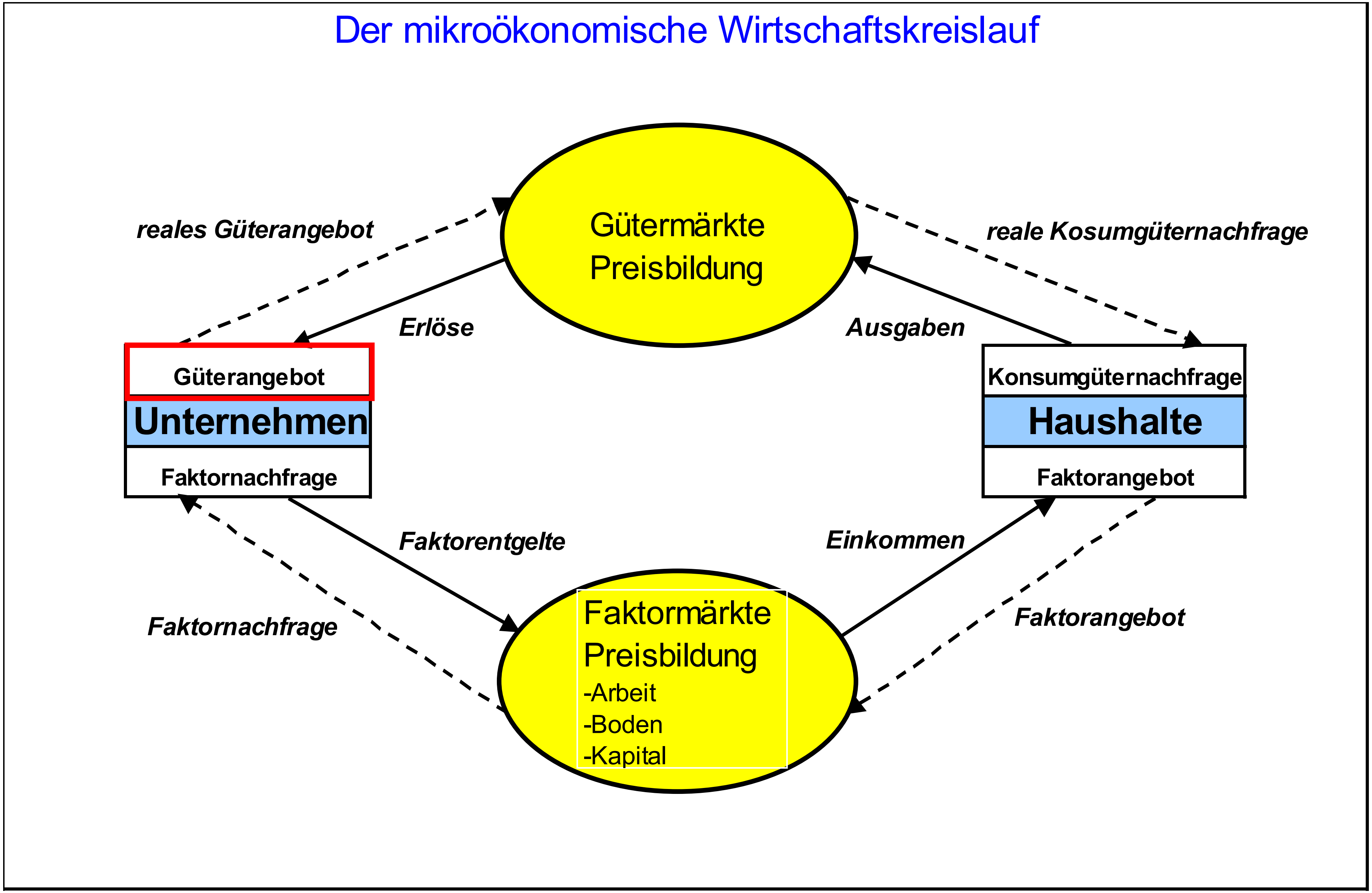
Dr. Werner Klein
Universität zu Köln
Staatswissenschaftliches Seminar
e.-mail: w.klein.wisofak@uni-koeln.de

Grundzüge der Mikroökonomik

3 Unternehmenstheorie

3.1 Theorie des Güterangebots (Produktionsfunktionen alternativer Typen, Kostenkategorien, Güterangebot bei kurzfristiger Gewinnmaximierung)

3.2 Theorie der Faktornachfrage


Der mikroökonomische Wirtschaftskreislauf
Gütermärkte
Preisbildung
reales Güterangebot
reale Kosumgüternachfrage
Erlöse
Ausgaben
Güterangebot
Unternehmen
Faktornachfrage
Konsumgüternachfrage
Haushalte
Faktorangebot
Faktorentgelte
Einkommen
Faktornachfrage
Faktorangebot
Faktormärkte
Preisbildung
-Arbeit
-Boden
-Kapital

Bereiche der Produktions-, Kosten- und Absatzplanung

Gütererzeugung (Produktionsfunktionen)	Kosten (K) der Gütererzeugung	Güterabsatz Umsatz/Erlös (E)
$(v_1, \ldots\ldots v_n)$ Produktionsfaktoren (Input)	$v_1 \cdot p_{v_1}$ $+$ $.$ $.$ $+$ $v_n \cdot p_{v_n}$	$x_1 \cdot p_1$ $+$ $.$ $.$ $+$ $x_n \cdot p_n$
$(x_1, \ldots\ldots x_n)$ Güter (Output)	$K = \sum_1^n v_i \cdot p_{v_i}$	$E = \sum_1^n x_i \cdot p_i$

Gewinn (G): G = E - K

3.1 Theorie des Güterangebots

3.1.1 Produktionsfunktionen

Eine Produktionsfunktion beschreibt den Funktionalzusammenhang zwischen dem mengenmäßigen Aufwand an Produktionsfaktoren (Input) einerseits und dem damit erzielbaren Güterausstoß (Output) andererseits. Es gilt somit:

$$(1)\ x_i = f(v_j)$$

mit x_i die Menge der Produkte (i = 1,...,n) und v_j die Menge der Produktionsfaktoren (j = 1,...,q)

Für das “Ein-Produkt - Zwei-Faktoren-Modell” gilt somit:

$$(2)\ x = f(v_1, v_2)$$

Klassen von Produktionsfunktionen

- **substitutionale Produktionsfunktionen**
- **limitationale Produktionsfunktionen**

Der *Homogenitätsgrad* einer Funktion (x) mit (n) unabhängigen Variablen ($v_{1,\ldots,}v_n$) beschreibt die folgende Eigenschaft derselben:

Die Funktion

$$(1)\ x = f(v_1, \ldots, v_n)$$

ist *homogen vom Grade (r)*, falls gilt:

$$(2)\ \lambda^r x = f(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n)$$

Für eine Produktionsfunktion des Modelltyps: Ein Produkt (x) - zwei Faktoren (v_1,v_2) ergibt sich somit die folgende Charakterisierung:

$$(3)\ x = f(v_1, v_2)$$

Sie ist *linear-homogen*, wenn gilt:

$$(4)\ \lambda^{r=1} x = f(\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Sie ist *unterlinear-homogen*, wenn gilt:

$$(5)\ \lambda^{r<1} x = f(\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Sie ist *überlinear-homogen*, wenn gilt:

$$(6)\ \lambda^{r>1} x = f(\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Aufgabe

Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad (r) der nachfolgenden Produktionsfunktionen. *Hinweis:* Eine Produktionsfunktion ist *inhomogen*, wenn sich der Homogenitätsgrad (r) nicht bestimmen läßt!

$$(1)x = f(v_1, v_2) = v_1 v_2$$

$$(2)x = f(v_1, \dots, v_3) = v_1^{1/2} v_2^{1/4} v_3^{1/4}$$

$$(3)x = f(v_1, \dots, v_3) = v_1 + v_2 + 2v_3^{1/2}$$

$$(4)x = f(v_1, v_2) = (5v_1^2 + v_1 v_2 + 3v_2^2)^{1/2}$$

Lösungen

Aufgabe 1:

$$(1) x = f(v_1, v_2) = v_1 v_2$$

$$(2) f(\lambda v_1, \lambda v_2) = (\lambda v_1) \cdot (\lambda v_2)$$

$$= \lambda^2 (v_1 v_2) = \lambda^2 f(v_1, v_2)$$

$$Homogentätsgrad: r = 2$$

Aufgabe 2:

$$(1) x = f(v_1, v_2, v_3) = v_1^{1/2} v_2^{1/4} v_3^{1/4}$$

$$(2) f(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_3) = (\lambda v_1)^{1/2} (\lambda v_2)^{1/4} (\lambda v_3)^{1/4}$$

$$= \lambda^{1/2} v_1^{1/2} \lambda^{1/4} v_2^{1/4} \lambda^{1/4} v_3^{1/4}$$

$$= \lambda^{(1/2 + 1/4 + 1/4)} (v_1^{1/2} v_2^{1/4} v_3^{1/4})$$

$$= \lambda^1 f(v_1, v_2, v_3)$$

$$Homgenitätsgrad: r = 1$$

Aufgabe 3:

$$(1)\, x = f(v_1,\ldots,v_3) = v_1 + v_2 + 2v_3^{\frac{1}{2}}$$

$$(2)\, f(\lambda v_1,\ldots,\lambda v_3) = \lambda v_1 + \lambda v_2 + 2(\lambda v_3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda^{\frac{1}{2}} 2v_3^{\frac{1}{2}}$$

$$(3)\, f(\lambda v_1,\ldots,\lambda v_3) \neq \lambda^r \cdot f(v_1,\ldots,v_3)$$

$$Homogemitätsgrad: In\,\mathrm{hom}\,ogen$$

Aufgabe 4:

$$(1)\, x = f(v_1,v_2) = (5v_1^{\;2} + v_1 v_2 + 3v_2^{\;2})^{\frac{1}{2}}$$

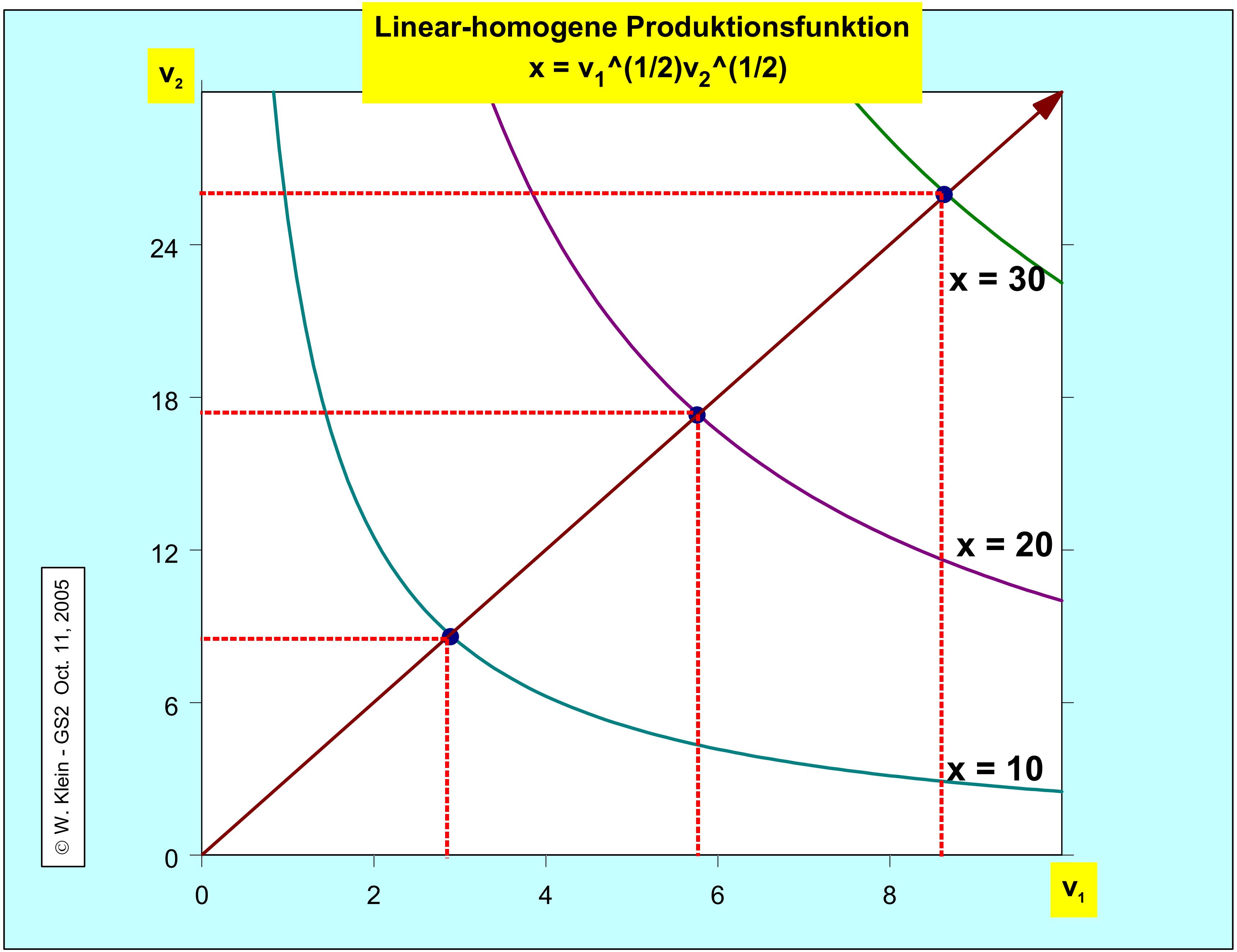
$$(2)\, f(\lambda v_1,\lambda v_2) = \left(5[\lambda v_1]^2 + [\lambda v_1][\lambda v_2] + 3[\lambda v_2]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\lambda^2 5v_1^{\;2} + \lambda^2 v_1 v_2 + \lambda^2 3v_2^{\;2})^{\frac{1}{2}}$$

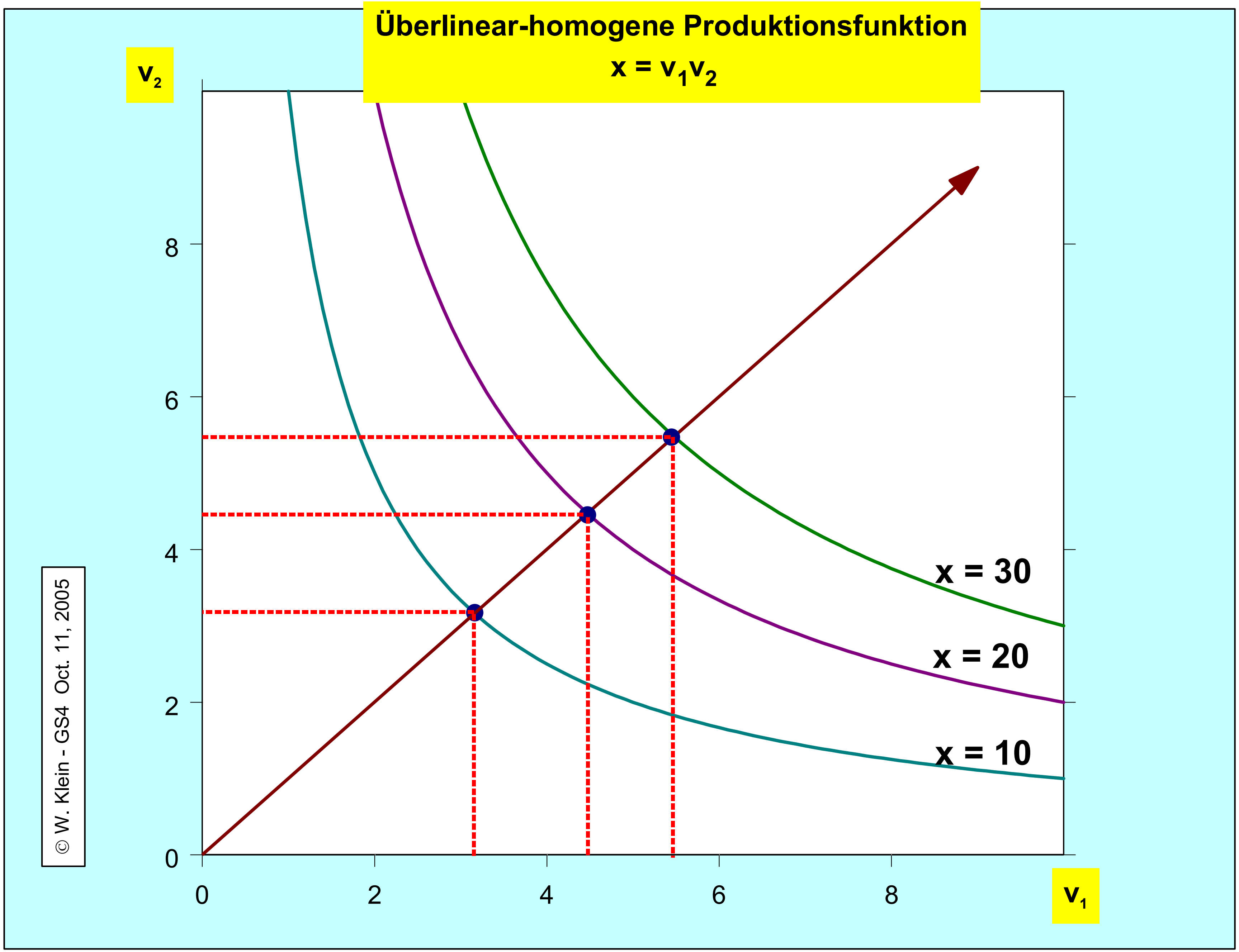
$$= \lambda^1 \cdot (5v_1^{\;2} + v_1 v_2 + 3v_2^{\;2})^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lambda^1 \cdot f(v_1,v_2)$$

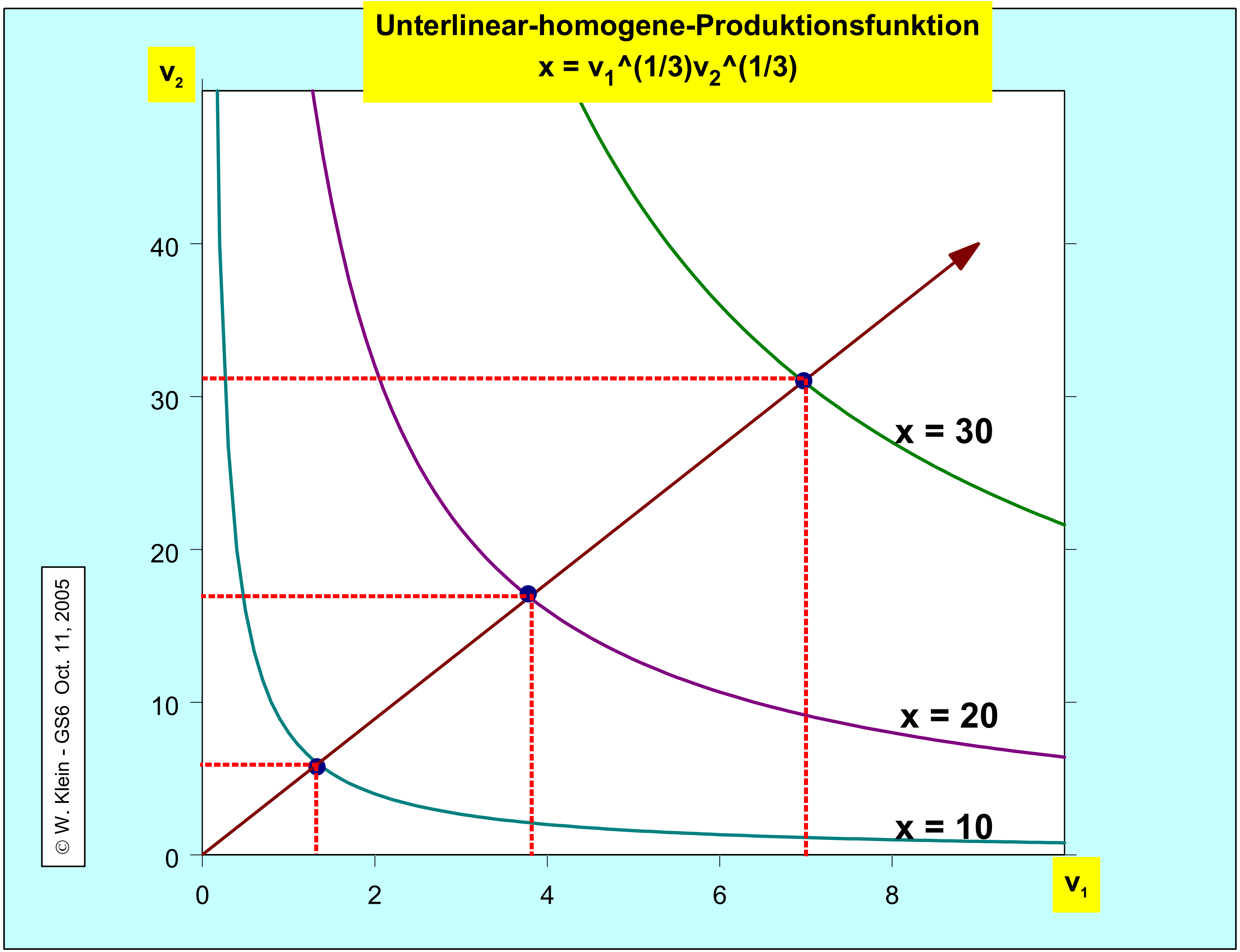
$$Homogenitätsgrad: r = 1$$



Linear-homogene Produktionsfunktion
x = v1^(1/2)v2^(1/2)
v2
v1
x = 30
x = 20
x = 10
0
6
12
18
24
0
2
4
6
8
© W. Klein - GS2 Oct. 11, 2005



Überlinear-homogene Produktionsfunktion
x = v1v2
v2
v1
x = 30
x = 20
x = 10
0
2
4
6
8
© W. Klein - GS4 Oct. 11, 2005



Unterlinear-homogene-Produktionsfunktion
x = v1^(1/3)v2^(1/3)
v2
v1
x = 30
x = 20
x = 10
0
10
20
30
40
0
2
4
6
8
© W. Klein - GS6 Oct. 11, 2005

Die vier charakteristischen Formen der Faktorvariation sind:

