72575 | .72907 | .73238 | .73566 | .73892 | .74216 | .74538 | .74858 | .75175 | .75491 |
| **0.7** | .75804 | .76115 | .76424 | .76731 | .77036 | .77338 | .77638 | .77936 | .78231 | .78524 |
| **0.8** | .78815 | .79103 | .79390 | .79674 | .79955 | .80234 | .80511 | .80785 | .81058 | .81327 |
| **0.9** | .81594 | .81859 | .82122 | .82382 | .82640 | .82895 | .83148 | .83398 | .83646 | .83892 |
| **1.0** | .84135 | .84376 | .84614 | .84850 | .85084 | .85315 | .85543 | .85770 | .85993 | .86215 |
| **1.1** | .86434 | .86651 | .86865 | .87077 | .87286 | .87493 | .87698 | .87900 | .88100 | .88298 |
| **1.2** | .88494 | .88687 | .88877 | .89066 | .89252 | .89436 | .89617 | .89796 | .89973 | .90148 |
| **1.3** | .90320 | .90491 | .90659 | .90825 | .90988 | .91150 | .91309 | .91466 | .91621 | .91774 |
| **1.4** | .91925 | .92074 | .92220 | .92365 | .92507 | .92648 | .92786 | .92922 | .93057 | .93189 |
| **1.5** | .93320 | .93448 | .93575 | .93700 | .93822 | .93943 | .94063 | .94180 | .94295 | .94409 |
| **1.6** | .94521 | .94631 | .94739 | .94845 | .94950 | .95053 | .95155 | .95255 | .95353 | .95449 |
| **1.7** | .95544 | .95637 | .95729 | .95819 | .95908 | .95995 | .96080 | .96164 | .96247 | .96328 |
| **1.8** | .96407 | .96486 | .96563 | .96638 | .96712 | .96785 | .96856 | .96926 | .96995 | .97063 |
| **1.9** | .97129 | .97194 | .97258 | .97320 | .97382 | .97442 | .97501 | .97559 | .97615 | .97671 |
| **2.0** | .97725 | .97779 | .97831 | .97883 | .97933 | .97982 | .98031 | .98078 | .98124 | .98170 |
| **2.1** | .98214 | .98258 | .98300 | .98342 | .98383 | .98423 | .98462 | .98500 | .98538 | .98574 |
| **2.2** | .98610 | .98645 | .98680 | .98713 | .98746 | .98778 | .98809 | .98840 | .98870 | .98899 |
| **2.3** | .98928 | .98956 | .98983 | .99010 | .99036 | .99062 | .99087 | .99111 | .99135 | .99158 |
| **2.4** | .99181 | .99203 | .99224 | .99246 | .99266 | .99286 | .99306 | .99325 | .99344 | .99362 |
| **2.5** | .99380 | .99397 | .99414 | .99430 | .99446 | .99462 | .99477 | .99492 | .99506 | .99521 |
| **2.6** | .99534 | .99548 | .99561 | .99574 | .99586 | .99598 | .99610 | .99621 | .99632 | .99643 |
| **2.7** | .99654 | .99664 | .99674 | .99684 | .99693 | .99703 | .99711 | .99720 | .99729 | .99737 |
| **2.8** | .99745 | .99753 | .99760 | .99768 | .99775 | .99782 | .99789 | .99795 | .99802 | .99808 |
| **2.9** | .99814 | .99820 | .99825 | .99831 | .99836 | .99842 | .99847 | .99852 | .99856 | .99861 |
| **3.0** | .99866 | .99870 | .99874 | .99878 | .99882 | .99886 | .99890 | .99893 | .99897 | .99900 |
| **3.1** | .99904 | .99907 | .99910 | .99913 | .99916 | .99919 | .99922 | .99924 | .99927 | .99929 |
| **3.2** | .99932 | .99934 | .99936 | .99939 | .99941 | .99943 | .99945 | .99947 | .99949 | .99950 |
| **3.3** | .99952 | .99954 | .99955 | .99957 | .99959 | .99960 | .99962 | .99963 | .99964 | .99966 |
| **3.4** | .99967 | .99968 | .99969 | .99970 | .99971 | .99972 | .99973 | .99974 | .99975 | .99976 |
| **3.5** | .99977 | .99978 | .99979 | .99980 | .99981 | .99982 | .99983 | .99984 | .99985 | .99986 |

# Chi-Quadrat-Verteilung

*p*-Quantile $\chi^2_{[p;fg]}$ der Chi-Quadrat-Verteilung mit *fg* Freiheitsgraden

[Approximation: $\chi^2_{[p;fg]} \approx \frac{1}{2} \cdot (z_{[p]} + \sqrt{2fg-1})^2$ für $fg > 30$ ]