- **isoquante Faktorvariation**
- **partielle Faktorvariation**
- **totale Faktorvariation**
- **isokline Faktorvariation**

Klassen substitutionaler Produktionsfunktionen

- **Klassische Produktionsfunktion (Typ TURGOT, SATO)**
- **Neo-klassische Produktionsfunktion (Typ COBB-DOUGLAS)**

Limitationale Produktionsfunktion

- **linear-limitationale Produktionsfunktion (Typ Walras - Leontief)**

Produktionstableau einer *substitutionalen* Produktionsfunktion				
v_1 \ v_2	0	2	4	6
0	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*10*	*14*	*16*
4	*0*	*14*	*20*	*24*
6	*0*	*16*	*24*	*30*

Produktionstableau einer *limitationalen* Produktionsfunktion				
v_1 \ v_2	0	2	4	6
0	*0*	*0*	*0*	*0*
2	*0*	*10*	*10*	*10*
4	*0*	*10*	*20*	*20*
6	*0*	*10*	*20*	*30*

Anne Robert Jacques Turgot, Baron de l'Aulne (1727 -1781)

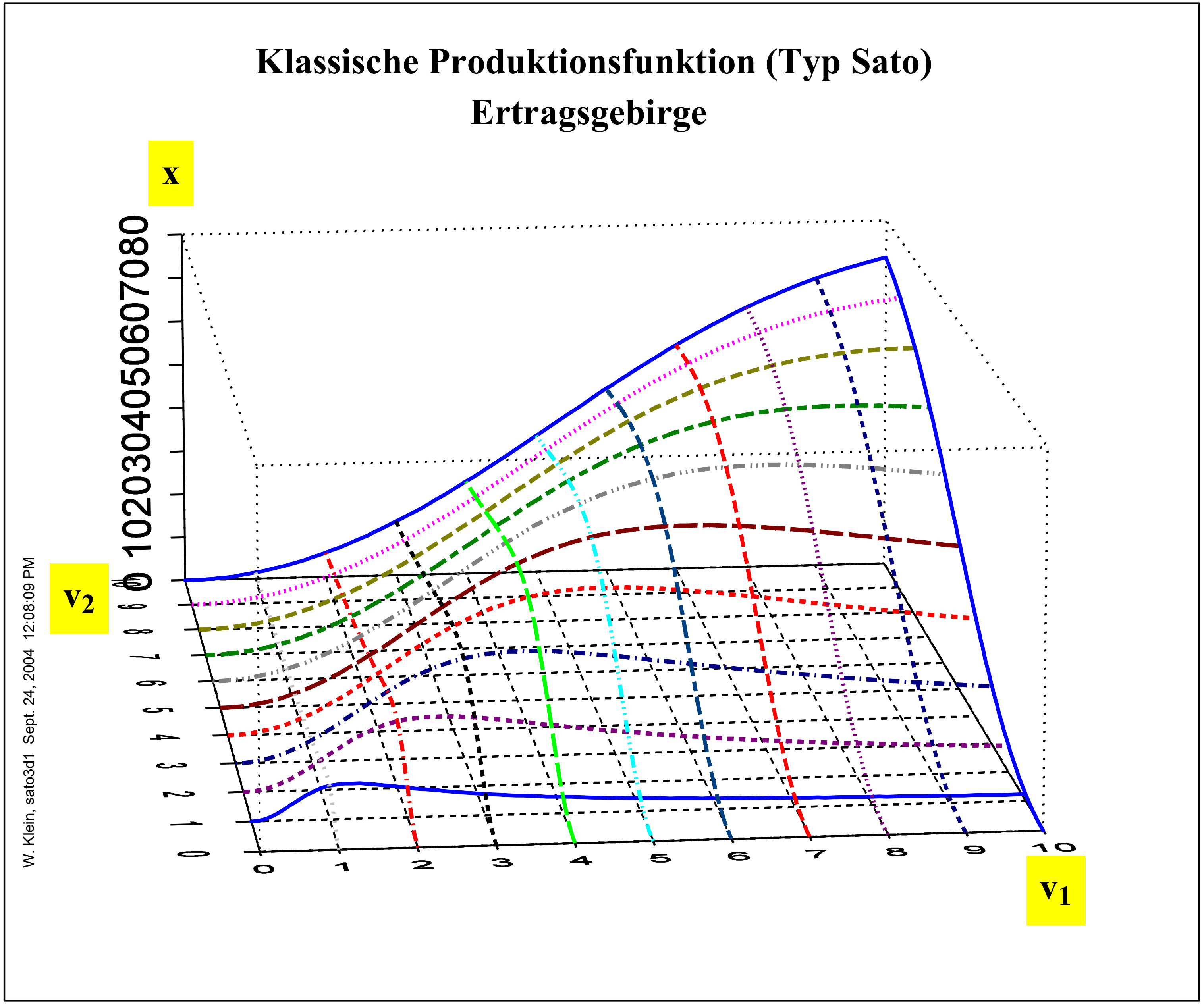
Numerische und graphische Darstellungsmöglichkeiten der Produktionsfunktionen

Die klassische Produktionsfunktion vom Typ TURGOT-SATO

$$(1)\ x = \frac{v_1^{\,2} \cdot v_2^{\,2}}{\alpha \cdot v_1^{\,3} + \beta \cdot v_2^{\,3}};\ \alpha \succ 0;\ \beta \succ 0$$

Produktionstableau einer SATO-Produktionsfunktion: α = β = 0,07

v1 \ v2 →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	1,43	5,67	12,52	21,48	31,75	42,29	52,12	60,47	66,93	71,43
9	0	1,59	6,28	13,78	23,35	33,87	44,08	52,89	59,68	64,29	66,93
8	0	1,78	7,03	15,27	25,40	35,88	45,21	52,40	57,14	59,68	60,47
7	0	2,03	7,98	17,03	27,52	37,39	45,08	50,00	52,40	52,89	52,12
6	0	2,37	9,18	19,05	29,39	37,70	42,86	45,08	45,21	44,08	42,29
5	0	2,83	10,74	21,15	30,23	35,71	37,70	37,39	35,88	33,87	31,75
4	0	3,52	12,70	22,61	28,57	30,23	29,39	27,52	25,40	23,35	21,48
3	0	4,59	14,69	21,43	22,61	21,15	19,05	17,03	15,27	13,78	12,52
2	0	6,35	14,29	14,69	12,70	10,74	9,18	7,98	7,03	6,28	5,67
1	0	7,14	6,35	4,59	3,52	2,83	2,37	2,03	1,78	1,59	1,43
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



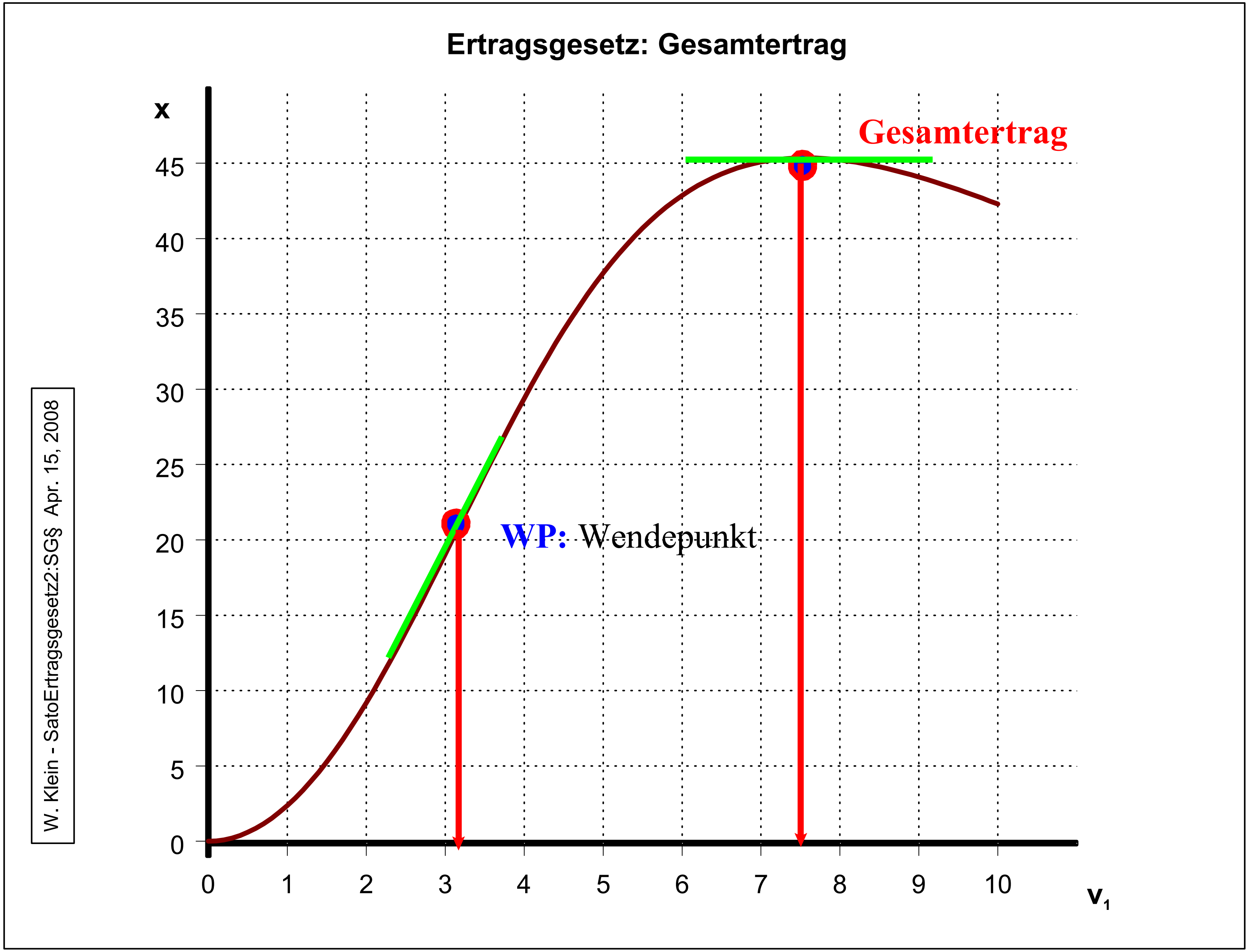
Klassische Produktionsfunktion (Typ Sato)
Ertragsgebirge
x
0 10 20 30 40 50 60 70 80
v2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
v1
W. Klein, sato3d1 Sept. 24, 2004 12:08:09 PM

Produktionstableau einer SATO-Produktionsfunktion: $\alpha = \beta = 0{,}07$

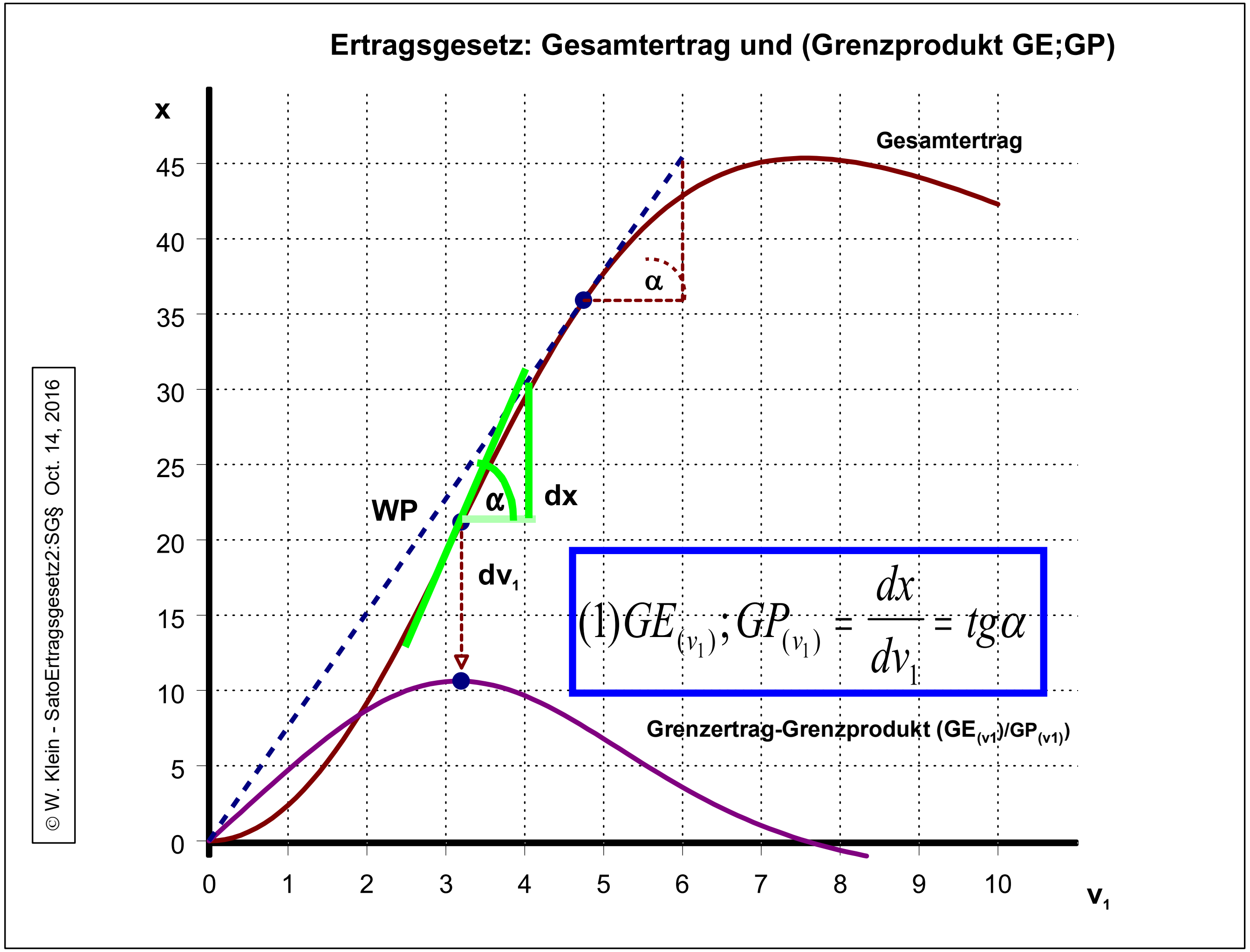
v1 \ v2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	1,43	5,67	12,52	21,48	31,75	42,29	52,12	60,47	66,93	71,43
9	0	1,59	6,28	13,78	23,35	33,87	44,08	52,89	59,68	64,29	66,93
8	0	1,78	7,03	15,27	25,40	35,88	45,21	52,40	57,14	59,68	60,47
7	0	2,03	7,98	17,03	27,52	37,39	45,08	50,00	52,40	52,89	52,12
6	0	2,37	9,18	19,05	29,39	37,70	42,86	45,08	45,21	44,08	42,29
5	0	2,83	10,74	21,15	30,23	35,71	37,70	37,39	35,88	33,87	31,75
4	0	3,52	12,70	22,61	28,57	30,23	29,39	27,52	25,40	23,35	21,48
3	0	4,59	14,69	21,43	22,61	21,15	19,05	17,03	15,27	13,78	12,52
2	0	6,35	14,29	14,69	12,70	10,74	9,18	7,98	7,03	6,28	5,67
1	0	7,14	6,35	4,59	3,52	2,83	2,37	2,03	1,78	1,59	1,43
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Partielle Faktorvariation

Klassische Produktionsfunktion - Ertragsgesetz

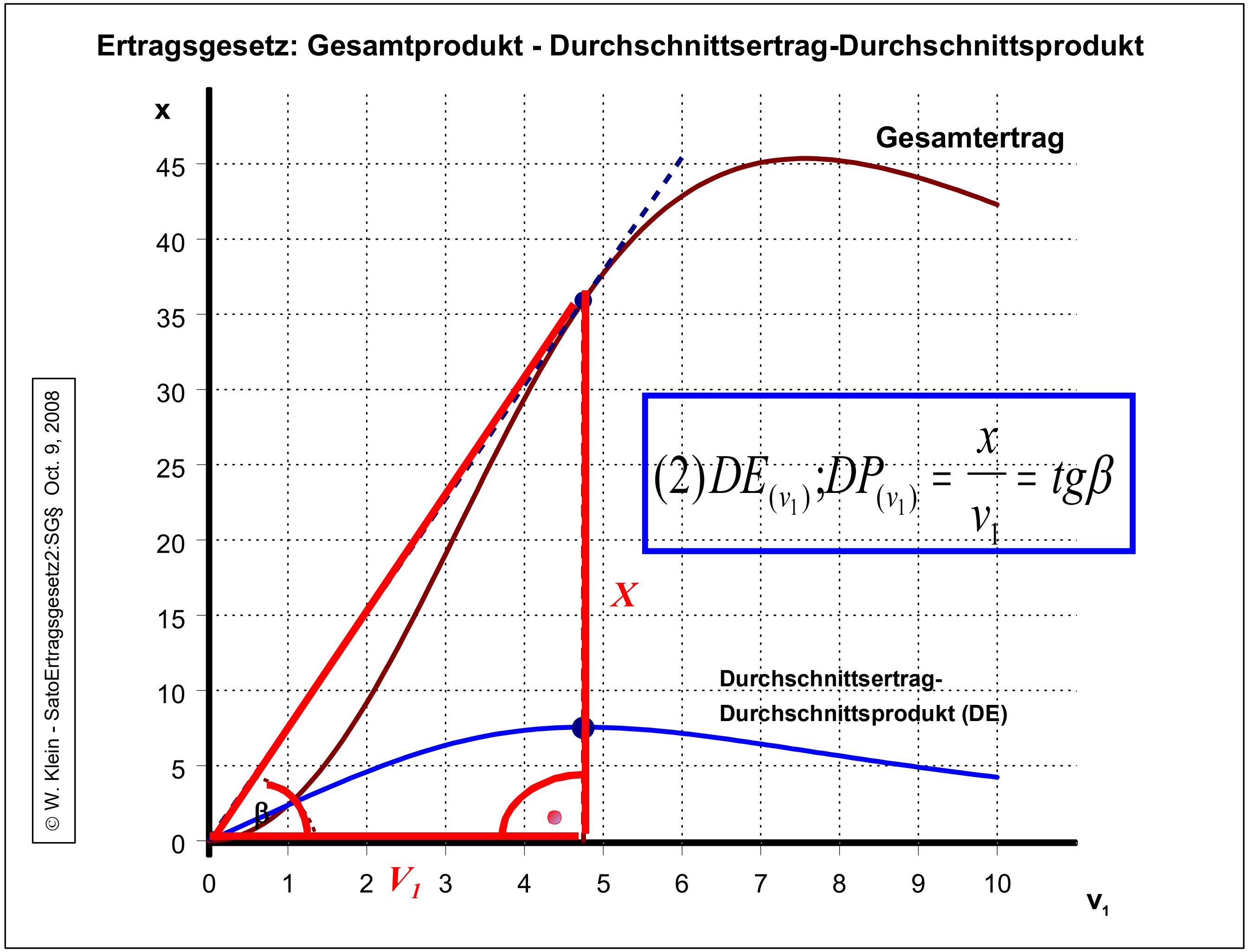


Klassische Produktionsfunktion - Ertragsgesetz



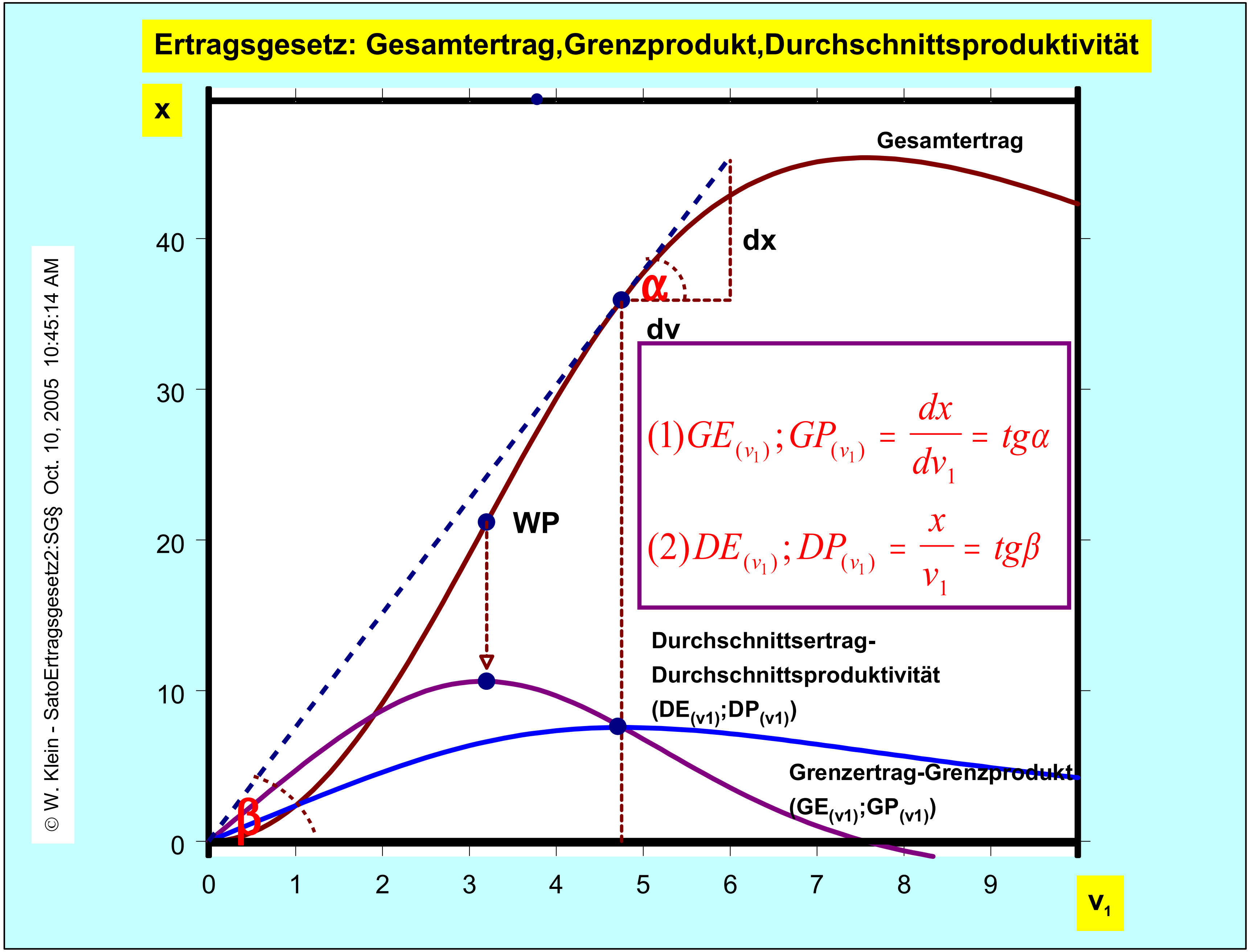
Der Grenzertrag ($GE_{(v1)}$) [das Grenzprodukt ($GP_{(v1)}$)] ist definiert als der Zuwachs zum Gesamtertrag (dx) auf Grund des Zuwachses des variablen Faktors (v_1) um eine weitere (infintesimal kleine) Einheit (dv_1)