**Beispiel:** $\chi^2_{[0.95;10]} = 18.31$

| | *p* | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***fg*** | **0.005** | **0.010** | **0.025** | **0.05** | **0.1** | **0.2** | **0.5** | **0.8** | **0.9** | **0.95** | **0.975** | **0.990** | **0.995** |
| 1 | 0.000 | 0.000 | 0.001 | 0.004 | 0.016 | 0.064 | 0.455 | 1.642 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |
| 2 | 0.010 | 0.020 | 0.051 | 0.103 | 0.211 | 0.446 | 1.386 | 3.219 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.60 |
| 3 | 0.072 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 1.005 | 2.366 | 4.642 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | 0.207 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.064 | 1.649 | 3.357 | 5.989 | 7.779 | 9.488 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | 0.412 | 0.554 | 0.831 | 1.145 | 1.610 | 2.343 | 4.351 | 7.289 | 9.236 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | 0.676 | 0.872 | 1.237 | 1.635 | 2.204 | 3.070 | 5.348 | 8.558 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | 0.989 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 3.822 | 6.346 | 9.803 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.345 | 1.647 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 4.594 | 7.344 | 11.03 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 5.380 | 8.343 | 12.24 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 6.179 | 9.342 | 13.44 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.603 | 3.054 | 3.816 | 4.575 | 5.578 | 6.989 | 10.34 | 14.63 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 6.304 | 7.807 | 11.34 | 15.81 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 7.042 | 8.634 | 12.34 | 16.98 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 7.790 | 9.467 | 13.34 | 18.15 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 8.547 | 10.31 | 14.34 | 19.31 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 9.312 | 11.15 | 15.34 | 20.47 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 10.09 | 12.00 | 16.34 | 21.61 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 10.86 | 12.86 | 17.34 | 22.76 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.844 | 7.633 | 8.907 | 10.12 | 11.65 | 13.72 | 18.34 | 23.90 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.434 | 8.260 | 9.591 | 10.85 | 12.44 | 14.58 | 19.34 | 25.04 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.034 | 8.897 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 15.44 | 20.34 | 26.17 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.643 | 9.542 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 16.31 | 21.34 | 27.30 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.260 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 17.19 | 22.34 | 28.43 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.886 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 18.06 | 23.34 | 29.55 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 18.94 | 24.34 | 30.68 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 19.82 | 25.34 | 31.79 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 20.70 | 26.34 | 32.91 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 21.59 | 27.34 | 34.03 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 22.48 | 28.34 | 35.14 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 23.36 | 29.34 | 36.25 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 31 | 14.46 | 15.66 | 17.54 | 19.28 | 21.43 | 24.26 | 30.34 | 37.36 | 41.42 | 44.99 | 48.23 | 52.19 | 55.00 |
| 32 | 15.13 | 16.36 | 18.29 | 20.07 | 22.27 | 25.15 | 31.34 | 38.47 | 42.58 | 46.19 | 49.48 | 53.49 | 56.33 |
| 33 | 15.82 | 17.07 | 19.05 | 20.87 | 23.11 | 26.04 | 32.34 | 39.57 | 43.75 | 47.40 | 50.73 | 54.78 | 57.65 |
| 34 | 16.50 | 17.79 | 19.81 | 21.66 | 23.95 | 26.94 | 33.34 | 40.68 | 44.90 | 48.60 | 51.97 | 56.06 | 58.96 |
| 35 | 17.19 | 18.51 | 20.57 | 22.47 | 24.80 | 27.84 | 34.34 | 41.78 | 46.06 | 49.80 | 53.20 | 57.34 | 60.27 |
| 36 | 17.89 | 19.23 | 21.34 | 23.27 | 25.64 | 28.73 | 35.34 | 42.88 | 47.21 | 51.00 | 54.44 | 58.62 | 61.58 |
| 37 | 18.59 | 19.96 | 22.11 | 24.07 | 26.49 | 29.64 | 36.34 | 43.98 | 48.36 | 52.19 | 55.67 | 59.89 | 62.88 |
| 38 | 19.29 | 20.69 | 22.88 | 24.88 | 27.34 | 30.54 | 37.34 | 45.08 | 49.51 | 53.38 | 56.90 | 61.16 | 64.18 |
| 39 | 20.00 | 21.43 | 23.65 | 25.70 | 28.20 | 31.44 | 38.34 | 46.17 | 50.66 | 54.57 | 58.12 | 62.43 | 65.48 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.05 | 32.34 | 39.34 | 47.27 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 41 | 21.42 | 22.91 | 25.21 | 27.33 | 29.91 | 33.25 | 40.34 | 48.36 | 52.95 | 56.94 | 60.56 | 64.95 | 68.05 |
| 42 | 22.14 | 23.65 | 26.00 | 28.14 | 30.77 | 34.16 | 41.34 | 49.46 | 54.09 | 58.12 | 61.78 | 66.21 | 69.34 |
| 43 | 22.86 | 24.40 | 26.79 | 28.96 | 31.63 | 35.07 | 42.34 | 50.55 | 55.23 | 59.30 | 62.99 | 67.46 | 70.62 |
| 44 | 23.58 | 25.15 | 27.57 | 29.79 | 37.49 | 35.97 | 43.34 | 51.64 | 56.37 | 60.48 | 64.20 | 68.71 | 71.89 |
| 45 | 24.31 | 25.90 | 28.37 | 30.61 | 33.35 | 36.88 | 44.34 | 52.73 | 57.51 | 61.66 | 65.41 | 69.96 | 73.17 |
| 46 | 25.04 | 26.66 | 29.16 | 31.44 | 34.22 | 37.80 | 45.34 | 53.82 | 58.64 | 62.83 | 66.62 | 71.20 | 74.44 |
| 47 | 25.77 | 27.42 | 29.96 | 32.27 | 35.08 | 38.71 | 46.34 | 54.91 | 59.77 | 64.00 | 67.82 | 72.44 | 75.70 |
| 48 | 26.51 | 28.18 | 30.75 | 33.10 | 35.95 | 39.62 | 47.34 | 55.99 | 60.91 | 65.17 | 69.02 | 73.68 | 76.97 |
| 49 | 27.25 | 28.94 | 31.55 | 33.93 | 36.82 | 40.53 | 48.33 | 57.08 | 62.04 | 66.34 | 70.22 | 74.92 | 78.23 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 41.45 | 49.33 | 58.16 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 |
| 100 | 67.33 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 82.36 | 87.95 | 99.33 | 111.7 | 118.5 | 124.3 | 129.6 | 135.8 | 140.2 |

# Students *t*-Verteilung

*p*-Quantile $t_{[p;fg]}$ der *t*-Verteilung mit *fg* Freiheitsgraden

$$[\ t_{[p;fg]} = -t_{[1-p;fg]}\ ]$$

**Beispiel:** $t_{[0.99;15]} = 2.6025$ , $t_{[0.01;15]} = -2.6025$

| | *p* | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***fg*** | **0.6** | **0.7** | **0.8** | **0.9** | **0.95** | **0.975** | **0.99** | **0.995** |
| 1 | 0.3249 | 0.7265 | 1.3764 | 3.0777 | 6.3138 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 0.2887 | 0.6172 | 1.0607 | 1.8856 | 2.9200 | 4.3027 | 6.9646 | 9.9248 |
| 3 | 0.2767 | 0.5844 | 0.9785 | 1.6377 | 2.3534 | 3.1824 | 4.5407 | 5.8409 |
| 4 | 0.2707 | 0.5687 | 0.9410 | 1.5332 | 2.1318 | 2.7764 | 3.7470 | 4.6041 |
| 5 | 0.2672 | 0.5594 | 0.9195 | 1.4759 | 2.0150 | 2.5706 | 3.3649 | 4.0322 |
| 6 | 0.2648 | 0.5534 | 0.9057 | 1.4398 | 1.9432 | 2.4469 | 3.1427 | 3.7074 |
| 7 | 0.2632 | 0.5491 | 0.8960 | 1.4149 | 1.8946 | 2.3646 | 2.9980 | 3.4995 |
| 8 | 0.2619 | 0.5459 | 0.8889 | 1.3968 | 1.8595 | 2.3060 | 2.8965 | 3.3554 |
| 9 | 0.2610 | 0.5435 | 0.8834 | 1.3830 | 1.8331 | 2.2622 | 2.8214 | 3.2498 |
| 10 | 0.2602 | 0.5415 | 0.8791 | 1.3722 | 1.8125 | 2.2281 | 2.7638 | 3.1693 |
| 11 | 0.2596 | 0.5399 | 0.8755 | 1.3634 | 1.7959 | 2.2010 | 2.7181 | 3.1058 |
| 12 | 0.2590 | 0.5386 | 0.8726 | 1.3562 | 1.7823 | 2.1788 | 2.6810 | 3.0545 |
| 13 | 0.2586 | 0.5375 | 0.8702 | 1.3502 | 1.7709 | 2.1604 | 2.6503 | 3.0123 |
| 14 | 0.2582 | 0.5366 | 0.8681 | 1.3450 | 1.7613 | 2.1448 | 2.6245 | 2.9768 |
| 15 | 0.2579 | 0.5357 | 0.8662 | 1.3406 | 1.7531 | 2.1314 | 2.6025 | 2.9467 |
| 16 | 0.2576 | 0.5350 | 0.8647 | 1.3368 | 1.7459 | 2.1199 | 2.5835 | 2.9208 |
| 17 | 0.2574 | 0.5344 | 0.8633 | 1.3334 | 1.7396 | 2.1098 | 2.5669 | 2.8982 |
| 18 | 0.2571 | 0.5338 | 0.8621 | 1.3304 | 1.7341 | 2.1009 | 2.5524 | 2.8784 |
| 19 | 0.2569 | 0.5333 | 0.8610 | 1.3277 | 1.7291 | 2.0930 | 2.5395 | 2.8609 |
| 20 | 0.2567 | 0.5329 | 0.8510 | 1.3253 | 1.7247 | 2.0860 | 2.5280 | 2.8453 |
| 21 | 0.2566 | 0.5325 | 0.8591 | 1.3232 | 1.7207 | 2.0796 | 2.5176 | 2.8314 |
| 22 | 0.2564 | 0.5321 | 0.8583 | 1.3212 | 1.7171 | 2.0739 | 2.5083 | 2.8188 |
| 23 | 0.2563 | 0.5318 | 0.8575 | 1.3195 | 1.7139 | 2.0687 | 2.4999 | 2.8073 |
| 24 | 0.2562 | 0.5314 | 0.8569 | 1.3178 | 1.7109 | 2.0639 | 2.4922 | 2.7969 |
| 25 | 0.2561 | 0.5312 | 0.8562 | 1.3163 | 1.7081 | 2.0595 | 2.4851 | 2.7874 |
| 26 | 0.2560 | 0.5309 | 0.8557 | 1.3150 | 1.7056 | 2.0555 | 2.4786 | 2.7787 |
| 27 | 0.2559 | 0.5307 | 0.8551 | 1.3137 | 1.7033 | 2.0518 | 2.4727 | 2.7707 |
| 28 | 0.2558 | 0.5304 | 0.8547 | 1.3125 | 1.7011 | 2.0484 | 2.4671 | 2.7633 |
| 29 | 0.2557 | 0.5302 | 0.8542 | 1.3114 | 1.6991 | 2.0452 | 2.4620 | 2.7564 |
| 30 | 0.2556 | 0.5300 | 0.8538 | 1.3104 | 1.6973 | 2.0423 | 2.4573 | 2.7500 |
| 31 | 0.2555 | 0.5298 | 0.8534 | 1.3095 | 1.6955 | 2.0395 | 2.4528 | 2.7440 |
| 32 | 0.2555 | 0.5297 | 0.8530 | 1.3086 | 1.6939 | 2.0369 | 2.4487 | 2.7385 |
| 33 | 0.2554 | 0.5295 | 0.8527 | 1.3077 | 1.6924 | 2.0345 | 2.4448 | 2.7333 |
| 34 | 0.2553 | 0.5294 | 0.8523 | 1.3070 | 1.6909 | 2.0322 | 2.4411 | 2.7284 |
| 35 | 0.2553 | 0.5292 | 0.8520 | 1.3062 | 1.6896 | 2.0301 | 2.4377 | 2.7238 |
| 36 | 0.2552 | 0.5291 | 0.8517 | 1.3055 | 1.6883 | 2.0281 | 2.4345 | 2.7195 |
| 37 | 0.2552 | 0.5290 | 0.8514 | 1.3049 | 1.6871 | 2.0262 | 2.4314 | 2.7154 |
| 38 | 0.2551 | 0.5288 | 0.8512 | 1.3042 | 1.6860 | 2.0244 | 2.4286 | 2.7116 |
| 39 | 0.2551 | 0.5287 | 0.8509 | 1.3036 | 1.6849 | 2.0227 | 2.4258 | 2.7079 |
| 40 | 0.2550 | 0.5286 | 0.8507 | 1.3031 | 1.6839 | 2.0211 | 2.4233 | 2.7045 |
| 41 | 0.2550 | 0.5285 | 0.8505 | 1.3025 | 1.6829 | 2.0195 | 2.4208 | 2.7012 |
| 42 | 0.2550 | 0.5284 | 0.8503 | 1.3020 | 1.6820 | 2.0181 | 2.4185 | 2.6981 |
| 43 | 0.2549 | 0.5283 | 0.8501 | 1.3016 | 1.6811 | 2.0167 | 2.4163 | 2.6951 |
| 44 | 0.2549 | 0.5282 | 0.8499 | 1.3011 | 1.6802 | 2.0154 | 2.4141 | 2.6923 |
| 45 | 0.2549 | 0.5281 | 0.8497 | 1.3006 | 1.6794 | 2.0141 | 2.4121 | 2.6896 |
| 46 | 0.2548 | 0.5281 | 0.8495 | 1.3002 | 1.6787 | 2.0129 | 2.4102 | 2.6870 |
| 47 | 0.2548 | 0.5280 | 0.8493 | 1.2998 | 1.6779 | 2.0117 | 2.4083 | 2.6846 |
| 48 | 0.2548 | 0.5279 | 0.8492 | 1.2994 | 1.6772 | 2.0106 | 2.4066 | 2.6822 |
| 49 | 0.2547 | 0.5278 | 0.8490 | 1.2991 | 1.6766 | 2.0096 | 2.4049 | 2.6800 |
| 50 | 0.2547 | 0.5278 | 0.8489 | 1.2987 | 1.6759 | 2.0086 | 2.4033 | 2.6778 |
| ∞ | 0.2533 | 0.5244 | 0.8416 | 1.2816 | 1.6449 | 1.9600 | 2.3263 | 2.5758 |