Klassische Produktionsfunktion - Ertragsgesetz



Der **Durchschnittsertrag** (DE) (das **Durchschnittsprodukt (DP)**) ist definiert als der Quotient aus dem Gesamtertrag (x) und der jeweils zugehörigen Menge des variablen Faktors (v_1)

Klassische Produktionsfunktion - Ertragsgesetz



Produktionselastizität

Die Produktionselastizität beschreibt die *relative Änderung des Gesamtertrags* der Produktion (Output (x)) auf Grund der *relativen Mengenänderung* eines variablen Produktionsfaktors ($v_{(v)}$). Im “Ein Produkt - Zwei Faktoren - Modellfall” gilt somit

$$(1)\ x = f(v_{(v)})$$

wobei der andere Faktor als konstant und mit postivem Wert unterstellt wird. Die Produktionslastizität läßt sich demgemäß formulieren:

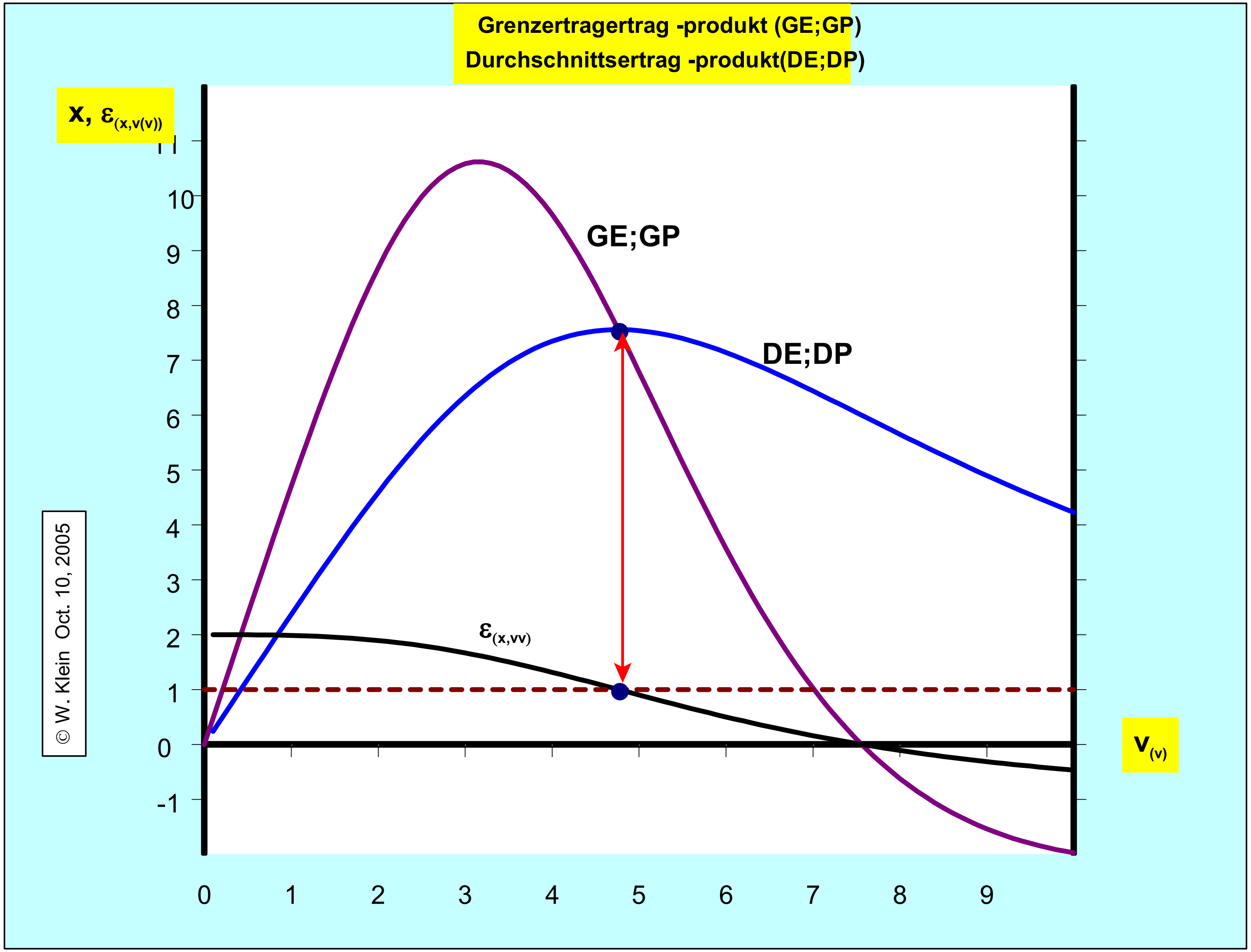
$$(2)\ \varepsilon_{(x,v_{(v)})} = \frac{relative\ \ddot{A}nderung\ von\ x}{relative\ \ddot{A}nderung\ von\ v_{(v)}}$$

Das heist konkret:

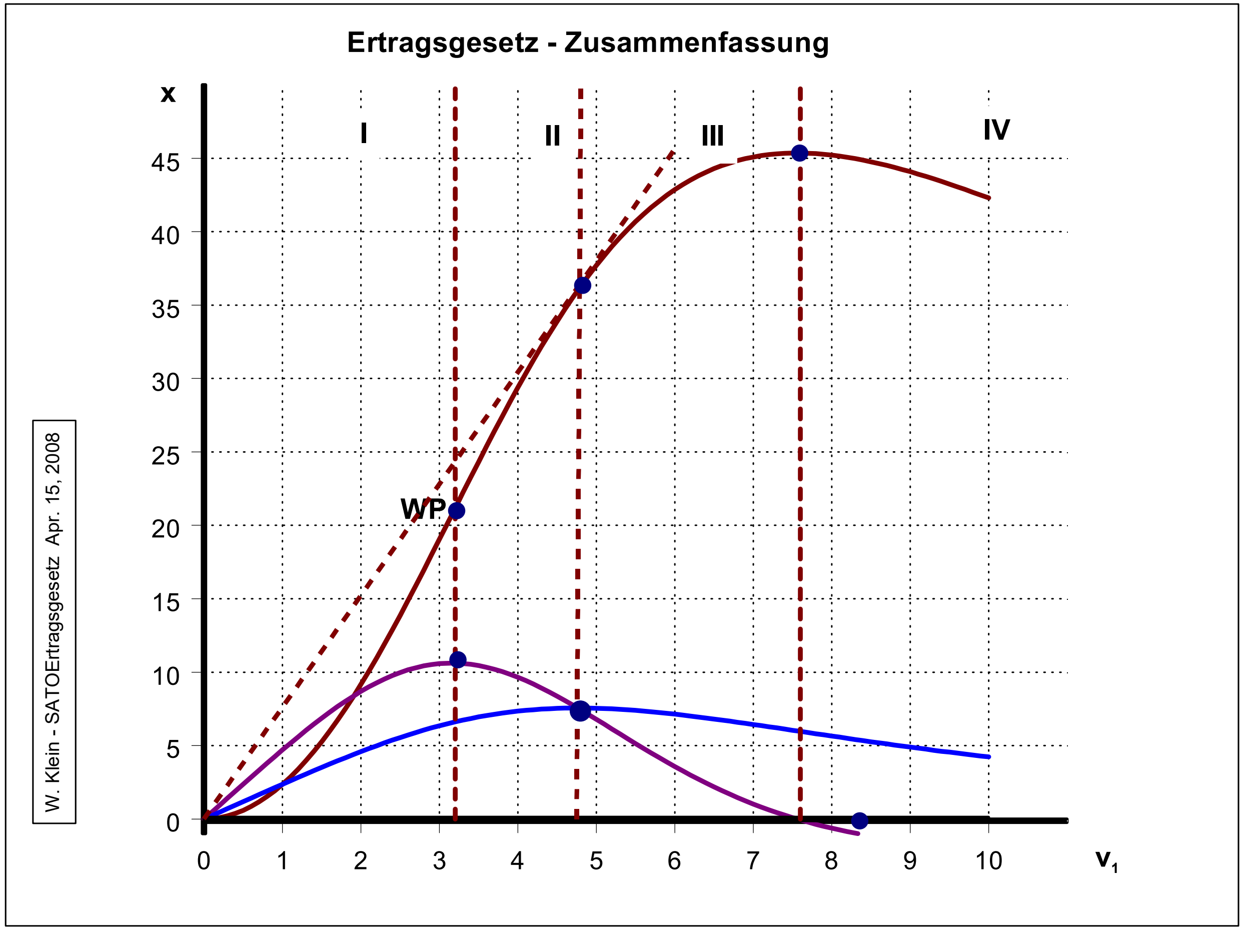
$$(3)\ \varepsilon_{(x,v_{(v)})} = \frac{v_{(v)}}{x} \cdot \frac{dx}{dv_{(v)}}$$

Nun entsprechen aber die Ausdrücke “$v_{(v)}/x$” dem Wert: “1/Durchschnittsertrag ($DE_{(v)}$)”;”1/Durchschnittsprodukt ($DP_{(v)}$)” und “$dx/dv_{(v)}$ “dem “Grenzertrag(Grenzprodukt:$GE_{(v)}$”;”Grenzprodukt $GP_{(v)}$”, so daß auch geschrieben werden kann:

$$\boxed{(4a)\ \varepsilon_{(x,v_{(v)})} = \frac{GE_{(v)}}{DE_{(v)}} \quad oder \quad (4b)\ \varepsilon_{(x,v_{(v)})} = \frac{GP_{(v)}}{DP_{(v)}}}$$



Grenzertragertrag -produkt (GE;GP)
Durchschnittsertrag -produkt(DE;DP)
x, ε(x,v(v))
GE;GP
DE;DP
ε(x,vv)
v(v)
© W. Klein Oct. 10, 2005



Verlaufsmuster im klassischen Ertragsgesetz				
	I	II	III	IV
Gesamtertrag	steigend	steigend	steigend	sinkend
Grenzertrag-Grenzprodukt	steigend	sinkend	sinkend	negativ
Durchschnittsertrag-Durchschnittsprodukt	steigend	steigend	sinkend	sinkend
Produktionselastizität	$\varepsilon > 1$	$\varepsilon > 1$	$0 < \varepsilon < 1$	$\varepsilon < 0$

Die neoklassische Produktionsfunktion vom Typ COBB-DOUGLAS

In allgemeiner Weise läßt sich die Cobb-Douglas Produktionsfunktion für den "Ein-Produkt - Zwei-Faktoren" Modellfall wie folgt beschreiben:

$$(1)\; x = a \cdot v_1^{\alpha} \cdot v_2^{\beta} \;\; mit\; a, \alpha, \beta \; > \; 0$$

Diese Funktion ist linear-homogen (r = 1), wenn gilt:

$$(2)\; \alpha + \beta = 1 \quad somit$$

$$(3)\; \beta = 1 - \alpha \quad so\; da\beta$$

$$(4)\; x = a \cdot v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(1-\alpha)}$$

$$(5)\; \lambda^r \cdot x = a \cdot (\lambda \cdot v_1)^{\alpha} \cdot (\lambda \cdot v_2)^{(1-\alpha)}$$

$$= a \cdot \lambda^{\alpha} \cdot v_1^{\alpha} \cdot \lambda^{(1-\alpha)} \cdot v_2^{(1-\alpha)}$$

$$= a \cdot \lambda^{\{\alpha+(1-\alpha)\}} \cdot (v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(1-\alpha)})$$

$$\lambda^1 \cdot x = a \cdot \lambda^1 \cdot (v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(1-\alpha)}),\; somit\; ist$$

$$(6)\; r = 1$$

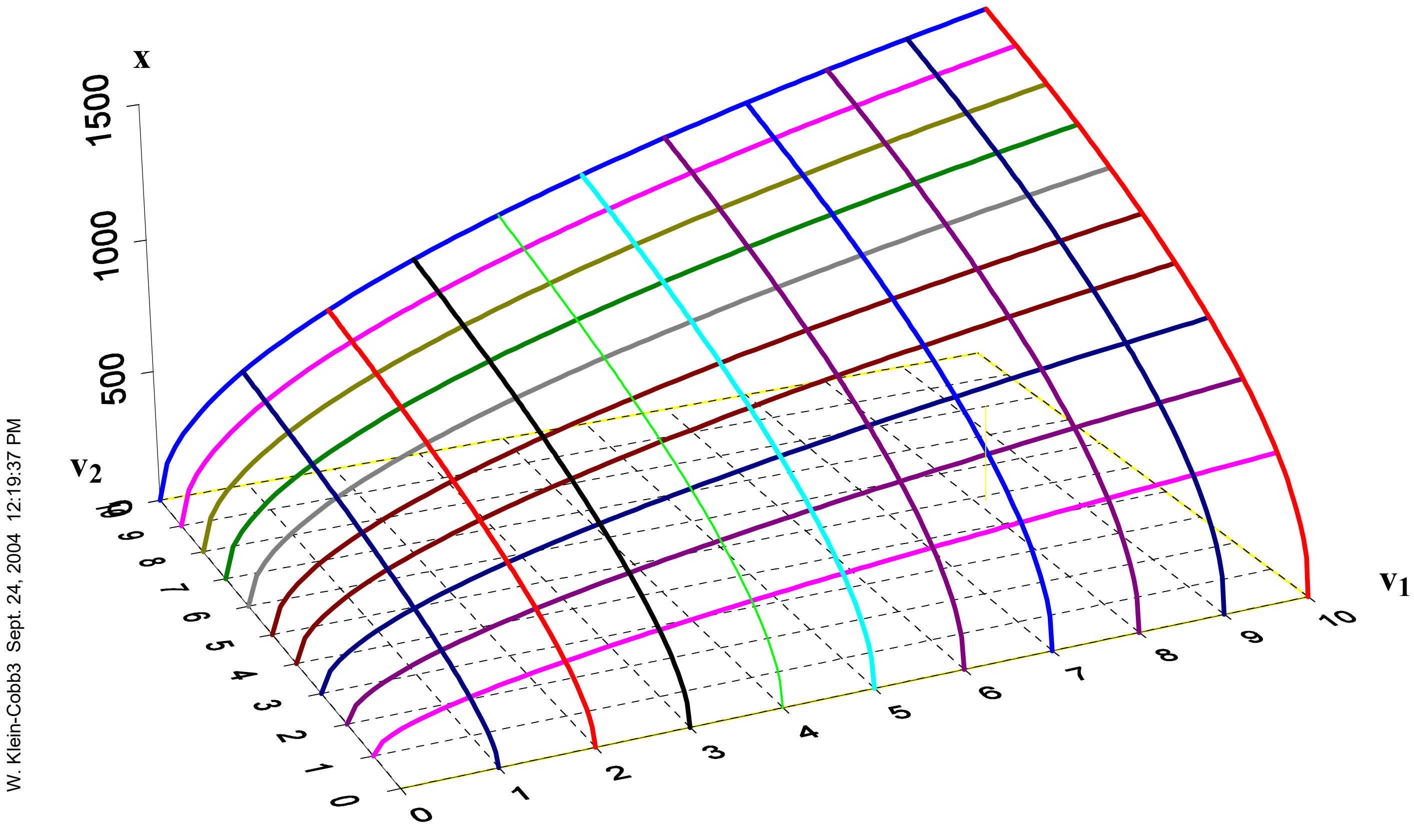
Numerische und graphische Darstellung der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

Die konkrete Cobb-Douglas Produktionsfunktion der folgenden Darstellungen lautet:

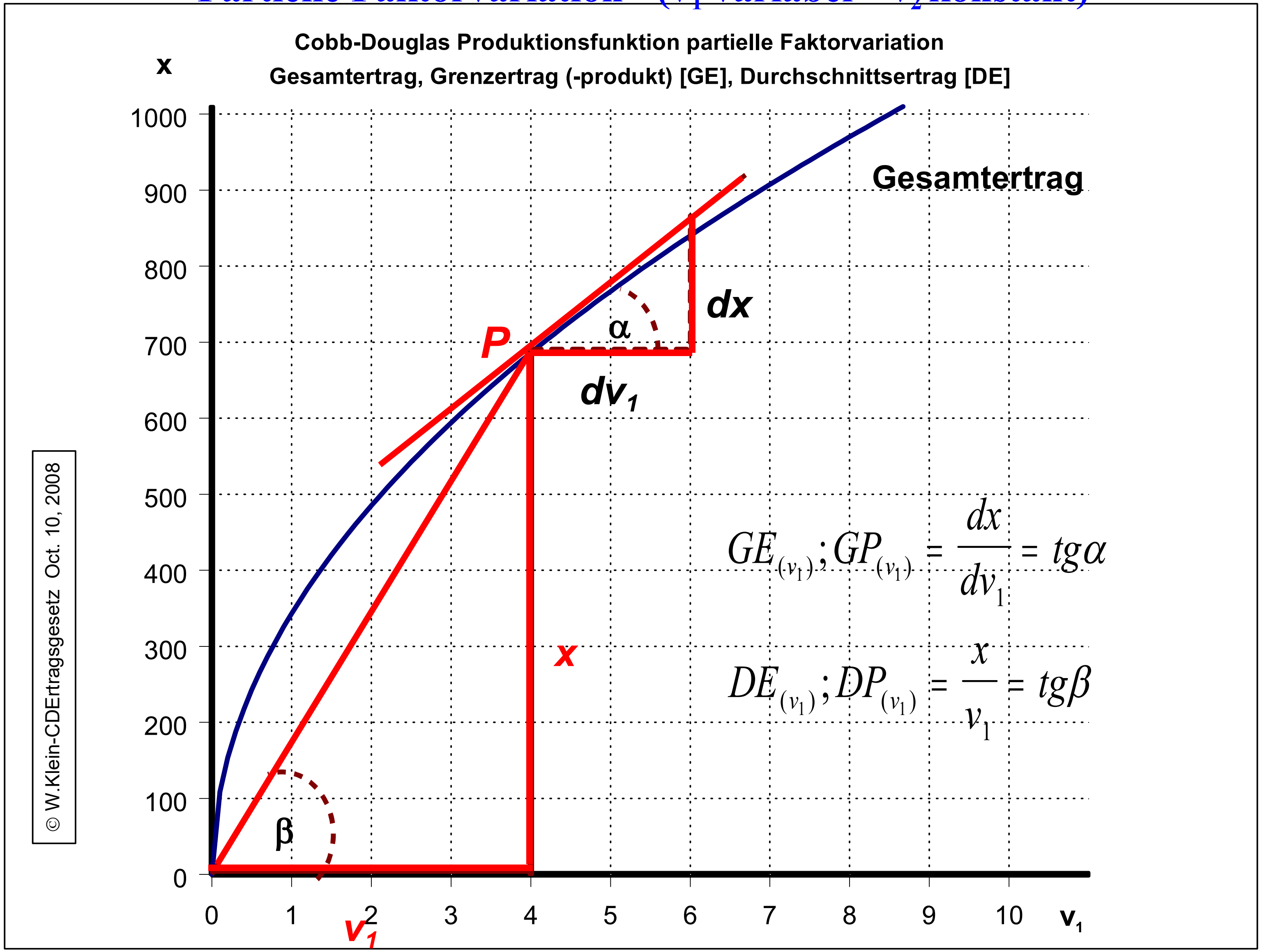
$$(1)\ x = 141 v_1^{\,0,5} v_2^{\,0,5}$$

Produktionstableau einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion											
v1 →											
v2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	445,88	630,57	772,29	891,76	997,02	1092,18	1179,69	1261,14	1337,64	1410,00
9	0	423,00	598,21	732,66	846,00	945,86	1036,13	1119,15	1196,42	1269,00	1337,64
8	0	398,81	564,00	690,76	797,62	891,76	976,88	1055,15	1128,00	1196,42	1261,14
7	0	373,05	527,57	646,14	746,10	834,17	913,78	987,00	1055,15	1119,15	1179,69
6	0	345,38	488,44	598,21	690,76	772,29	846,00	913,78	976,88	1036,13	1092,18
5	0	315,29	445,88	546,09	630,57	705,00	772,29	834,17	891,76	945,86	997,02
4	0	282,00	398,81	488,44	564,00	630,57	690,76	746,10	797,62	846,00	891,76
↑ 3	0	244,22	345,38	423,00	488,44	546,09	598,21	646,14	690,76	732,66	772,29
2	0	199,40	282,00	345,38	398,81	445,88	488,44	527,57	564,00	598,21	630,57
1	0	141,00	199,40	244,22	282,00	315,29	345,38	373,05	398,81	423,00	445,88
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion
Ertragsgebirge



- Partielle Faktorvariation - (v_1 variabel - v_2 konstant)



Gesamtertrag, Grenzertrag (Grenzprodukt), Durschnittsertrag (Durchschnittsproduktivität) einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion bei partieller Faktorvariation - Produktionselastizitäten

Die allgemeine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion weist hinsichtlich des *Grenzertrags, Grenzprodukts* der beiden Produktionsfaktoren (v_1; v_2) ($GE,GP_{v1,2}$) folgende Werte auf:

$$(1)\ x = v_1^{\alpha} \cdot v_2^{\beta}$$

Grenzprodukt (Grenzertrag) des Faktors (v_1): ***GE,GP*** $_{(v1)}$

$$(2) GE_{(v_1)}, GP_{(v_1)} = \frac{\partial x}{\partial v_1} = \alpha \cdot v_1^{(\alpha-1)} \cdot v_2^{\beta}$$