# Fishers *F*-Verteilung

*p*-Quantile $f_{[p;fg1,fg2]}$ der *F*-Verteilung mit $fg1$ und $fg2$ Freiheitsgraden für $p = 0.95$ und $p = 0.99$

$$\left[ f_{[p;fg1,fg2]} = \frac{1}{f_{[1-p;fg2,fg1]}} \right]$$

## 0.95-Quantile $f_{[0.95;fg1,fg2]}$

| | ***fg1*** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***fg2*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 | 241.88 | 242.98 | 243.90 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 | 19.40 | 19.41 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 | 8.76 | 8.74 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 | 5.94 | 5.91 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 | 4.70 | 4.68 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.03 | 4.00 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 | 3.60 | 3.57 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 | 3.31 | 3.28 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 | 3.10 | 3.07 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 | 2.94 | 2.91 |
| 11 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 | 2.82 | 2.79 |
| 12 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 | 2.72 | 2.69 |
| 13 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 | 2.63 | 2.60 |
| 14 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 | 2.57 | 2.53 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 | 2.51 | 2.48 |
| 16 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 | 2.46 | 2.42 |
| 17 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.49 | 2.45 | 2.41 | 2.38 |
| 18 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 | 2.37 | 2.34 |
| 19 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 | 2.34 | 2.31 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 | 2.31 | 2.28 |
| 21 | 4.32 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 | 2.28 | 2.25 |
| 22 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 | 2.26 | 2.23 |
| 23 | 4.28 | 3.42 | 3.03 | 2.80 | 2.64 | 2.53 | 2.44 | 2.37 | 2.32 | 2.27 | 2.24 | 2.20 |
| 24 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 | 2.22 | 2.18 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 | 2.20 | 2.16 |
| 26 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.15 |
| 27 | 4.21 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 | 2.17 | 2.13 |
| 28 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 |
| 29 | 4.18 | 3.33 | 2.93 | 2.70 | 2.55 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.22 | 2.18 | 2.14 | 2.10 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.13 | 2.09 |
| 31 | 4.16 | 3.30 | 2.91 | 2.68 | 2.52 | 2.41 | 2.32 | 2.25 | 2.20 | 2.15 | 2.11 | 2.08 |
| 32 | 4.15 | 3.29 | 2.90 | 2.67 | 2.51 | 2.40 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.14 | 2.10 | 2.07 |
| 33 | 4.14 | 3.28 | 2.89 | 2.66 | 2.50 | 2.39 | 2.30 | 2.23 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 |
| 34 | 4.13 | 3.28 | 2.88 | 2.65 | 2.49 | 2.38 | 2.29 | 2.23 | 2.17 | 2.12 | 2.08 | 2.05 |
| 35 | 4.12 | 3.27 | 2.87 | 2.64 | 2.49 | 2.37 | 2.29 | 2.22 | 2.16 | 2.11 | 2.07 | 2.04 |
| 36 | 4.11 | 3.26 | 2.87 | 2.63 | 2.48 | 2.36 | 2.28 | 2.21 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.03 |
| 37 | 4.11 | 3.25 | 2.86 | 2.63 | 2.47 | 2.36 | 2.27 | 2.20 | 2.14 | 2.10 | 2.06 | 2.02 |
| 38 | 4.10 | 3.24 | 2.85 | 2.62 | 2.46 | 2.35 | 2.26 | 2.19 | 2.14 | 2.09 | 2.05 | 2.02 |
| 39 | 4.09 | 3.24 | 2.85 | 2.61 | 2.46 | 2.34 | 2.26 | 2.19 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.01 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 | 2.04 | 2.00 |
| 50 | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 1.99 | 1.95 |
| 60 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.92 |
| 70 | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.89 |
| 80 | 3.96 | 3.11 | 2.72 | 2.49 | 2.33 | 2.21 | 2.13 | 2.06 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.88 |
| 90 | 3.95 | 3.10 | 2.71 | 2.47 | 2.32 | 2.20 | 2.11 | 2.04 | 1.99 | 1.94 | 1.90 | 1.86 |
| 100 | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.31 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.85 |
| 200 | 3.89 | 3.04 | 2.65 | 2.42 | 2.26 | 2.14 | 2.06 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.84 | 1.80 |
| 500 | 3.86 | 3.01 | 2.62 | 2.39 | 2.23 | 2.12 | 2.03 | 1.96 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.77 |
| 1000 | 3.85 | 3.00 | 2.61 | 2.38 | 2.22 | 2.11 | 2.02 | 1.95 | 1.89 | 1.84 | 1.80 | 1.76 |

## 0.95-Quantile $f_{[0.95;\,fg1,fg2]}$ (Fortsetzung)

| | fg1 | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **fg2** | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 35 | 40 |
| 1 | 245.36 | 246.47 | 247.32 | 248.02 | 248.58 | 249.05 | 249.45 | 249.80 | 250.10 | 250.69 | 251.14 |
| 2 | 19.42 | 19.43 | 19.44 | 19.45 | 19.45 | 19.45 | 19.46 | 19.46 | 19.46 | 19.47 | 19.47 |
| 3 | 8.71 | 8.69 | 8.67 | 8.66 | 8.65 | 8.64 | 8.63 | 8.62 | 8.62 | 8.60 | 8.59 |
| 4 | 5.87 | 5.84 | 5.82 | 5.80 | 5.79 | 5.77 | 5.76 | 5.75 | 5.75 | 5.73 | 5.72 |
| 5 | 4.64 | 4.60 | 4.58 | 4.56 | 4.54 | 4.53 | 4.52 | 4.50 | 4.50 | 4.48 | 4.46 |
| 6 | 3.96 | 3.92 | 3.90 | 3.87 | 3.86 | 3.84 | 3.83 | 3.82 | 3.81 | 3.79 | 3.77 |
| 7 | 3.53 | 3.49 | 3.47 | 3.44 | 3.43 | 3.41 | 3.40 | 3.39 | 3.38 | 3.36 | 3.34 |
| 8 | 3.24 | 3.20 | 3.17 | 3.15 | 3.13 | 3.12 | 3.10 | 3.09 | 3.08 | 3.06 | 3.04 |
| 9 | 3.03 | 2.99 | 2.96 | 2.94 | 2.92 | 2.90 | 2.89 | 2.87 | 2.86 | 2.84 | 2.83 |
| 10 | 2.86 | 2.83 | 2.80 | 2.77 | 2.75 | 2.74 | 2.72 | 2.71 | 2.70 | 2.68 | 2.66 |
| 11 | 2.74 | 2.70 | 2.67 | 2.65 | 2.63 | 2.61 | 2.59 | 2.58 | 2.57 | 2.55 | 2.53 |
| 12 | 2.64 | 2.60 | 2.57 | 2.54 | 2.52 | 2.51 | 2.49 | 2.48 | 2.47 | 2.44 | 2.43 |
| 13 | 2.55 | 2.51 | 2.48 | 2.46 | 2.44 | 2.42 | 2.41 | 2.39 | 2.38 | 2.36 | 2.34 |
| 14 | 2.48 | 2.44 | 2.41 | 2.39 | 2.37 | 2.35 | 2.33 | 2.32 | 2.31 | 2.28 | 2.27 |
| 15 | 2.42 | 2.38 | 2.35 | 2.33 | 2.31 | 2.29 | 2.27 | 2.26 | 2.25 | 2.22 | 2.20 |
| 16 | 2.37 | 2.33 | 2.30 | 2.28 | 2.25 | 2.24 | 2.22 | 2.21 | 2.19 | 2.17 | 2.15 |
| 17 | 2.33 | 2.29 | 2.26 | 2.23 | 2.21 | 2.19 | 2.17 | 2.16 | 2.15 | 2.12 | 2.10 |
| 18 | 2.29 | 2.25 | 2.22 | 2.19 | 2.17 | 2.15 | 2.13 | 2.12 | 2.11 | 2.08 | 2.06 |
| 19 | 2.26 | 2.21 | 2.18 | 2.16 | 2.13 | 2.11 | 2.10 | 2.08 | 2.07 | 2.05 | 2.03 |
| 20 | 2.22 | 2.18 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.07 | 2.05 | 2.04 | 2.01 | 1.99 |
| 21 | 2.20 | 2.16 | 2.12 | 2.10 | 2.07 | 2.05 | 2.04 | 2.02 | 2.01 | 1.98 | 1.96 |
| 22 | 2.17 | 2.13 | 2.10 | 2.07 | 2.05 | 2.03 | 2.01 | 2.00 | 1.98 | 1.96 | 1.94 |
| 23 | 2.15 | 2.11 | 2.08 | 2.05 | 2.02 | 2.01 | 1.99 | 1.97 | 1.96 | 1.93 | 1.91 |
| 24 | 2.13 | 2.09 | 2.05 | 2.03 | 2.00 | 1.98 | 1.97 | 1.95 | 1.94 | 1.91 | 1.89 |
| 25 | 2.11 | 2.07 | 2.04 | 2.01 | 1.98 | 1.96 | 1.95 | 1.93 | 1.92 | 1.89 | 1.87 |
| 26 | 2.09 | 2.05 | 2.02 | 1.99 | 1.97 | 1.95 | 1.93 | 1.91 | 1.90 | 1.87 | 1.85 |
| 27 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.97 | 1.95 | 1.93 | 1.91 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.84 |
| 28 | 2.06 | 2.02 | 1.99 | 1.96 | 1.93 | 1.91 | 1.90 | 1.88 | 1.87 | 1.84 | 1.82 |
| 29 | 2.05 | 2.01 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.87 | 1.85 | 1.83 | 1.81 |
| 30 | 2.04 | 1.99 | 1.96 | 1.93 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.85 | 1.84 | 1.81 | 1.79 |
| 31 | 2.03 | 1.98 | 1.95 | 1.92 | 1.90 | 1.88 | 1.86 | 1.84 | 1.83 | 1.80 | 1.78 |
| 32 | 2.01 | 1.97 | 1.94 | 1.91 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.83 | 1.82 | 1.79 | 1.77 |
| 33 | 2.00 | 1.96 | 1.93 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.83 | 1.82 | 1.81 | 1.78 | 1.76 |
| 34 | 1.99 | 1.95 | 1.92 | 1.89 | 1.86 | 1.84 | 1.82 | 1.81 | 1.80 | 1.77 | 1.75 |
| 35 | 1.99 | 1.94 | 1.91 | 1.88 | 1.85 | 1.83 | 1.82 | 1.80 | 1.79 | 1.76 | 1.74 |
| 36 | 1.98 | 1.93 | 1.90 | 1.87 | 1.85 | 1.82 | 1.81 | 1.79 | 1.78 | 1.75 | 1.73 |
| 37 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.86 | 1.84 | 1.82 | 1.80 | 1.78 | 1.77 | 1.74 | 1.72 |
| 38 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.85 | 1.83 | 1.81 | 1.79 | 1.77 | 1.76 | 1.73 | 1.71 |
| 39 | 1.95 | 1.91 | 1.88 | 1.85 | 1.82 | 1.80 | 1.78 | 1.77 | 1.75 | 1.72 | 1.70 |
| 40 | 1.95 | 1.90 | 1.87 | 1.84 | 1.81 | 1.79 | 1.77 | 1.76 | 1.74 | 1.72 | 1.69 |
| 50 | 1.89 | 1.85 | 1.81 | 1.78 | 1.76 | 1.74 | 1.72 | 1.70 | 1.69 | 1.66 | 1.63 |
| 60 | 1.86 | 1.82 | 1.78 | 1.75 | 1.72 | 1.70 | 1.68 | 1.66 | 1.65 | 1.62 | 1.59 |
| 70 | 1.84 | 1.79 | 1.75 | 1.72 | 1.70 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.62 | 1.59 | 1.57 |
| 80 | 1.82 | 1.77 | 1.73 | 1.70 | 1.68 | 1.65 | 1.63 | 1.62 | 1.60 | 1.57 | 1.54 |
| 90 | 1.80 | 1.76 | 1.72 | 1.69 | 1.66 | 1.64 | 1.62 | 1.60 | 1.59 | 1.55 | 1.53 |
| 100 | 1.79 | 1.75 | 1.71 | 1.68 | 1.65 | 1.63 | 1.61 | 1.59 | 1.57 | 1.54 | 1.52 |
| 200 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.62 | 1.60 | 1.57 | 1.55 | 1.53 | 1.52 | 1.48 | 1.46 |
| 500 | 1.71 | 1.66 | 1.62 | 1.59 | 1.56 | 1.54 | 1.52 | 1.50 | 1.48 | 1.45 | 1.42 |
| 1000 | 1.70 | 1.65 | 1.61 | 1.58 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | 1.49 | 1.47 | 1.43 | 1.41 |