Grenzprodukt (Grenzertrag) des Faktors (v_2): ***GE,GP*** $_{(v2)}$

$$(3)\ GE_{(v_2)}, GP_{(v_2)} = \frac{\partial x}{\partial v_2} = \beta \cdot v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(\beta-1)}$$

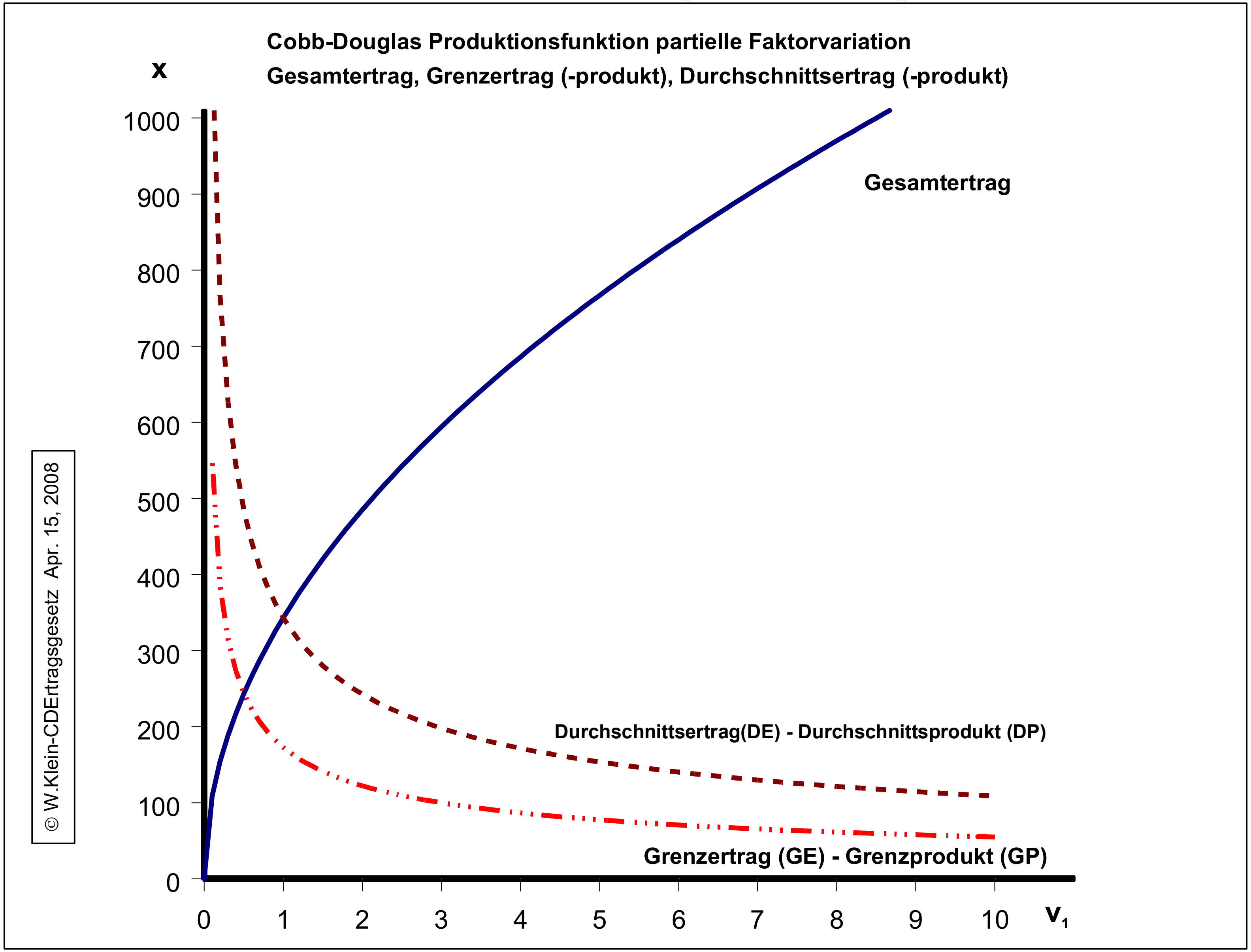
Durchschnittsprodukt (Durchschnittsertrag) des Faktors (v_1) ***DE,DP*** $_{(v1)}$

$$(4)\ DE_{(v_1)}, DP_{(v_1)} = \frac{x}{v_1} = \frac{v_1^{\alpha} \cdot v_2^{\beta}}{v_1} = v_1^{(\alpha-1)} \cdot v_2^{\beta}$$

Durchschnittsprodukt (Durchschnittsertrag) des Faktors (v_2) ***DE,DP*** $_{(v2)}$

$$(5)\ DE_{(v_2)}, DP_{(v_2)} = \frac{x}{v_2} = \frac{v_1^{\alpha} \cdot v_2^{\beta}}{v_2} = v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(\beta-1)}$$

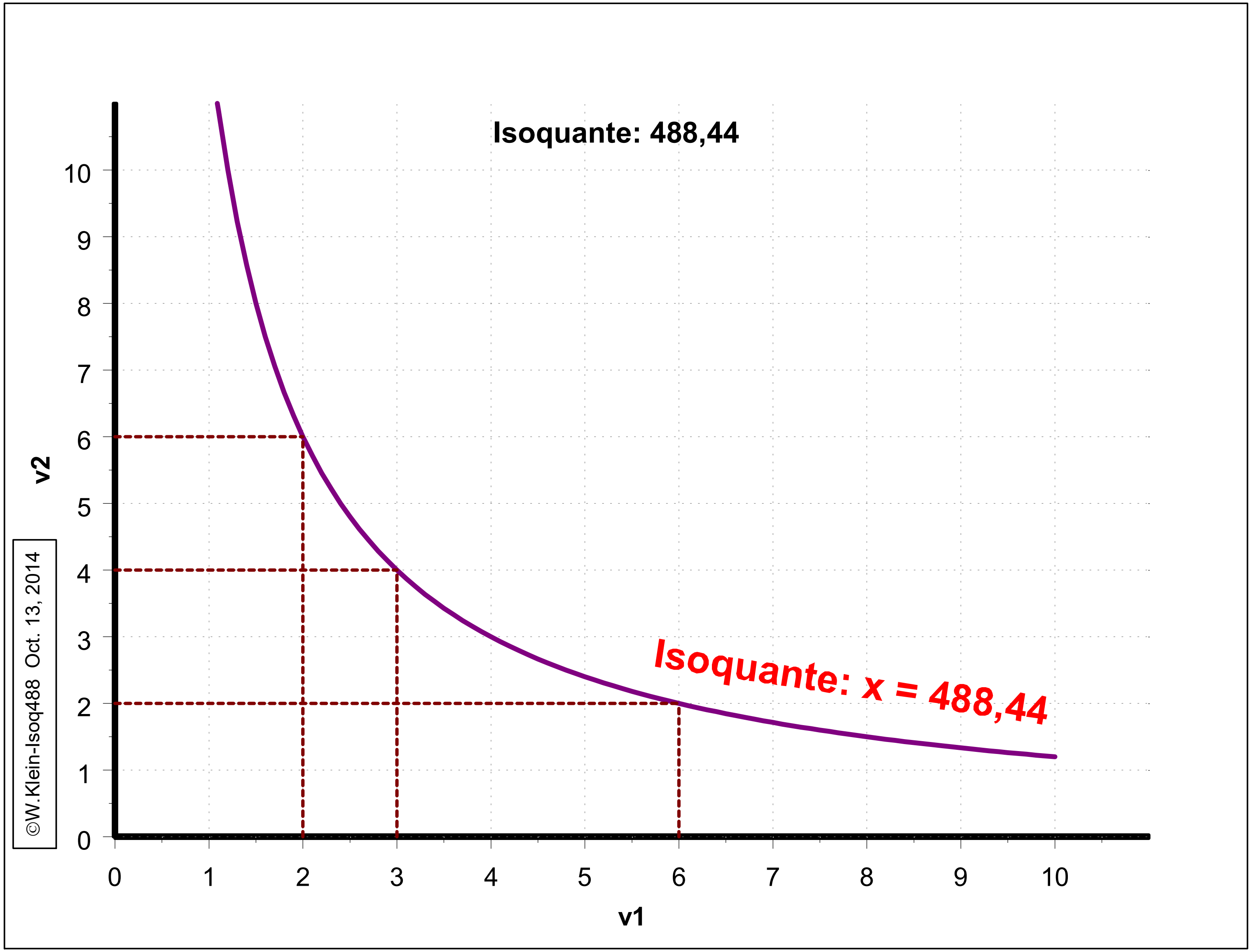
- Partielle Faktorvariation - (v_1 variabel - v_2 konstant)



Siehe Folie 24

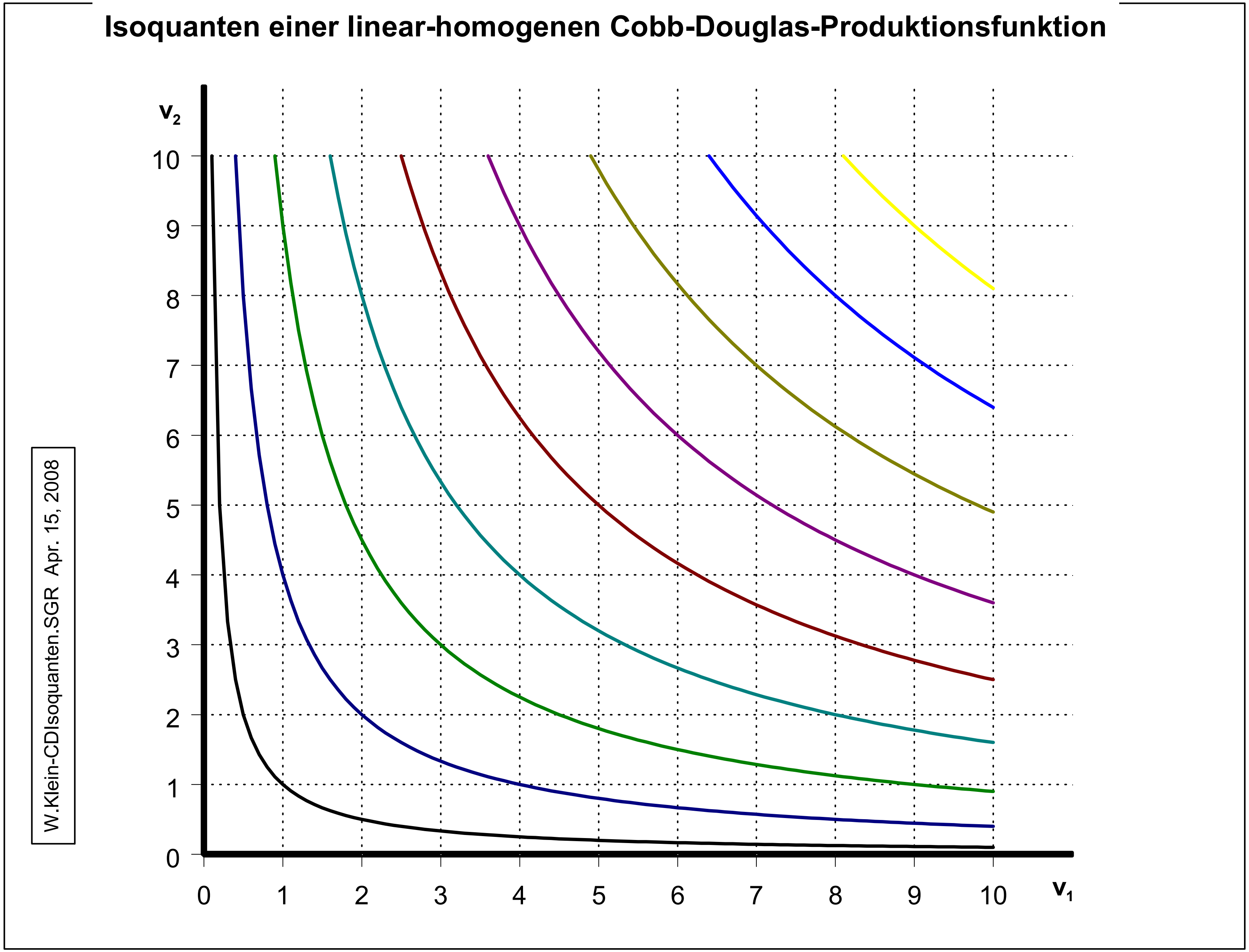
Produktionstableau einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion											
v1											
v2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	445,88	630,57	772,29	891,76	997,02	1092,18	1179,69	1261,14	1337,64	1410,00
9	0	423,00	598,21	732,66	846,00	945,86	1036,13	1119,15	1196,42	1269,00	1337,64
8	0	398,81	564,00	690,76	797,62	891,76	976,88	1055,15	1128,00	1196,42	1261,14
7	0	373,05	527,57	646,14	746,10	834,17	913,78	987,00	1055,15	1119,15	1179,69
6	0	345,38	488,44	598,21	690,76	772,29	846,00	913,78	976,88	1036,13	1092,18
5	0	315,29	445,88	546,09	630,57	705,00	772,29	834,17	891,76	945,86	997,02
4	0	282,00	398,81	488,44	564,00	630,57	690,76	746,10	797,62	846,00	891,76
3	0	244,22	345,38	423,00	488,44	546,09	598,21	646,14	690,76	732,66	772,29
2	0	199,40	282,00	345,38	398,81	445,88	488,44	527,57	564,00	598,21	630,57
1	0	141,00	199,40	244,22	282,00	315,29	345,38	373,05	398,81	423,00	445,88
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Isoquante Faktorvariation



Eine Isoquante ist der geometrische Ort aller Mengenkombinationen zweier Produktionsfaktoren (v_1 und v_2), die den gleichen Gesamtertrag (x) erwirtschaften.

Isoquante Faktorvariation



Produktionselastizitäten der Produktionsfaktoren (v_1; v_2) einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion.

Die Produktionselastizität ist definiert als

$$(1)\ \varepsilon_{P_{[v(1,2)]}} = \frac{v_{(1,2)}}{x} \cdot \frac{dx}{dv_{(1,2)}} = \frac{GP_{(1,2)}}{DE_{(1,2)}}$$

Für die allgemeine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Gestalt

$$(2)\ x = a \cdot v_1^{\alpha} \cdot v_2^{\beta}$$

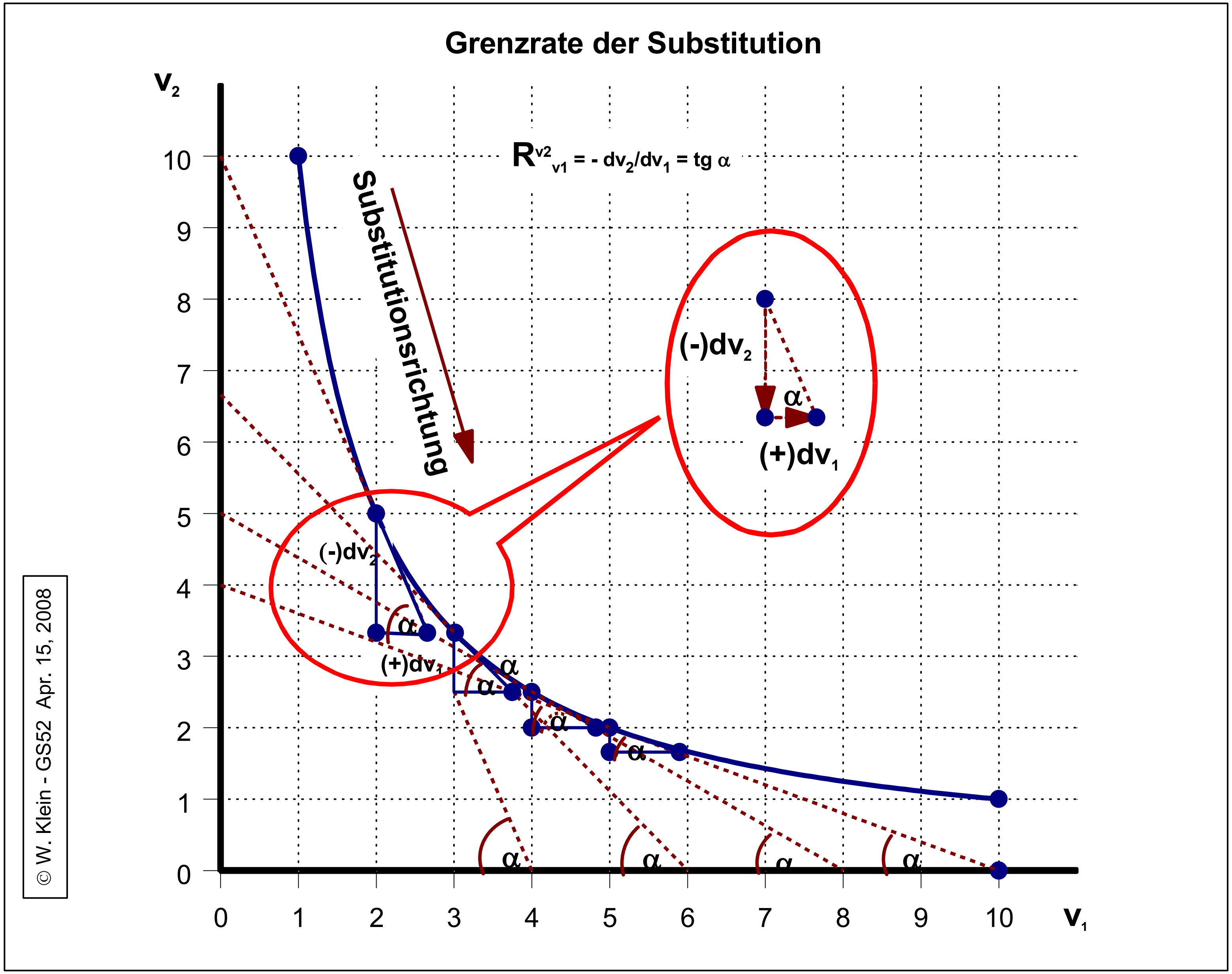
ergibt sich somit für die *Produktionselastizität des Faktors (v_1)*

$$(3)\ \varepsilon_{P(v_1)} = \frac{v_1}{x} \cdot \frac{dx}{dv_1} = \frac{GP_1}{DE_1} = \frac{a \cdot \alpha \cdot v_1^{(\alpha-1)} \cdot v_2^{\beta}}{a \cdot v_1^{(1-\alpha)} \cdot v_2^{\beta}} = \boxed{\alpha}$$

und für die *Produktionselastizität des Faktors (v_2)*

$$(4)\ \varepsilon_{P_{(v_2)}} = \frac{v_2}{x} \cdot \frac{dx}{dv_2} = \frac{GP_2}{DE_2} = \frac{a \cdot \beta \cdot v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(\beta-1)}}{a \cdot v_1^{\alpha} \cdot v_2^{(1-\beta)}} = \boxed{\beta}$$

Kap 4 S. 30


Grenzrate der Substitution
v_2
$R^{v2}_{v1} = - dv_2/dv_1 = tg\ \alpha$
Substitutionsrichtung
(-)dv_2
(+)dv_1
α
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
v_1

Substitutionselastizität

Die Substitutionselastizität mißt in Form einer Punktelastizität den Funktionalzusammenhang zwischen der relativenVeränderung des Faktoreinsatzverhältnisses (v_1/v_2)

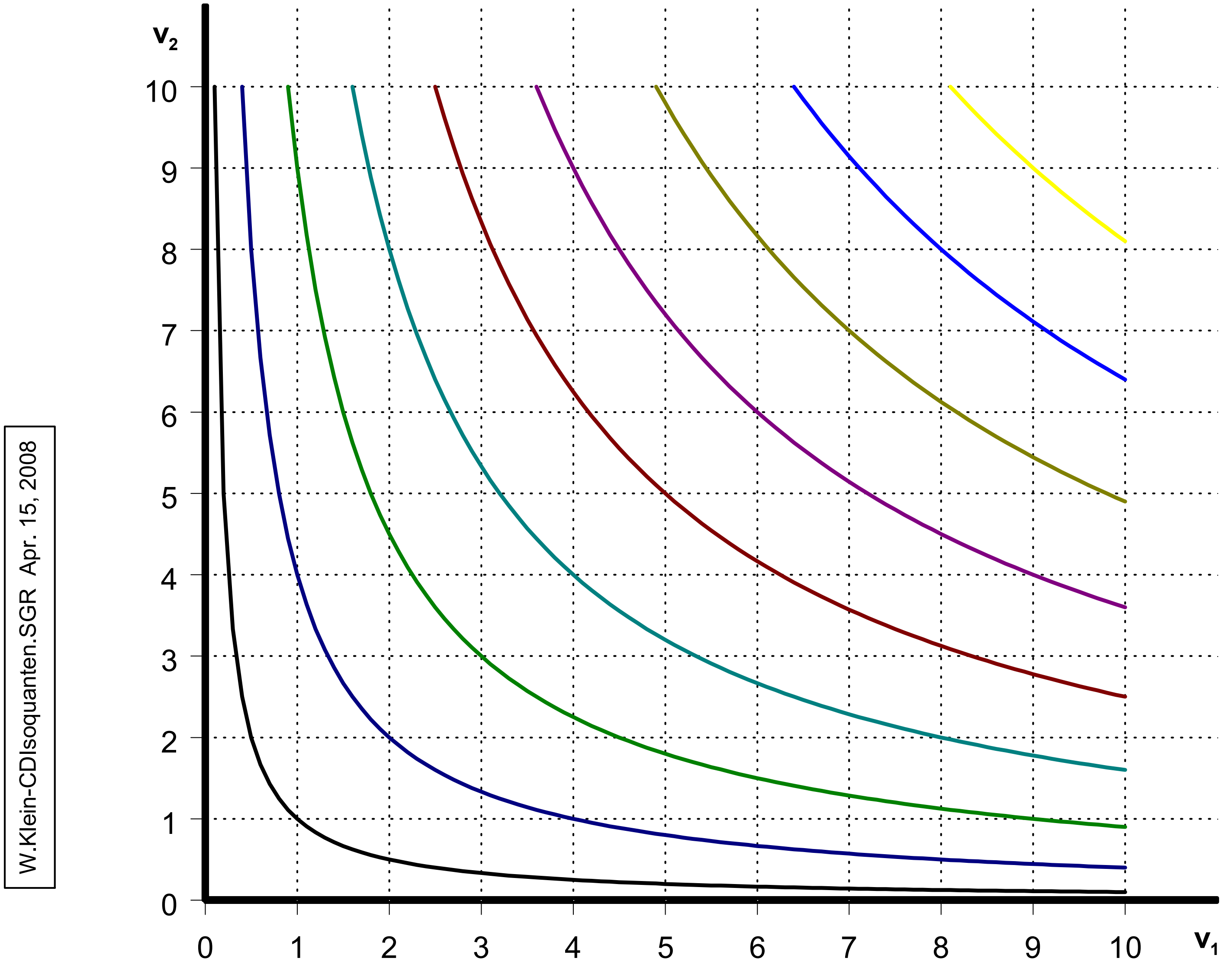
$$(1)\ \frac{v_1}{v_2} = f(R_2^1)$$

Somit ist die Skalenelastizität($\epsilon_{(v1/v2;R^1_2)}$)

$$(2)\varepsilon_{(\frac{v_1}{v_2},R_2^1)} = \frac{\textit{relative Änderung des Faktoreinsatzverhältnisses } (\frac{v_1}{v_2})}{\textit{relative Änderung der Grenzrate der Substitution } (R_2^1)}$$

$$(3)\ \varepsilon_{(\frac{v_1}{v_2},R_2^1)} = \frac{R_2^1}{\frac{v_1}{v_2}} \cdot \frac{d(\frac{v_1}{v_2})}{d(R_2^1)}$$