## 0.99-Quantile $f_{[0.99;\, fg1,\, fg2]}$

| | *fg1* | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***fg2*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 4052.18 | 4999.34 | 5403.53 | 5624.26 | 5763.96 | 5858.95 | 5928.33 | 5980.95 | 6022.40 | 6055.93 | 6083.40 | 6106.68 |
| 2 | 98.50 | 99.00 | 99.16 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.38 | 99.39 | 99.40 | 99.41 | 99.42 |
| 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.34 | 27.23 | 27.13 | 27.05 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 | 14.55 | 14.45 | 14.37 |
| 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 | 10.05 | 9.96 | 9.89 |
| 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 | 7.79 | 7.72 |
| 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 | 6.54 | 6.47 |
| 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 | 5.73 | 5.67 |
| 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 | 5.18 | 5.11 |
| 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 | 4.77 | 4.71 |
| 11 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 | 4.46 | 4.40 |
| 12 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 | 4.22 | 4.16 |
| 13 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 | 4.02 | 3.96 |
| 14 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 | 3.86 | 3.80 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 | 3.73 | 3.67 |
| 16 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 | 3.62 | 3.55 |
| 17 | 8.40 | 6.11 | 5.19 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 | 3.52 | 3.46 |
| 18 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 | 3.43 | 3.37 |
| 19 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 | 3.36 | 3.30 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 | 3.29 | 3.23 |
| 21 | 8.02 | 5.78 | 4.87 | 4.37 | 4.04 | 3.81 | 3.64 | 3.51 | 3.40 | 3.31 | 3.24 | 3.17 |
| 22 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 | 3.18 | 3.12 |
| 23 | 7.88 | 5.66 | 4.76 | 4.26 | 3.94 | 3.71 | 3.54 | 3.41 | 3.30 | 3.21 | 3.14 | 3.07 |
| 24 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 | 3.09 | 3.03 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 | 3.13 | 3.06 | 2.99 |
| 26 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 | 3.02 | 2.96 |
| 27 | 7.68 | 5.49 | 4.60 | 4.11 | 3.78 | 3.56 | 3.39 | 3.26 | 3.15 | 3.06 | 2.99 | 2.93 |
| 28 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 | 2.96 | 2.90 |
| 29 | 7.60 | 5.42 | 4.54 | 4.04 | 3.73 | 3.50 | 3.33 | 3.20 | 3.09 | 3.00 | 2.93 | 2.87 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 | 2.91 | 2.84 |
| 31 | 7.53 | 5.36 | 4.48 | 3.99 | 3.67 | 3.45 | 3.28 | 3.15 | 3.04 | 2.96 | 2.88 | 2.82 |
| 32 | 7.50 | 5.34 | 4.46 | 3.97 | 3.65 | 3.43 | 3.26 | 3.13 | 3.02 | 2.93 | 2.86 | 2.80 |
| 33 | 7.47 | 5.31 | 4.44 | 3.95 | 3.63 | 3.41 | 3.24 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.84 | 2.78 |
| 34 | 7.44 | 5.29 | 4.42 | 3.93 | 3.61 | 3.39 | 3.22 | 3.09 | 2.98 | 2.89 | 2.82 | 2.76 |
| 35 | 7.42 | 5.27 | 4.40 | 3.91 | 3.59 | 3.37 | 3.20 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.80 | 2.74 |
| 36 | 7.40 | 5.25 | 4.38 | 3.89 | 3.57 | 3.35 | 3.18 | 3.05 | 2.95 | 2.86 | 2.79 | 2.72 |
| 37 | 7.37 | 5.23 | 4.36 | 3.87 | 3.56 | 3.33 | 3.17 | 3.04 | 2.93 | 2.84 | 2.77 | 2.71 |
| 38 | 7.35 | 5.21 | 4.34 | 3.86 | 3.54 | 3.32 | 3.15 | 3.02 | 2.92 | 2.83 | 2.75 | 2.69 |
| 39 | 7.33 | 5.19 | 4.33 | 3.84 | 3.53 | 3.30 | 3.14 | 3.01 | 2.90 | 2.81 | 2.74 | 2.68 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 | 2.73 | 2.66 |
| 50 | 7.17 | 5.06 | 4.20 | 3.72 | 3.41 | 3.19 | 3.02 | 2.89 | 2.78 | 2.70 | 2.63 | 2.56 |
| 60 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 | 2.56 | 2.50 |
| 70 | 7.01 | 4.92 | 4.07 | 3.60 | 3.29 | 3.07 | 2.91 | 2.78 | 2.67 | 2.59 | 2.51 | 2.45 |
| 80 | 6.96 | 4.88 | 4.04 | 3.56 | 3.26 | 3.04 | 2.87 | 2.74 | 2.64 | 2.55 | 2.48 | 2.42 |
| 90 | 6.93 | 4.85 | 4.01 | 3.53 | 3.23 | 3.01 | 2.84 | 2.72 | 2.61 | 2.52 | 2.45 | 2.39 |
| 100 | 6.90 | 4.82 | 3.98 | 3.51 | 3.21 | 2.99 | 2.82 | 2.69 | 2.59 | 2.50 | 2.43 | 2.37 |
| 200 | 6.76 | 4.71 | 3.88 | 3.41 | 3.11 | 2.89 | 2.73 | 2.60 | 2.50 | 2.41 | 2.34 | 2.27 |
| 500 | 6.69 | 4.65 | 3.82 | 3.36 | 3.05 | 2.84 | 2.68 | 2.55 | 2.44 | 2.36 | 2.28 | 2.22 |
| 1000 | 6.66 | 4.63 | 3.80 | 3.34 | 3.04 | 2.82 | 2.66 | 2.53 | 2.43 | 2.34 | 2.27 | 2.20 |