Isoquanten einer linear-homogenen Cobb-Douglas-Produktionsfunktion



jetzt zurück zu Dia 5

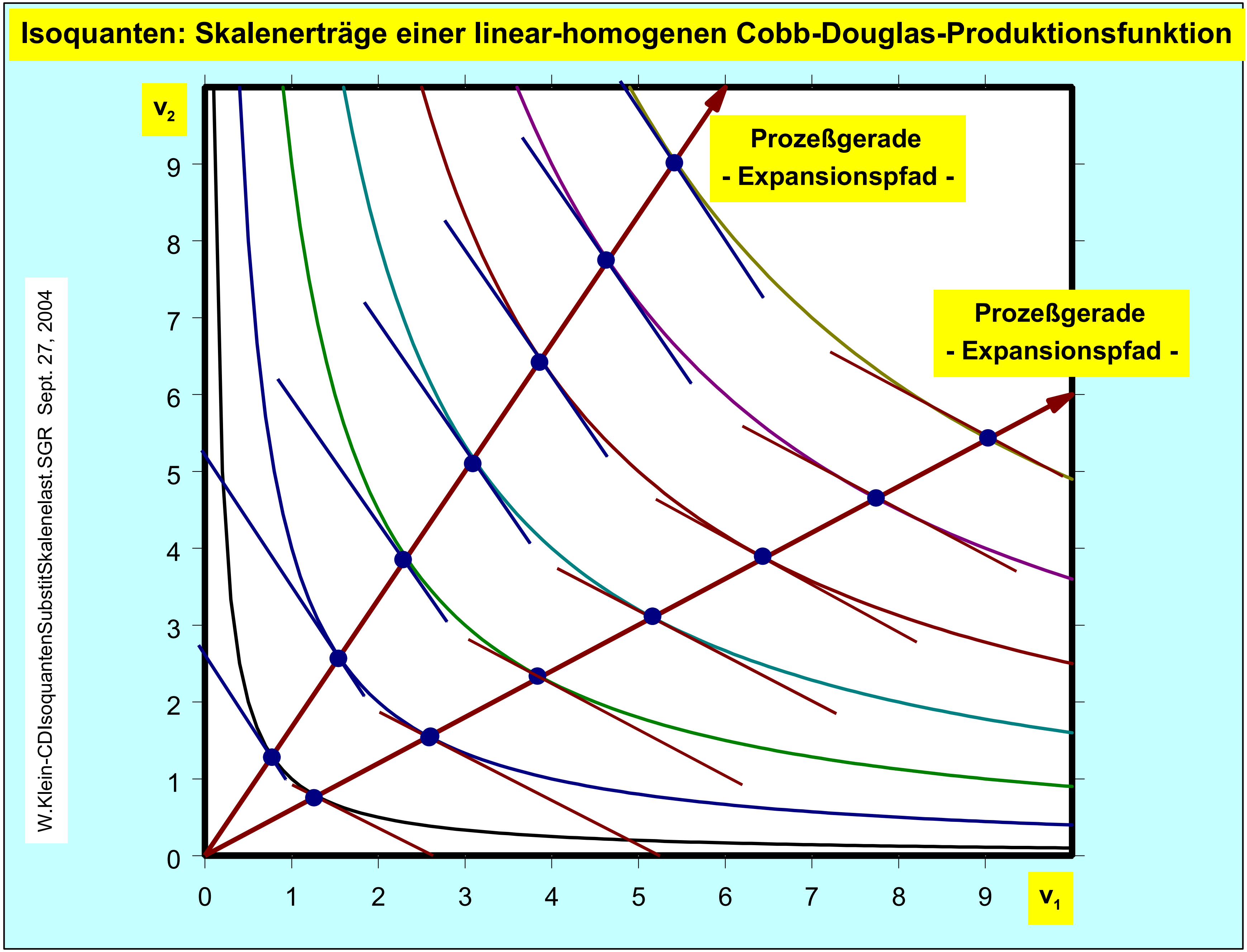
Eigenschaften von Isoquanten - der Isoquantenschar

- **Je weiter eine Isoquante vom Koordinatenursprung entfernt liegt, desto höher ist das Produktionsniveau (die Output-Menge (x))**

- **Isoquanten können sich wegen der diesen zugrunde liegenden Produktionsfunktion nicht schneiden**

- **Jeder Punkt auf einer gegebenen Isoquante weist eine negative Steigung auf (Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution)**

- **Isoquanten sind konvex gekrümmt.**


Isoquanten: Skalenerträge einer linear-homogenen Cobb-Douglas-Produktionsfunktion
v_2
Prozeßgerade
- Expansionspfad -
Prozeßgerade
- Expansionspfad -
W.Klein-CDIsoquantenSubstitSkalenelast.SGR Sept. 27, 2004
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
v_1

Skalenelastizität

Die Skalenelastizität mißt in Form einer Punktelastizität die relative Veränderung der Produktmenge (des Outputs) (x) auf Grund einer relativen Veränderung des Faktoreinsatzniveaus (λ). Der entsprechende Funktionalzusammenhang lautet demgemäß:

$$\boxed{(1)\ x = f(\lambda)}$$

Somit ist die Skalenelastizität ($\epsilon_{(x,\lambda)}$) definiert als

$$\boxed{(2)\ \varepsilon_{(x,\lambda)} = \frac{\textit{realtive Veränderung der Produktmenge}\ (x)}{\textit{relative Veränderung des Faktoreinsatzniveaus}\ (\lambda)}}$$

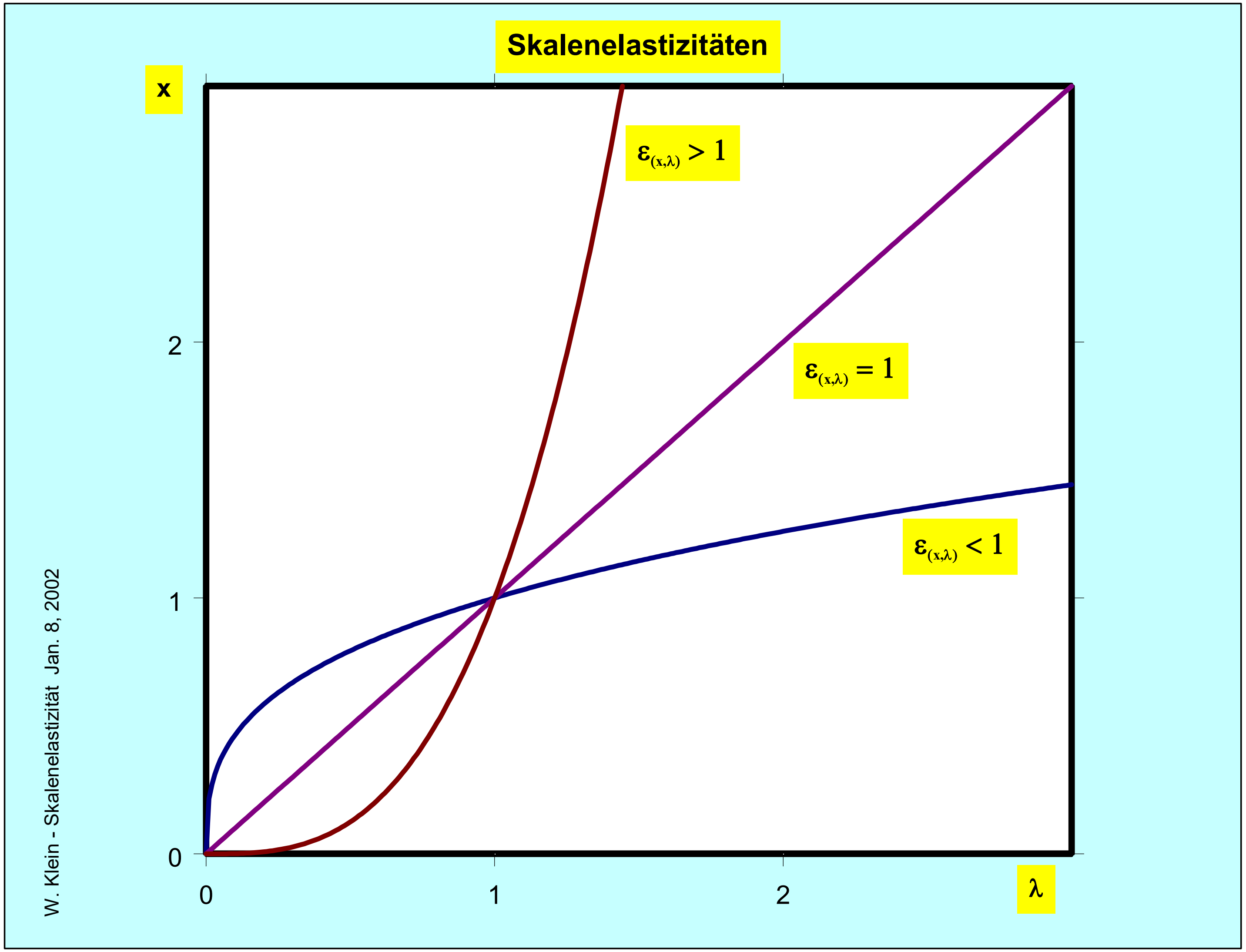
$$\boxed{(3)\ \varepsilon_{(x,\lambda)} = \frac{\lambda}{x} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}$$

Fall 1: $\epsilon_{(x,\lambda)} > 1$ - steigende Skalenerträge (inreasing returs to scale)

Fall 2: $\epsilon_{(x,\lambda)} = 1$ - konstante Skalenerträge (constant returns to scale)

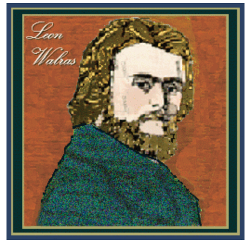
Fall 3: $0 < \epsilon_{(x,\lambda)} < 1$ - abnehmende Skalenertäge (decreasing returns to scale)

Graphische Interpretation der Skalenelastizität



Limitationale Produktionsfunktion (WALRAS-LEONTIEF-Produktionsfunktion)

Diese ist aus technisch-physikalischen Gründen gekennzeichnet durch ein fest vorgegebenes Faktor-Einsatz-Mengenverhältnis. Für den "Ein-Produkt -Zwei-Faktoren-Fall" gilt somit:



Leon Walras
1834 - 1910

$$(1)\ x = f(v_1, v_2)\ \textit{konkret}$$

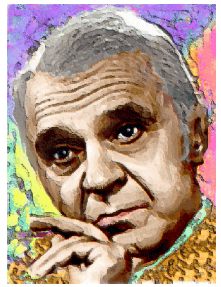
$$(2)\ x = \min\{\frac{v_1}{a_1}; \frac{v_2}{a_2}\}\ \textit{mit}\ a_1, a_2 > 0\ \textit{und}$$

$$(3)\ a_1 = \frac{v_1}{x}\ \textit{und}\ (4)\ a_2 = \frac{v_2}{x}\ \ \textit{den jeweiligen Produktionskoeffizienten. Da}\ a_1\ \textit{und}\ a_2 = \textit{konstant}$$

$$(5)\ v_1 = a_1 x\ \textit{und}\ (6)\ v_2 = a_2 x\ \ \textit{Aufgelöst nach x und Gleichsetzen erhält man}$$

$$(6)\ \frac{v_1}{a_1} = \frac{v_2}{a_2}\ \textit{woraus folgt}$$

$$(7)\ v_2 = \frac{a_2}{a_1} \cdot v_1.\ \textit{Explizite Gleichung des Expansionspfades}$$

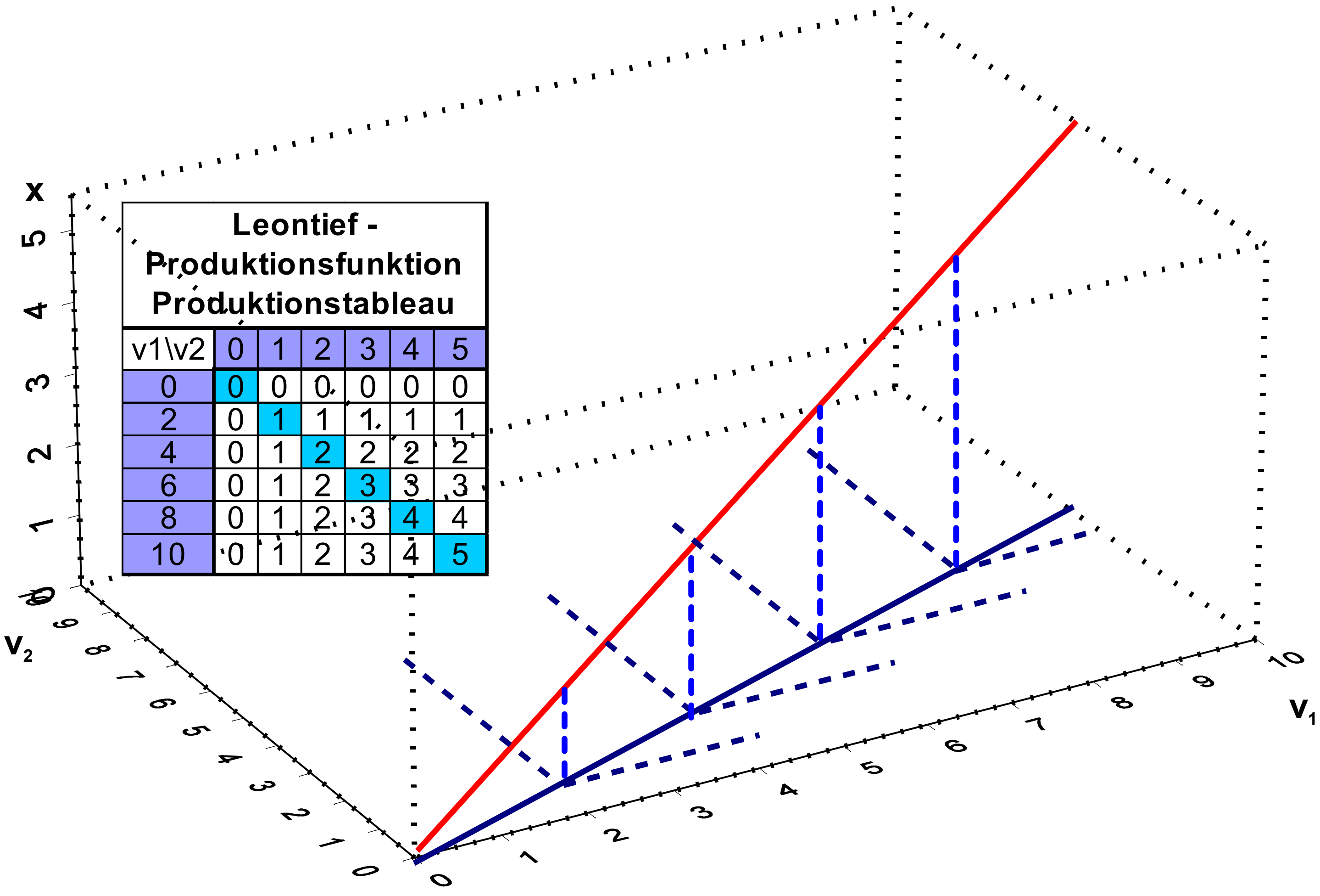


Wassily Leontief
1905 - 1999

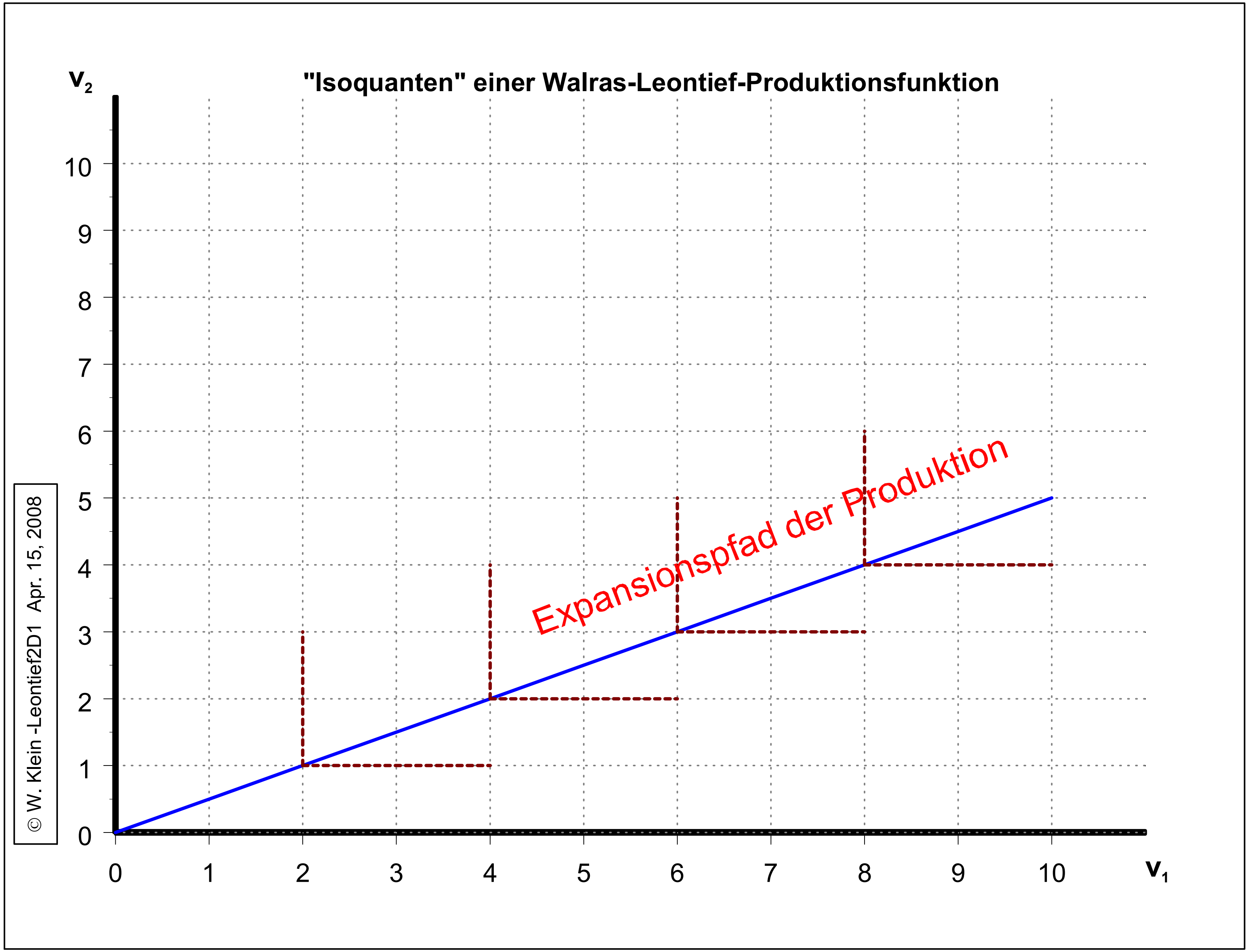
Beispiel:
Aus der Produktionsfunktion für "Wasser" (H_2O) ergibt sich demgemäß:
a_1 = 2 H; a_2 = 1 O, d.h. explizit:

$$(8)\ v_2 = \tfrac{1}{2} v_1$$

Limitationale Produktionsfunktion - Typ WALRAS-LEONTIEF



v1\v2	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	1	1
4	0	1	2	2	2	2
6	0	1	2	3	3	3
8	0	1	2	3	4	4
10	0	1	2	3	4	5


"Isoquanten" einer Walras-Leontief-Produktionsfunktion
v_2
v_1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Expansionspfad der Produktion
© W. Klein -Leontief2D1 Apr. 15, 2008

Bereiche der Produktions-, Kosten- und Absatzplanung

Gütererzeugung	Kosten (K) der Gütererzeugung	Güterabsatz Umsatz/Erlös (E)
$(v_1,\ldots\ldots v_n)$	$v_1 \cdot p_{v_1}$	$x_1 \cdot p_1$
Produktionsfaktoren (Input)	$+$	$+$
	$.$	$.$
	$.$	$.$
	$+$	$+$
$(x_1,\ldots\ldots x_n)$	$v_n \cdot p_{v_n}$	$x_n \cdot p_n$
Güter (Output)	$K = \sum_1^n v_i \cdot p_{v_i}$	$E = \sum_1^n x_i \cdot p_i$