## 0.99-Quantile $f_{[0.99;\, fg1,\, fg2]}$ (Fortsetzung)

| | fg1 | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **fg2** | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 35 | 40 |
| 1 | 6143.00 | 6170.01 | 6191.43 | 6208.66 | 6223.10 | 6234.27 | 6244.52 | 6252.90 | 6260.35 | 6275.25 | 6286.43 |
| 2 | 99.43 | 99.44 | 99.44 | 99.45 | 99.46 | 99.46 | 99.46 | 99.46 | 99.47 | 99.47 | 99.48 |
| 3 | 26.92 | 26.83 | 26.75 | 26.69 | 26.64 | 26.60 | 26.56 | 26.53 | 26.50 | 26.45 | 26.41 |
| 4 | 14.25 | 14.15 | 14.08 | 14.02 | 13.97 | 13.93 | 13.89 | 13.86 | 13.84 | 13.79 | 13.75 |
| 5 | 9.77 | 9.68 | 9.61 | 9.55 | 9.51 | 9.47 | 9.43 | 9.40 | 9.38 | 9.33 | 9.29 |
| 6 | 7.60 | 7.52 | 7.45 | 7.40 | 7.35 | 7.31 | 7.28 | 7.25 | 7.23 | 7.18 | 7.14 |
| 7 | 6.36 | 6.28 | 6.21 | 6.16 | 6.11 | 6.07 | 6.04 | 6.02 | 5.99 | 5.94 | 5.91 |
| 8 | 5.56 | 5.48 | 5.41 | 5.36 | 5.32 | 5.28 | 5.25 | 5.22 | 5.20 | 5.15 | 5.12 |
| 9 | 5.01 | 4.92 | 4.86 | 4.81 | 4.77 | 4.73 | 4.70 | 4.67 | 4.65 | 4.60 | 4.57 |
| 10 | 4.60 | 4.52 | 4.46 | 4.41 | 4.36 | 4.33 | 4.30 | 4.27 | 4.25 | 4.20 | 4.17 |
| 11 | 4.29 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 | 4.02 | 3.99 | 3.96 | 3.94 | 3.89 | 3.86 |
| 12 | 4.05 | 3.97 | 3.91 | 3.86 | 3.82 | 3.78 | 3.75 | 3.72 | 3.70 | 3.65 | 3.62 |
| 13 | 3.86 | 3.78 | 3.72 | 3.66 | 3.62 | 3.59 | 3.56 | 3.53 | 3.51 | 3.46 | 3.43 |
| 14 | 3.70 | 3.62 | 3.56 | 3.51 | 3.46 | 3.43 | 3.40 | 3.37 | 3.35 | 3.30 | 3.27 |
| 15 | 3.56 | 3.49 | 3.42 | 3.37 | 3.33 | 3.29 | 3.26 | 3.24 | 3.21 | 3.17 | 3.13 |
| 16 | 3.45 | 3.37 | 3.31 | 3.26 | 3.22 | 3.18 | 3.15 | 3.12 | 3.10 | 3.05 | 3.02 |
| 17 | 3.35 | 3.27 | 3.21 | 3.16 | 3.12 | 3.08 | 3.05 | 3.03 | 3.00 | 2.96 | 2.92 |
| 18 | 3.27 | 3.19 | 3.13 | 3.08 | 3.03 | 3.00 | 2.97 | 2.94 | 2.92 | 2.87 | 2.84 |
| 19 | 3.19 | 3.12 | 3.05 | 3.00 | 2.96 | 2.92 | 2.89 | 2.87 | 2.84 | 2.80 | 2.76 |
| 20 | 3.13 | 3.05 | 2.99 | 2.94 | 2.90 | 2.86 | 2.83 | 2.80 | 2.78 | 2.73 | 2.69 |
| 21 | 3.07 | 2.99 | 2.93 | 2.88 | 2.84 | 2.80 | 2.77 | 2.74 | 2.72 | 2.67 | 2.64 |
| 22 | 3.02 | 2.94 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.69 | 2.67 | 2.62 | 2.58 |
| 23 | 2.97 | 2.89 | 2.83 | 2.78 | 2.74 | 2.70 | 2.67 | 2.64 | 2.62 | 2.57 | 2.54 |
| 24 | 2.93 | 2.85 | 2.79 | 2.74 | 2.70 | 2.66 | 2.63 | 2.60 | 2.58 | 2.53 | 2.49 |
| 25 | 2.89 | 2.81 | 2.75 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 | 2.49 | 2.45 |