Gewinn (G): G = E - K

3.1.2 Kostentheorie

- **Kosten sind die mit Bezug auf die produzierte Gütermenge die mit ihren Preisen bewerteten Aufwendungen an Produktionsfaktoren. Für den "Ein-Produkt-" (x) - "Mehr-Faktoren-Fall" (v_1 ,..., v_n) ergeben sich somit die folgenden Gesamtkosten (K), wenn die Preise der Produktionsafktoren (v_1, ..., v_n) lauten (p_{v1}, ..., p_{vn})**

$$(1)\ K = v_1 \cdot p_{v1} + \ldots + v_n \cdot p_{vn} \quad oder$$

$$(2)\ K = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot p_{vi}$$

- **Im Standardfall: "Ein Produkt (x) - Zwei Faktoren (v_1, v_2)" lautet die Funktion der Gesamtkosten dann:**

$$(3)\ K = v_1 \cdot p_{v1} + v_2 \cdot p_{v2}$$

Bei partieller Faktorvariation (ein Faktor fix [v_f] - ein Faktor variabel [v_v]) ergeben sich die Gesamtkosten (K) als Summe der variablen Kosten (K_v) und der fixen Kosten (K_f),also

$$(5)\ K = K_v + K_f \quad wobei$$

$$(6)\ K_v = v_v \cdot p_{v_v} \quad und$$

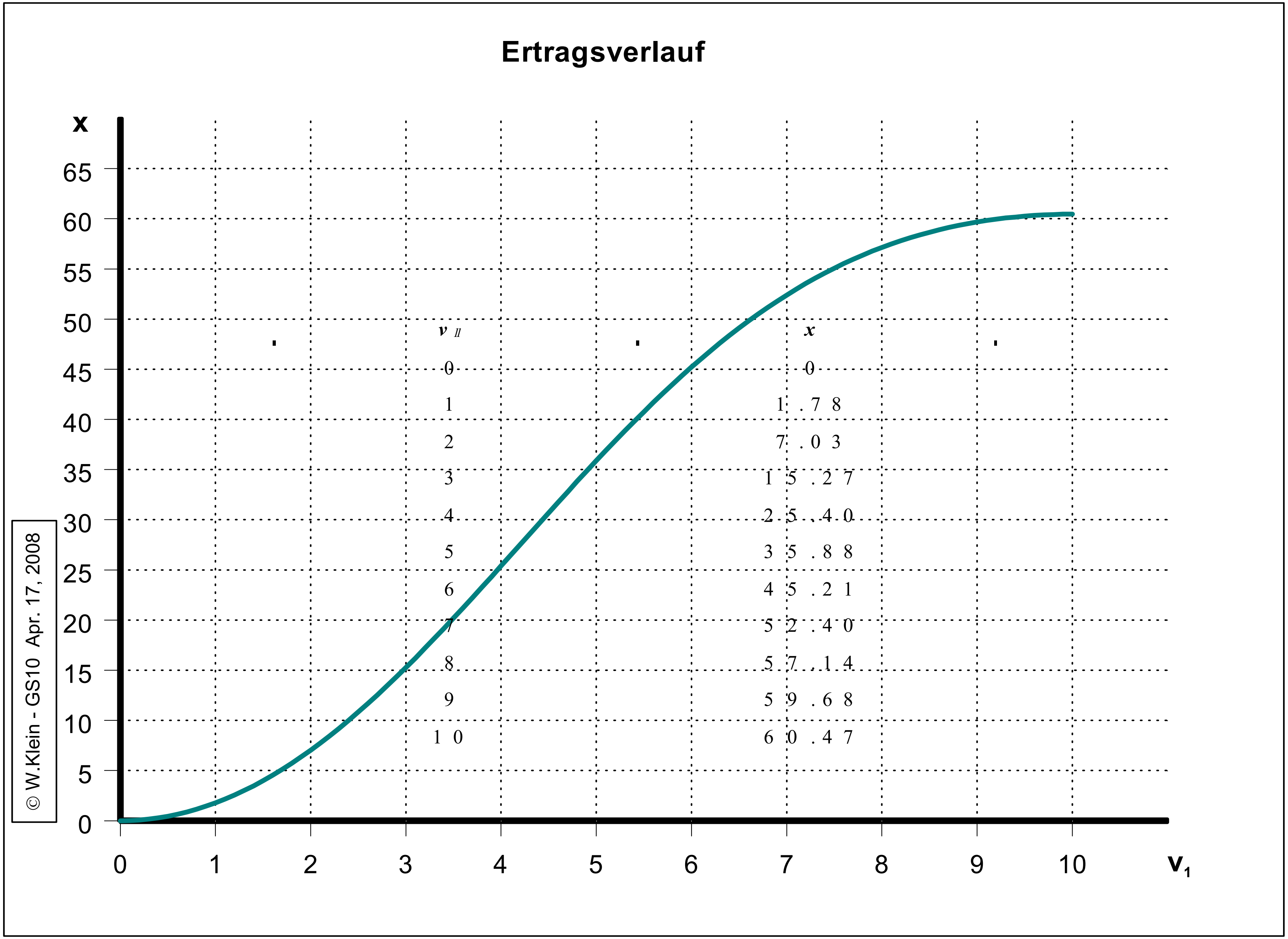
$$(7)\ K_f = v_f \cdot p_{v_f}$$

Produktionstableau einer SATO-Produktionsfunktion: $\alpha = \beta = 0{,}07$

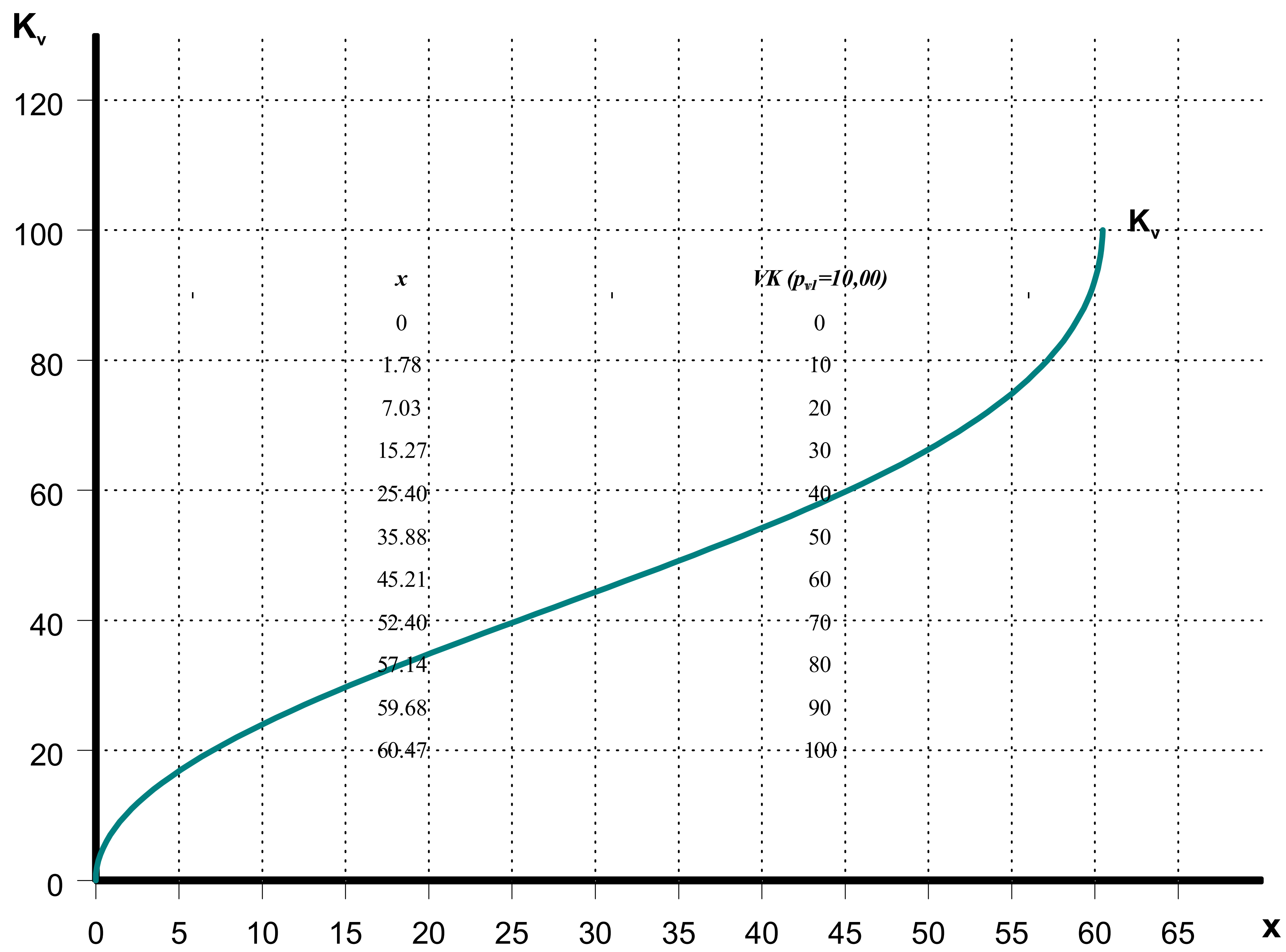
v2 →

v1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	0	1,43	5,67	12,52	21,48	31,75	42,29	52,12	60,47	66,93	71,43
9	0	1,59	6,28	13,78	23,35	33,87	44,08	52,89	59,68	64,29	66,93
8	0	1,78	7,03	15,27	25,40	35,88	45,21	52,40	57,14	59,68	60,47
7	0	2,03	7,98	17,03	27,52	37,39	45,08	50,00	52,40	52,89	52,12
6	0	2,37	9,18	19,05	29,39	37,70	42,86	45,08	45,21	44,08	42,29
5	0	2,83	10,74	21,15	30,23	35,71	37,70	37,39	35,88	33,87	31,75
4	0	3,52	12,70	22,61	28,57	30,23	29,39	27,52	25,40	23,35	21,48
3	0	4,59	14,69	21,43	22,61	21,15	19,05	17,03	15,27	13,78	12,52
2	0	6,35	14,29	14,69	12,70	10,74	9,18	7,98	7,03	6,28	5,67
1	0	7,14	6,35	4,59	3,52	2,83	2,37	2,03	1,78	1,59	1,43
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

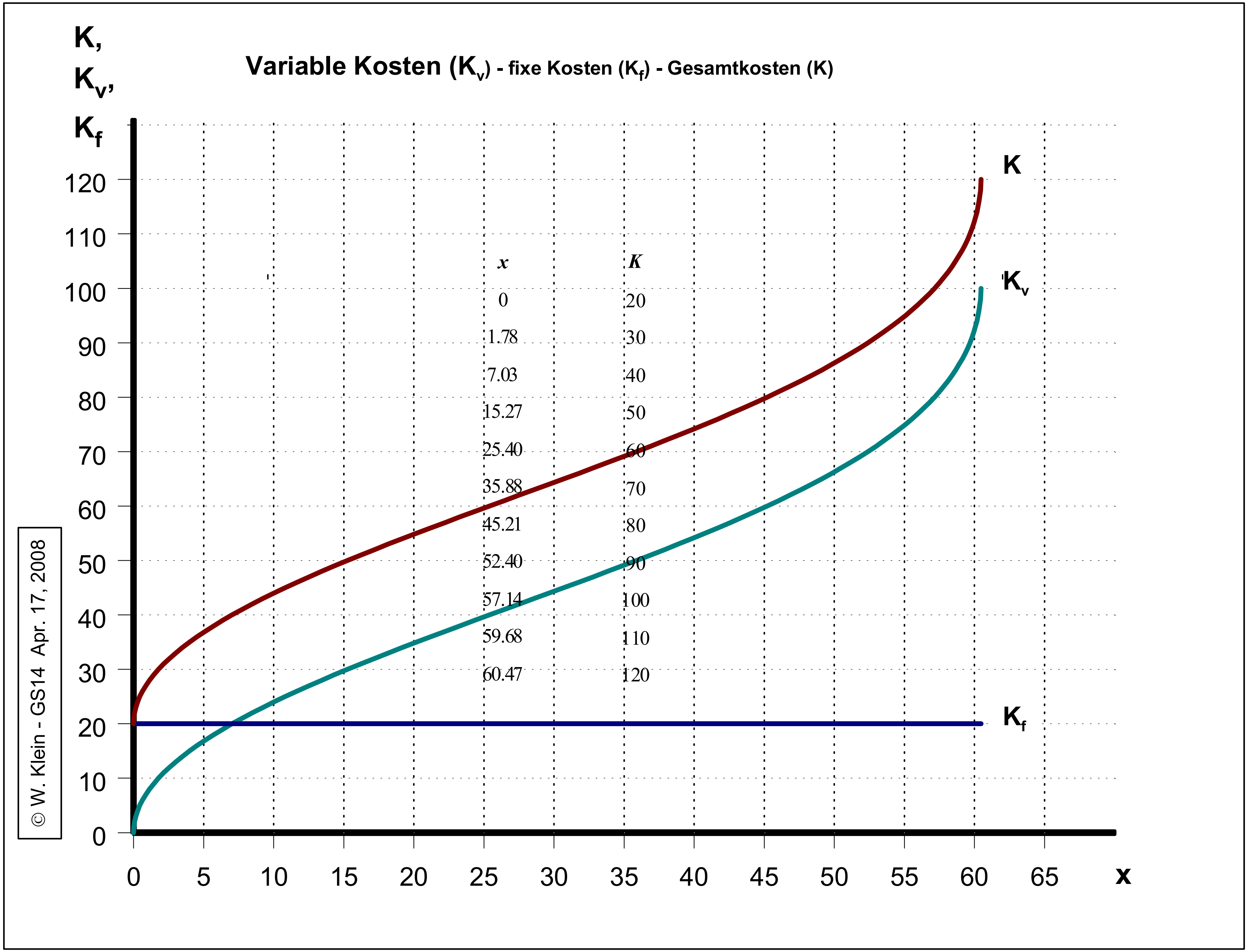
Ertrag und Kosten				
v_1	x	$Kv=v_1p_{v1}$ $(p_{v1}=10,00)$	Kf	$K = Kv+Kf$
0	0	0	20	20
1	1.78	10	20	30
2	7.03	20	20	40
3	15.27	30	20	50
4	25.40	40	20	60
5	35.88	50	20	70
6	45.21	60	20	80
7	52.40	70	20	90
8	57.14	80	20	100
9	59.68	90	20	110
10	60.47	100	20	120


Ertragsverlauf
x
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
v_1
v_{II} x
0 0
1 1.78
2 7.03
3 15.27
4 25.40
5 35.88
6 45.21
7 52.40
8 57.14
9 59.68
10 60.47
© W.Klein - GS10 Apr. 17, 2008

Variable Kosten (K_v)



x	$VK\ (p_{v1}=10{,}00)$
0	0
1.78	10
7.03	20
15.27	30
25.40	40
35.88	50
45.21	60
52.40	70
57.14	80
59.68	90
60.47	100


Variable Kosten (K_v) - fixe Kosten (K_f) - Gesamtkosten (K)
K, K_v, K_f
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65
x
K
K_v
K_f
x K
0 20
1.78 30
7.03 40
15.27 50
25.40 60
35.88 70
45.21 80
52.40 90
57.14 100
59.68 110
60.47 120
© W. Klein - GS14 Apr. 17, 2008

Abgeleitete Kostenkategorien

Variable Durchschnittskosten (DK_v)

$$\boxed{(1)\ DK_v = \frac{K_v}{x}}$$

Durchschnittliche fixe Kosten (DK_f)

$$\boxed{(2)\ DK_f = \frac{K_f}{x}}$$

$$(5)\ K = K_v + K_f \quad wobei$$

$$(6)\ K_v = v_v \cdot p_{vv} \quad und$$

$$(7)\ K_f = v_f \cdot p_{vf}$$

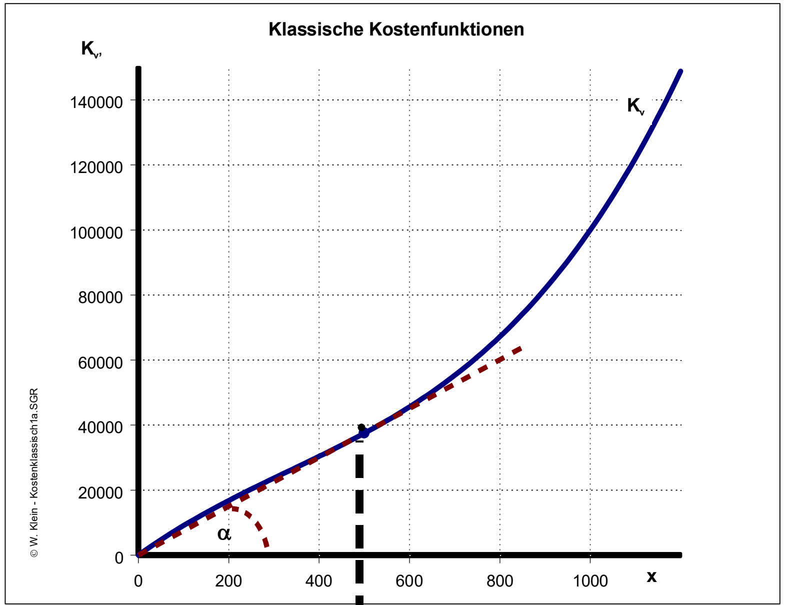
Durchschnittliche Gesamtkosten (Stückkosten) - STK

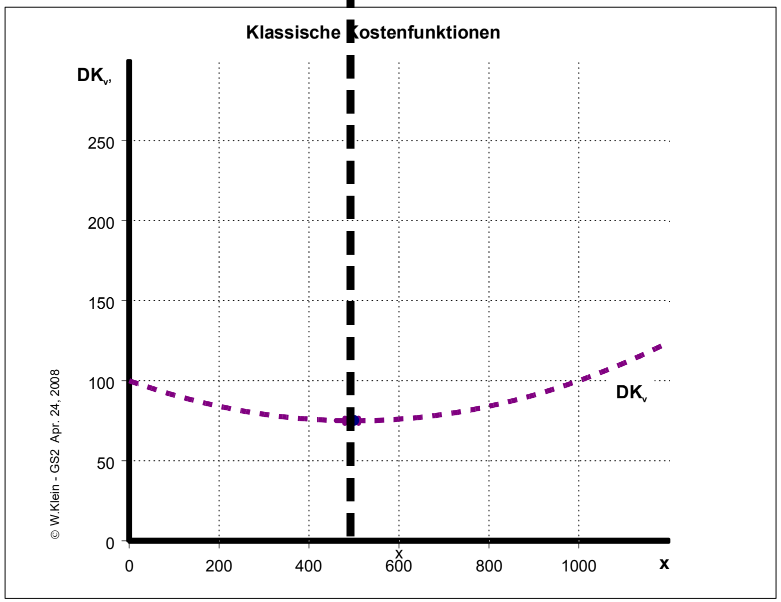
$$\boxed{\begin{aligned}(3)\ STK &= \frac{K}{x}\\ &= \frac{K_v + K_f}{x} = \frac{K_v}{x} + \frac{K_f}{x} = DK_v + DK_f\end{aligned}}$$

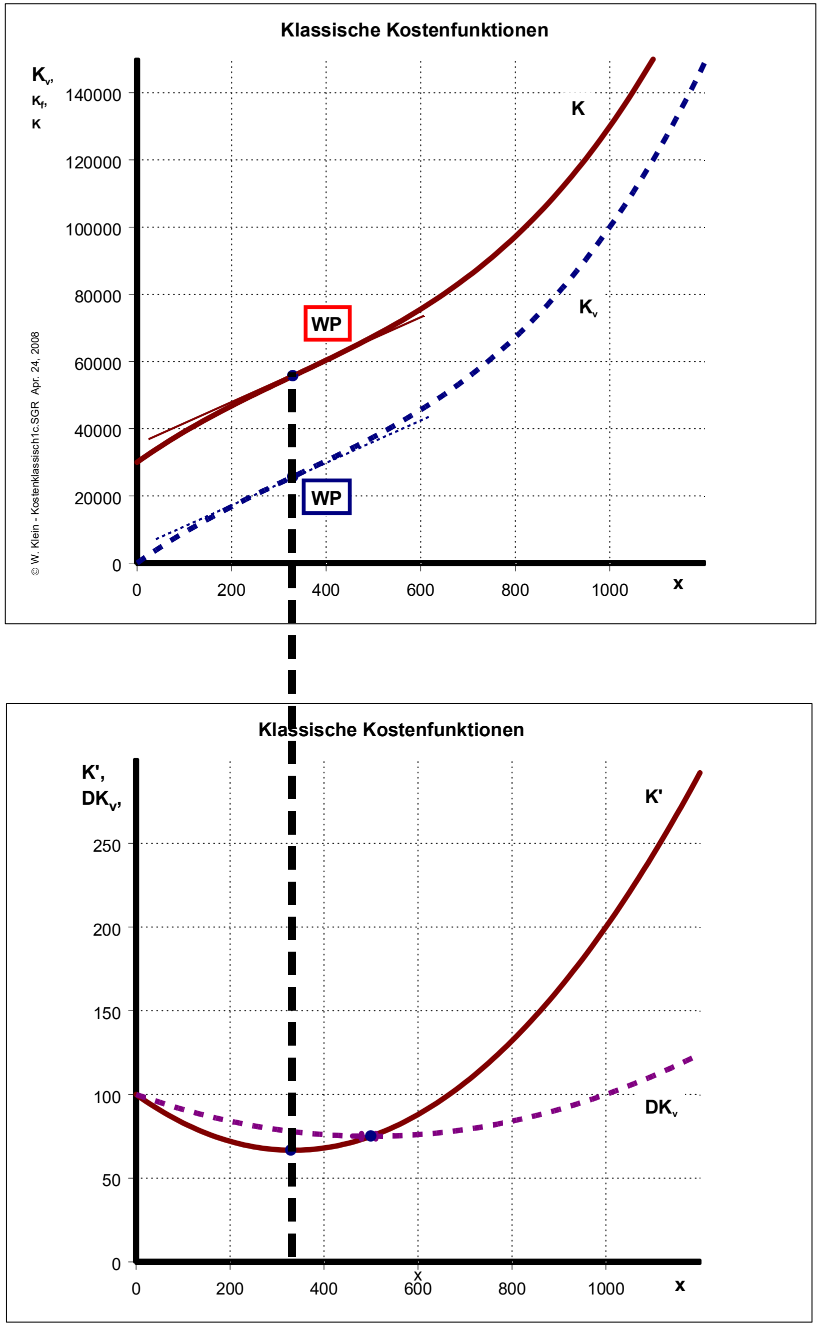
Grenzkosten (K')

$$\boxed{(4)\ K' = \frac{dK}{dx}\ oder \quad K' = \frac{dK_v}{dx}}$$

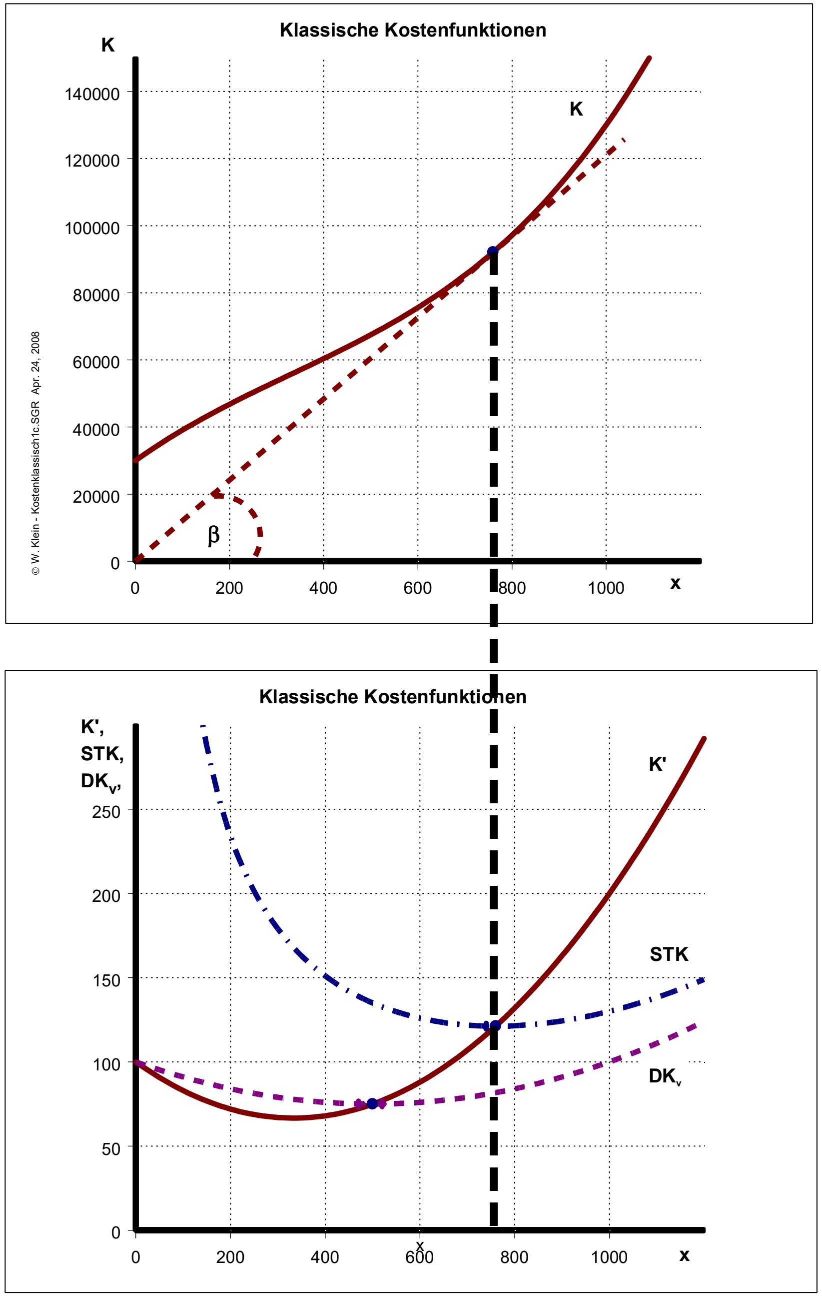
Die Grenzkosten (K') sind definiert als der Zuwachs zu den Gesamtkosten (dK) oder den variablen Kosten (dKv) bei Ausbringung einer weiteren (infinitesimal) kleinen Einheit des Produkts (dx).

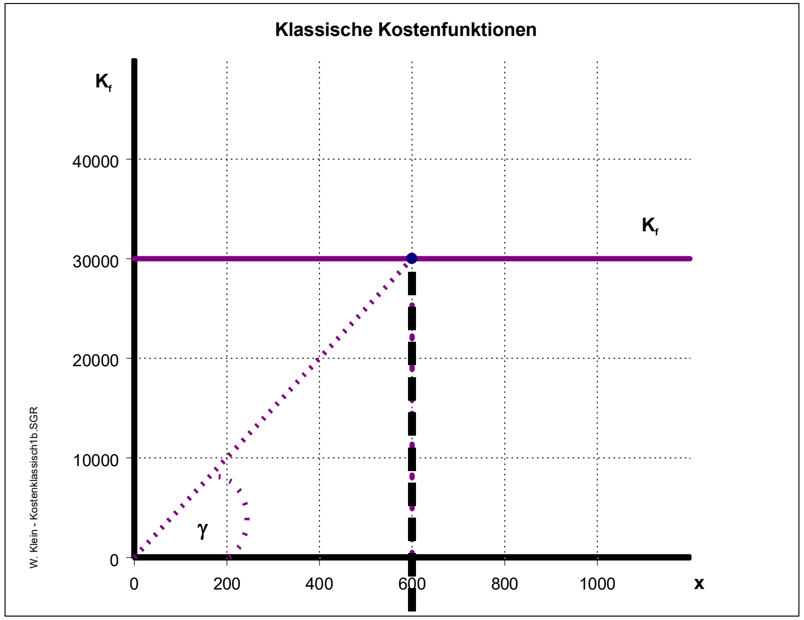

Klassische Kostenfunktionen
Kv,
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
Kv
α
0
200
400
600
800
1000
x
© W. Klein - Kostenklassisch1a.SGR

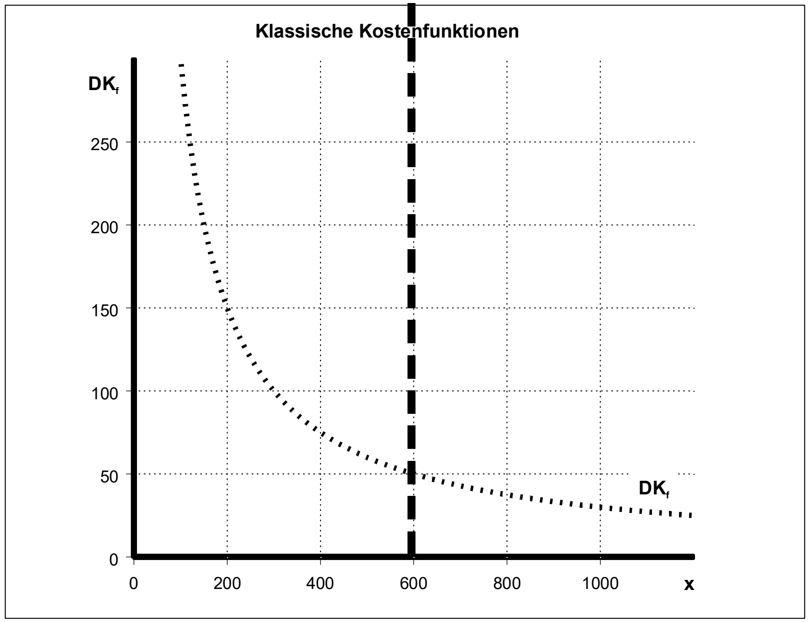

Klassische Kostenfunktionen
DKv,
250
200
150
100
50
0
DKv
0
200
400
600
800
1000
x
© W.Klein - GS2 Apr. 24, 2008

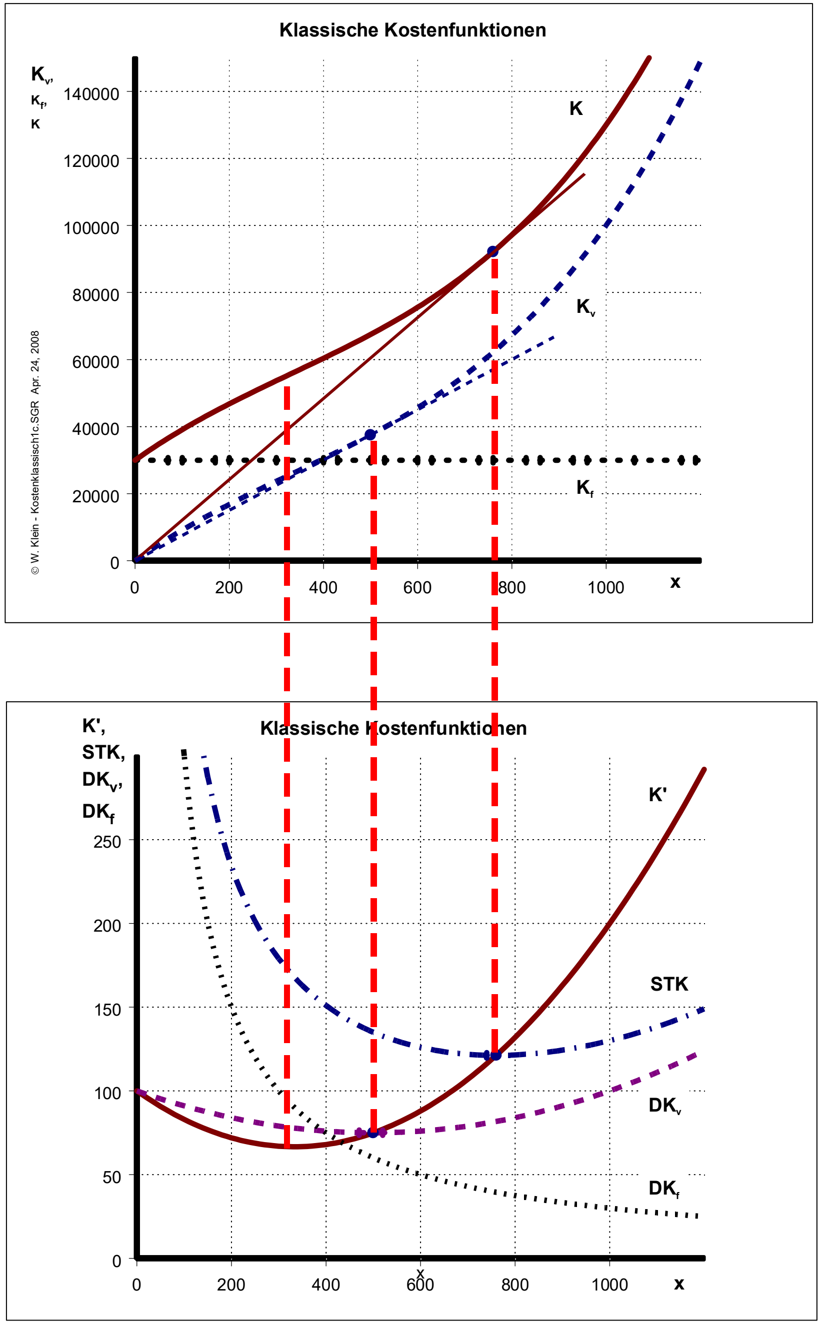


Klassische Kostenfunktionen
Kv, Kf, K
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
200
400
600
800
1000
x
K
Kv
WP
WP
© W. Klein - Kostenklassisch1c.SGR Apr. 24, 2008
Klassische Kostenfunktionen
K', DKv,
250
200
150
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
K'
DKv

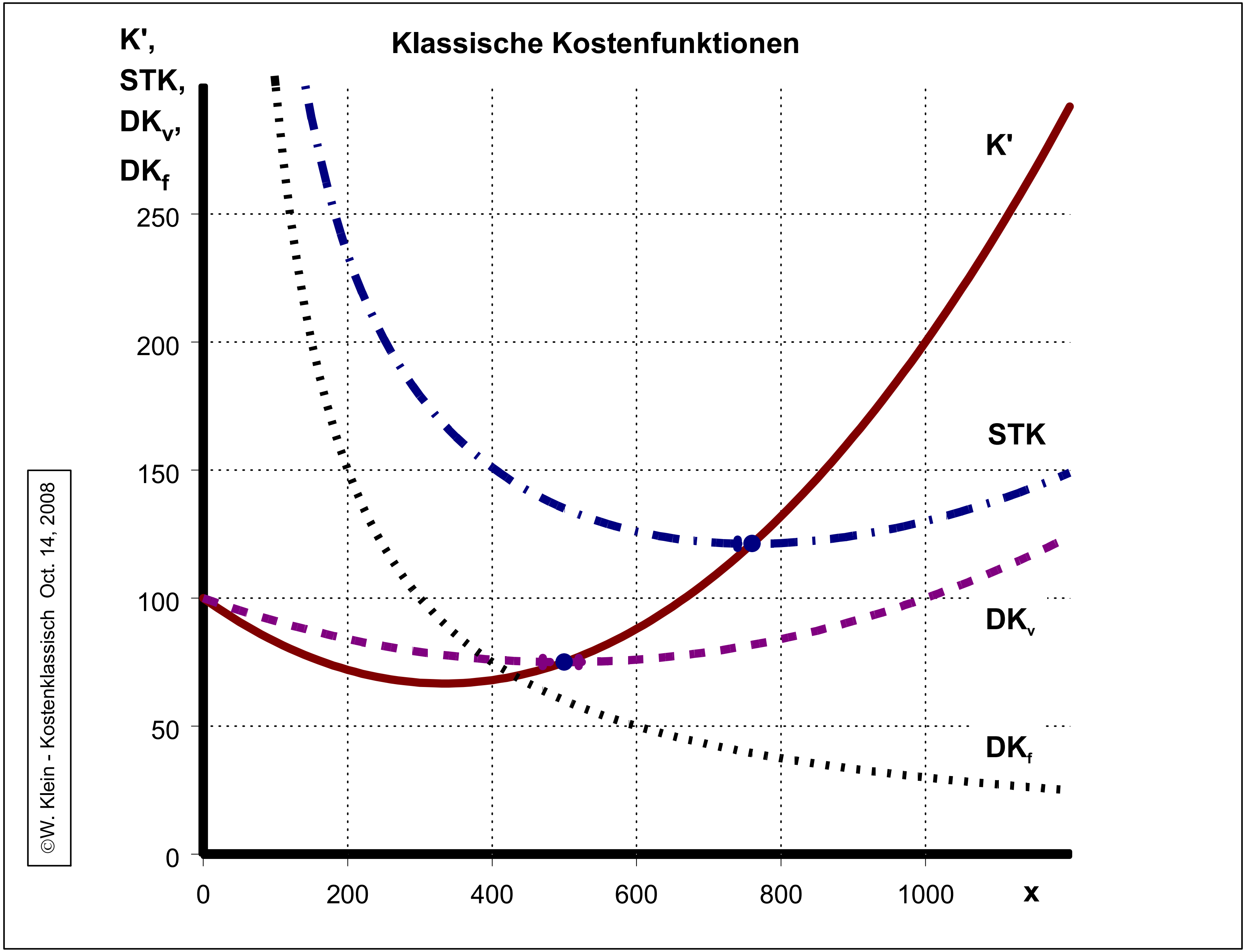

Klassische Kostenfunktionen
K
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
200
400
600
800
1000
x
K
β
© W. Klein - Kostenklassisch1c.SGR Apr. 24, 2008
Klassische Kostenfunktionen
K',
STK,
DKv,
250
200
150
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
K'
STK
DKv


Klassische Kostenfunktionen
K_f
40000
30000
20000
10000
0
0
200
400
600
800
1000
x
K_f
γ
W. Klein - Kostenklassisch1b.SGR


Klassische Kostenfunktionen
DK_f
250
200
150
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
DK_f



Klassische Kostenfunktionen
Kv, Kf, K
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
0
200
400
600
800
1000
x
K
Kv
Kf
© W. Klein - Kostenklassisch1c.SGR Apr. 24, 2008
Klassische Kostenfunktionen
K', STK, DKv, DKf
250
200
150
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
K'
STK
DKv
DKf


Klassische Kostenfunktionen
K', STK, DKv, DKf
250
200
150
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
K'
STK
DKv
DKf
©W. Klein - Kostenklassisch Oct. 14, 2008

Kostenkategorien - Beispiel -

(1) $K = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 100x + 10.000$

(2) $Kv = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 100x$

(3) $Kf = 10.000$

(4) $DKv = Kv/x = 0{,}0001x^2 - 0{,}1\,x + 100$

(5) $DKf = Kf/x = 10.000/x$

(6) $STK = K/\,x = (0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 100x + 10.000)/x$

$= 0{,}0001x^2 - 0{,}1\,x + 100 + 10.000/x$

(7) $K' = dK/dx$ oder $dKv/dx = 0{,}0003x^2 - 0{,}2x + 100$

Minimalkostenkombination

Modellannahmen

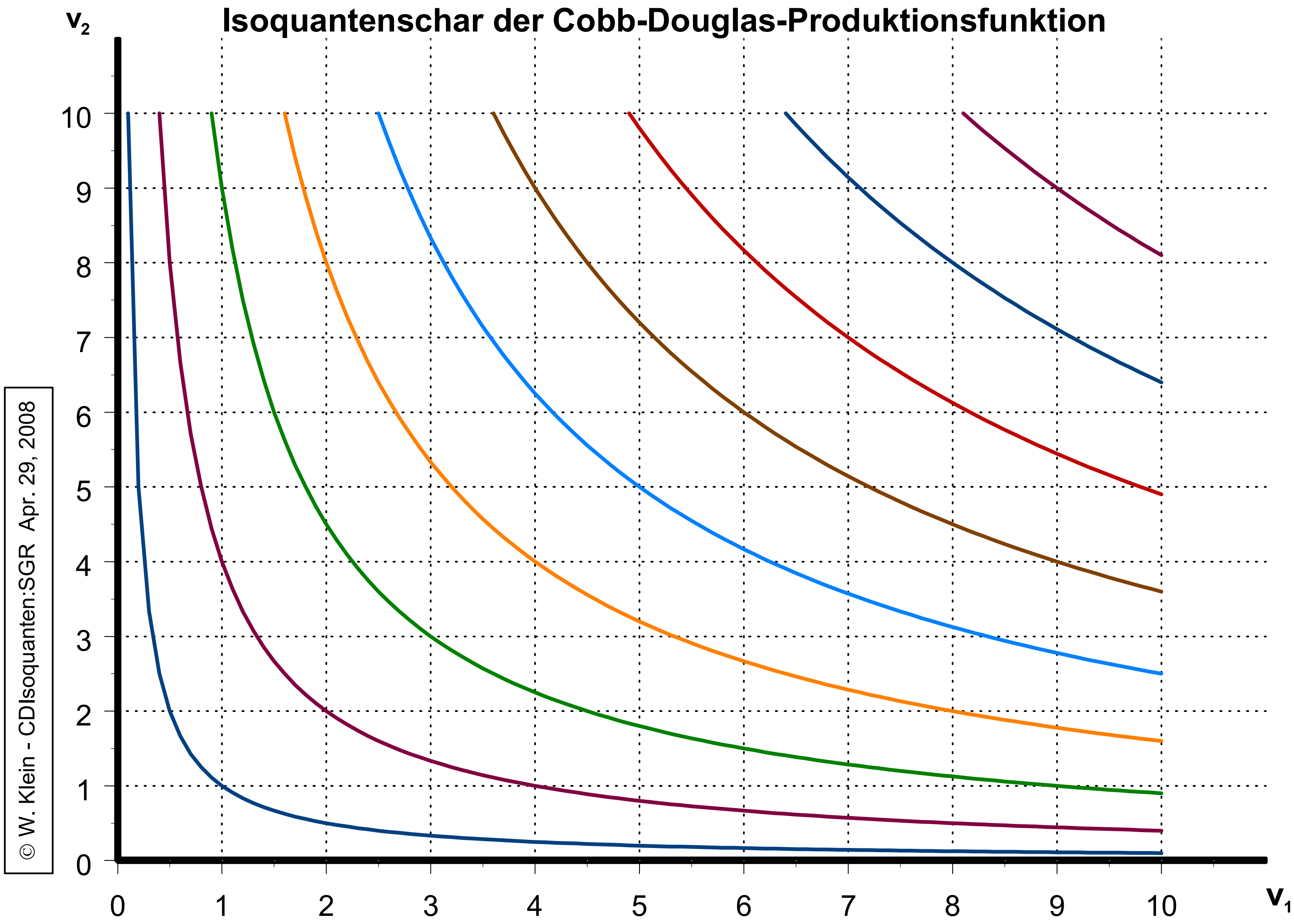
- **gegebene Kostensumme (K)**
- **gegebene Produktionsfunktion vom Typ *Cobb-Douglas*: $x = v_1^{\alpha} v_2^{\beta}$**
- **gegebene Preise der Produktionsfaktoren (v_1: p_{v1}) und (v_2: p_{v2})**

Die Produktionsmöglichkeiten des Gutes (x) lassen sich mit Hilfe der Schar der Isoquanten darstellen, implizit entsprechend der unterstellten Produktionsfunktion vom Typ *Cobb-Douglas*, deren explizite Form dann lautet:

$$(1)\, v_2 = \sqrt[\beta]{\frac{x}{v_1^{\alpha}}}$$

Für eine konkrete *Cobb-Douglas*-Produktionsfunktion mit z.B. $\alpha = ½$ und $\beta = ½$ ergibt sich:

$$(2)\, v_2^{1/2} = \frac{x}{v_1^{1/2}} \quad oder \qquad (3)\, v_2 = \frac{x^2}{v_1}$$



Isoquantenschar der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion
v_2
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
v_1
© W. Klein - CDIsoquanten:SGR Apr. 29, 2008

Entlang einer gegebenen Isoquante gilt das Gesetz der abnehmenden (technischen) Grenzrate der Substitution , z.B. des Faktors (v_1) durch den Faktor (v_2) - (R^{v1}_{v2}):

$$(1) R_{v_1}^{v_2} = -\frac{dv_2}{dv_1}$$

Für jeden Punkt einer gegebenen Isoquante gilt aber auch, daß der Ertrag (der output) (x) konstant ist, sich also bei Bewegungen auf einer gegebenen Isoquante nicht ändert, d.h. der Wert des totalen Differentials mit Bezug auf den Wert des Ertrags (x) und in Abhängigkeit der Aufwendungen der beiden Produktionsfaktoren (v_1) und (v_2) gleich null ist.

$$(2) dx = \frac{\partial x}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial x}{\partial v_2} dv_2 = 0$$

$$(3) GP_{(v_1)} = \frac{\partial x}{\partial v_1} \; und \; (4) GP_{(v_2)} = \frac{\partial x}{\partial v_2} \; somit$$