| 26 | 2.86 | 2.78 | 2.72 | 2.66 | 2.62 | 2.58 | 2.55 | 2.53 | 2.50 | 2.45 | 2.42 |
| 27 | 2.82 | 2.75 | 2.68 | 2.63 | 2.59 | 2.55 | 2.52 | 2.49 | 2.47 | 2.42 | 2.38 |
| 28 | 2.79 | 2.72 | 2.65 | 2.60 | 2.56 | 2.52 | 2.49 | 2.46 | 2.44 | 2.39 | 2.35 |
| 29 | 2.77 | 2.69 | 2.63 | 2.57 | 2.53 | 2.49 | 2.46 | 2.44 | 2.41 | 2.36 | 2.33 |
| 30 | 2.74 | 2.66 | 2.60 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.41 | 2.39 | 2.34 | 2.30 |
| 31 | 2.72 | 2.64 | 2.58 | 2.52 | 2.48 | 2.45 | 2.41 | 2.39 | 2.36 | 2.31 | 2.27 |
| 32 | 2.70 | 2.62 | 2.55 | 2.50 | 2.46 | 2.42 | 2.39 | 2.36 | 2.34 | 2.29 | 2.25 |
| 33 | 2.68 | 2.60 | 2.53 | 2.48 | 2.44 | 2.40 | 2.37 | 2.34 | 2.32 | 2.27 | 2.23 |
| 34 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.35 | 2.32 | 2.30 | 2.25 | 2.21 |
| 35 | 2.64 | 2.56 | 2.50 | 2.44 | 2.40 | 2.36 | 2.33 | 2.30 | 2.28 | 2.23 | 2.19 |
| 36 | 2.62 | 2.54 | 2.48 | 2.43 | 2.38 | 2.35 | 2.32 | 2.29 | 2.26 | 2.21 | 2.18 |
| 37 | 2.61 | 2.53 | 2.46 | 2.41 | 2.37 | 2.33 | 2.30 | 2.27 | 2.25 | 2.20 | 2.16 |
| 38 | 2.59 | 2.51 | 2.45 | 2.40 | 2.35 | 2.32 | 2.28 | 2.26 | 2.23 | 2.18 | 2.14 |
| 39 | 2.58 | 2.50 | 2.43 | 2.38 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.24 | 2.22 | 2.17 | 2.13 |
| 40 | 2.56 | 2.48 | 2.42 | 2.37 | 2.33 | 2.29 | 2.26 | 2.23 | 2.20 | 2.15 | 2.11 |
| 50 | 2.46 | 2.38 | 2.32 | 2.27 | 2.22 | 2.18 | 2.15 | 2.12 | 2.10 | 2.05 | 2.01 |
| 60 | 2.39 | 2.31 | 2.25 | 2.20 | 2.15 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 2.03 | 1.98 | 1.94 |
| 70 | 2.35 | 2.27 | 2.20 | 2.15 | 2.11 | 2.07 | 2.03 | 2.01 | 1.98 | 1.93 | 1.89 |
| 80 | 2.31 | 2.23 | 2.17 | 2.12 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.97 | 1.94 | 1.89 | 1.85 |
| 90 | 2.29 | 2.21 | 2.14 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.86 | 1.82 |
| 100 | 2.27 | 2.19 | 2.12 | 2.07 | 2.02 | 1.98 | 1.95 | 1.92 | 1.89 | 1.84 | 1.80 |
| 200 | 2.17 | 2.09 | 2.03 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.85 | 1.82 | 1.79 | 1.74 | 1.69 |
| 500 | 2.12 | 2.04 | 1.97 | 1.92 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.68 | 1.63 |
| 1000 | 2.10 | 2.02 | 1.95 | 1.90 | 1.85 | 1.81 | 1.77 | 1.74 | 1.72 | 1.66 | 1.61 |

Für großes *fg2* können die Quantile der *F*-Verteilung mit *fg1* und *fg2* Freiheitsgraden durch die Quantile der $\chi^2$ –Verteilung mit *fg1* Freiheitsgraden approximiert werden.