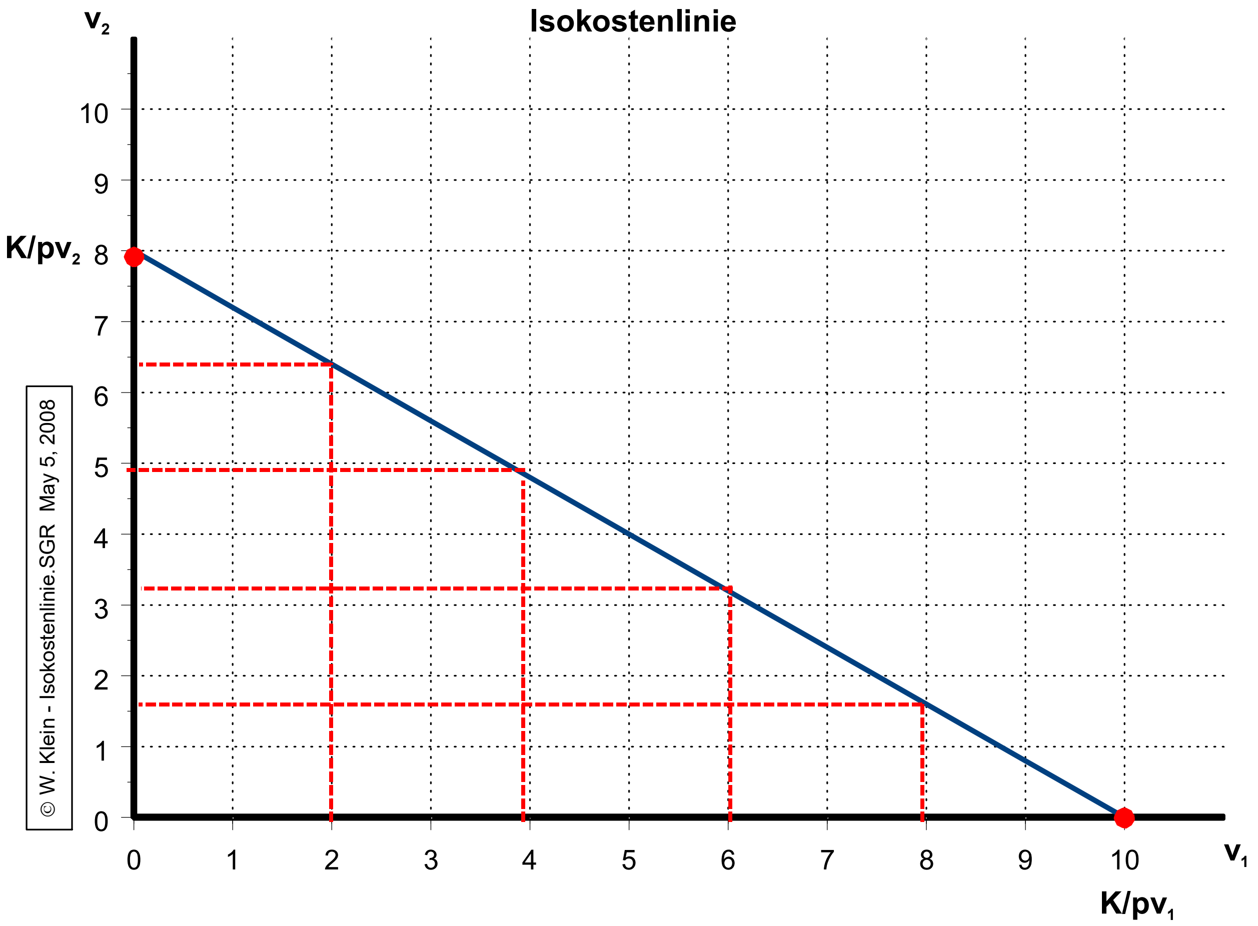
$$(5) GP_{(v_1)} dv_1 + GP_{(v_2)} dv_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{GP_{(v_1)}}{GP_{(v_2)}} = -\frac{dv_2}{dv_1}}$$

Isokostenlinie

Aus den Modellannahmen: gegebene Kostensumme (K) und gegebene Faktorpreise (p_{v1}) und (p_{v2}) folgt, daß die Kostensumme (K) entsprechend der folgenden Funktion alternativ für den Kauf der beiden Produktionsfaktoren (v_1) und (v_2) eingestzt werden kann:

$$(6) K = p_{v_1} v_1 + p_{v_2} v_2 \quad oder \quad (7) v_2 = \frac{K}{p_{v_2}} - \frac{p_{v_1}}{p_{v_2}} v_1$$

Gleichung (7) beschreibt den *Graphen der Isokostenlinie* in expliziter Form.
***Definition:* Eine *Isokostenlinie* ist definiert als der geometrische Ort aller Mengenkombinationen zweier Produktionsfaktoren (v_1) und (v_2), die ein Unternehmen bei gegebener Kostensumme (K) und gegebenen Faktorpreisen (p_{v1}) und (p_{v2})maximal erwerben kann.**



Definition: **Eine *Isokostenlinie* ist der geometrische Ort aller Mengenkombinationen zweier Produktionsfaktoren (v_1) und (v_2), die ein Unternehmen bei gegebener Kostensumme (K) und gegebenen Faktorpreisen (p_{v1}) und (p_{v2})maximal erwerben kann.**

Aus den Eigenschaften der Isokostenlinie ergibt sich für den Gleichgewichtspunkt (C)

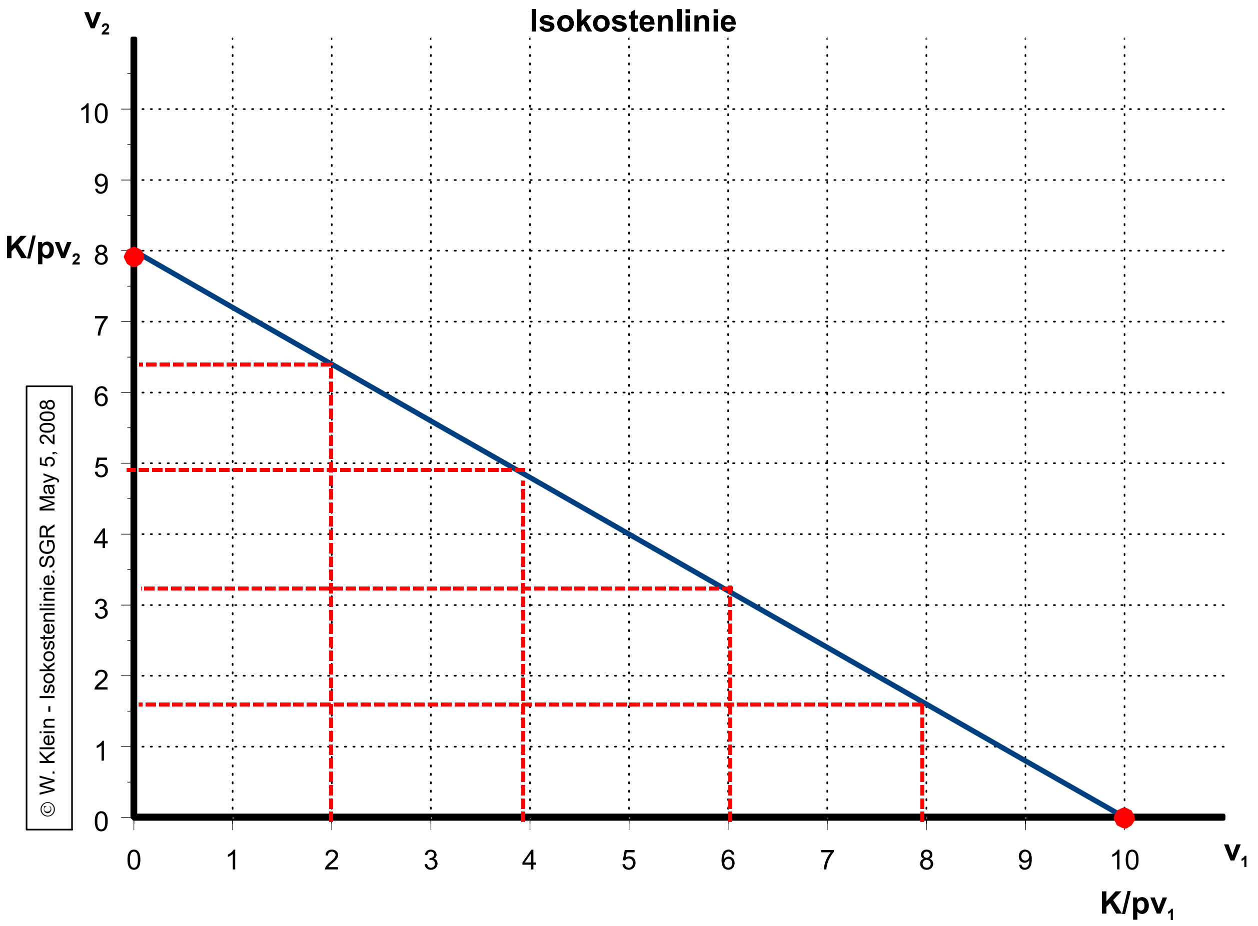
$$(8)\ v_2 = \frac{K}{p_{(v_2)}} - \frac{p_{(v_1)}}{p_{(v_2)}} \cdot v_1\ .\textit{Deren Steigung ist dann}$$

$$(9)\ v_2' = \frac{dv_2}{dv_1} = -\frac{p_{(v_1)}}{p_{(v_2)}}\ \textit{oder}\ \ (10)\ -\frac{dv_2}{dv_1} = \frac{p_{(v_1)}}{p_{(v_2)}}$$

Aus Gleichung (5) und Gleichung (10) folgt somit:

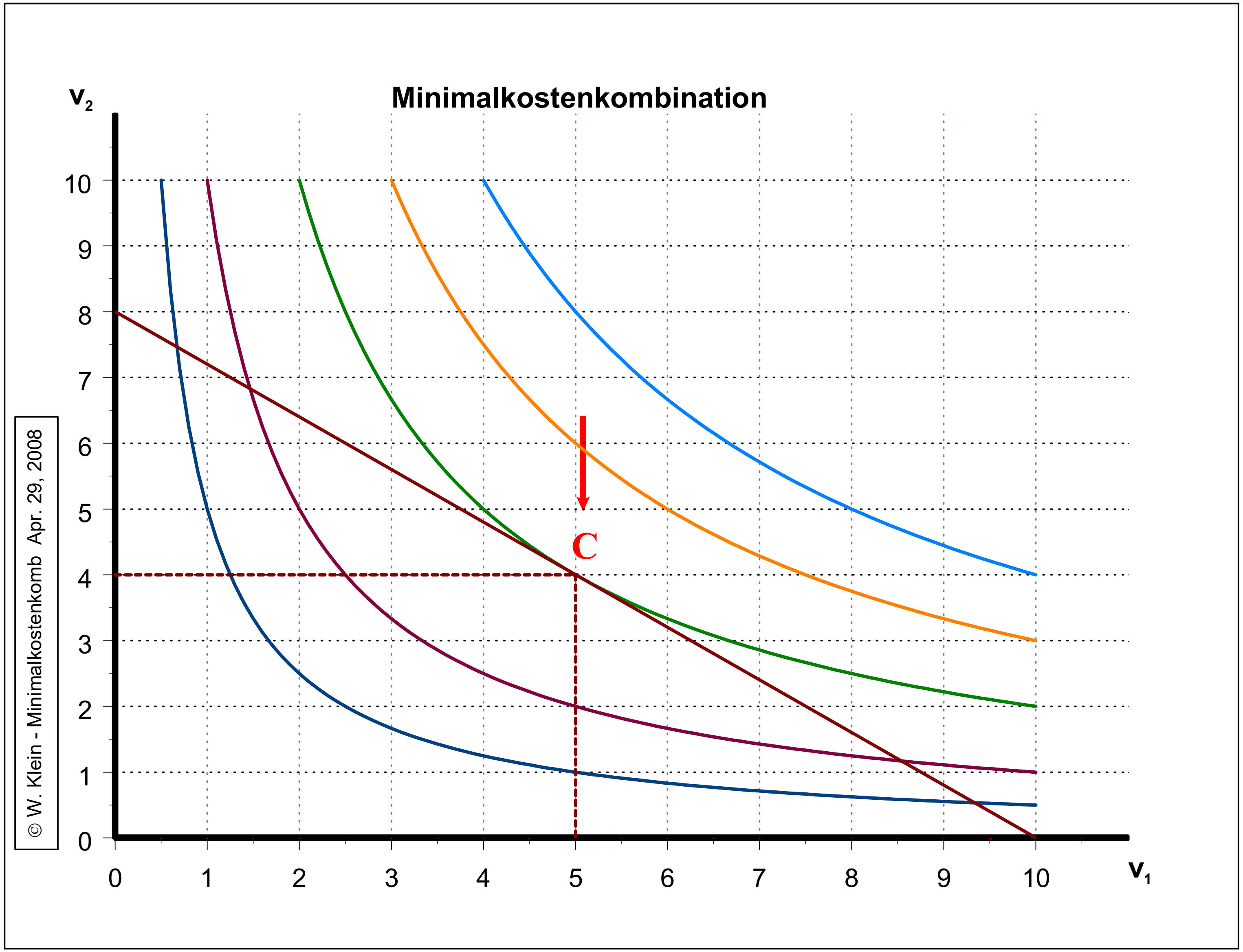
$$\boxed{(11)\ \frac{GP_{v_1}}{GP_{v_2}} = \frac{p_{v_1}}{p_{v_2}}}$$

Gleichung (11) beschreibt die Exisistenzbedingung für das Vorliegen einer Minimalkostenkombination!



Definition: **Eine *Isokostenlinie* ist der geometrische Ort aller Mengenkombinationen zweier Produktionsfaktoren (v_1) und (v_2), die ein Unternehmen bei gegebener Kostensumme (K) und gegebenen Faktorpreisen (p_{v1}) und (p_{v2})maximal erwerben kann.**

Minimalkostenkombination - graphisch -



Aufgabe zur Minimalkostenkombination

Es

Der Preis des Faktors v_1 betrage p_{v1} $_2$ sei p_{v2}

Es existiert eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion der Gestalt: $x = v_1 v_2$.

- **Bestimmen Sie den expliziten Ausdruck (die Funktion) derIsokostenlinie ($v_2 = f(K, pv_1, pv_2, v_1)$).**
- **Berechnen Sie die der Minimalkostenkombination zugehörigen Faktormengen (v_1 und v_2) und die dementsprechende Produktmenge (x)**
- **Bestimmen Sie die Funktion der der Minimalkostenkombination entsprechenden Isoquante [$v_2 = f(x, v_1)$].**

Aufgabe zur Minimalkostenkombination

1.
2. Preis Faktor v_1: p_{v1}
3. Preisfaktor v_2: p_{v2}
4. Produktionsfunktion: $x = v_1 v_2$

Isokostenlinie:

$$(1) K = p_{v1} \cdot v_1 + p_{v2} \cdot v_2 \quad (2) v_2 = \frac{K}{p_{v2}} - \frac{p_{v1}}{p_{v2}} v_1 \quad (3) v_2 = \frac{100.000}{80} - \frac{100}{80} v_1$$

$$(4) v_2 = 1.250 - 1{,}25 v_1$$

Faktormengen v_1 und v_2:

$$(1) \frac{GP_{v1}}{GP_{v2}} = \frac{p_{v1}}{p_{v2}} \quad (2) x = v_1 \cdot v_2 \quad (3) GP_{v1} = \frac{\partial x}{\partial v_1} = v_2 \quad (4) GP_{v2} = \frac{\partial x}{\partial v_2} = v_1$$

$$(5) \frac{v_2}{v_1} = \frac{100}{80} \quad (6) v_2 = \frac{5}{4} v_1 \quad (7) K = p_{v1} \cdot v_1 + p_{v2} \cdot v_2$$

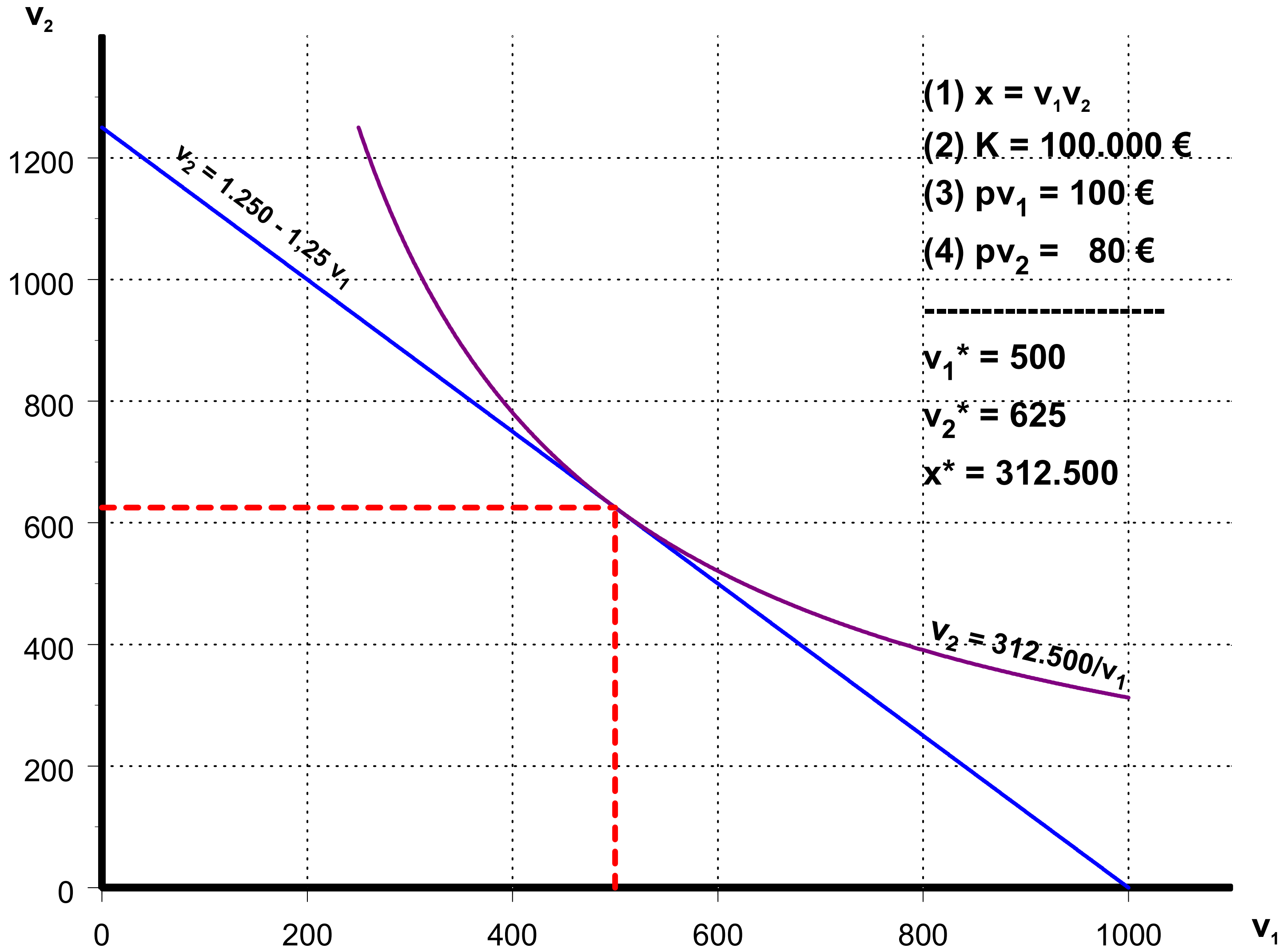
$$(8) 100.000 = 100 v_1 + 80(\tfrac{5}{4} v_1) \quad (9) 200 v_1 = 100.000$$

$$(10) v_1^* = 500 \quad (11) v_2^* = \frac{5}{4} \cdot 500 = 625$$

$$Poduktmenge: (11) x = v_1 \cdot v_2 \quad (2) x = 500 \cdot 625 = 312.500$$

$$Isoquante: (12) x = v_1 \cdot v_2 \Rightarrow \quad (2) v_2 = \frac{x}{v_1} \quad (3) v_2 = \frac{312.000}{v_1}$$

Minimalkostenkombination



Das kurzfristige Gewinnmaximum

Gewinn = Erlös-Umsatz - Kosten oder G = E - K

Es sei die Outputmenge (x) im "zwei-Faktoren - ein-Produkt-Modell" die strategische Variable, so gilt:

$$(1)\ G_{(x)} = E_{(x)} - K_{(x)}\ \max!$$

$$(2)\ \frac{dG_{(x)}}{dx} = \frac{dE_{(x)}}{dx} - \frac{dK_{(x)}}{dx} \overset{!}{=} 0\ oder$$

$$(3)\ G'_{(x)} = E'_{(x)} - K'_{(x)} \overset{!}{=} 0\ notwendige Bedingung$$

$$(4)\ G''_{(x)} = E''_{(x)} - K''_{(x)} < 0\ hinreichende\ Bedingung$$

$$\boxed{(5)\ K'_{(x)} = E'_{(x)}\quad allgemeine\ Outputregel\ der\ Gewinnmaximierung!}$$

Ist der Preis (p) gegeben, d.h. es herrscht Wettbewerb auf dem Absatzmarkt, dann gilt:

$$(6)\ E_{(x)} = p \cdot x,\ wobei\ (p) = konstant!$$

$$(7) E' = \frac{dE_{(x)}}{dx} = \frac{d(\overline{p} \cdot x)}{dx}\ oder$$

$$(8)\ E'_{(x)} = p\ somit$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(9)\ K'_{(x)} = p;\quad spezielle\ Outputregel\ der\ Gewinnmaximierung\\ bei\ Wettbewerb\ auf\ dem\ Absatzmarkt!\end{array}}$$

Erlös - Kosten - Gewinn

(1) $E_{(x)} = p \cdot x$ (2) $K_{(x)} = K_v + K_f$

(3) $STK = \dfrac{K_{(x)}}{x} = \dfrac{K_v + K_f}{x} = \dfrac{K_v}{x} + \dfrac{K_f}{x} = DK_v + DK_f$

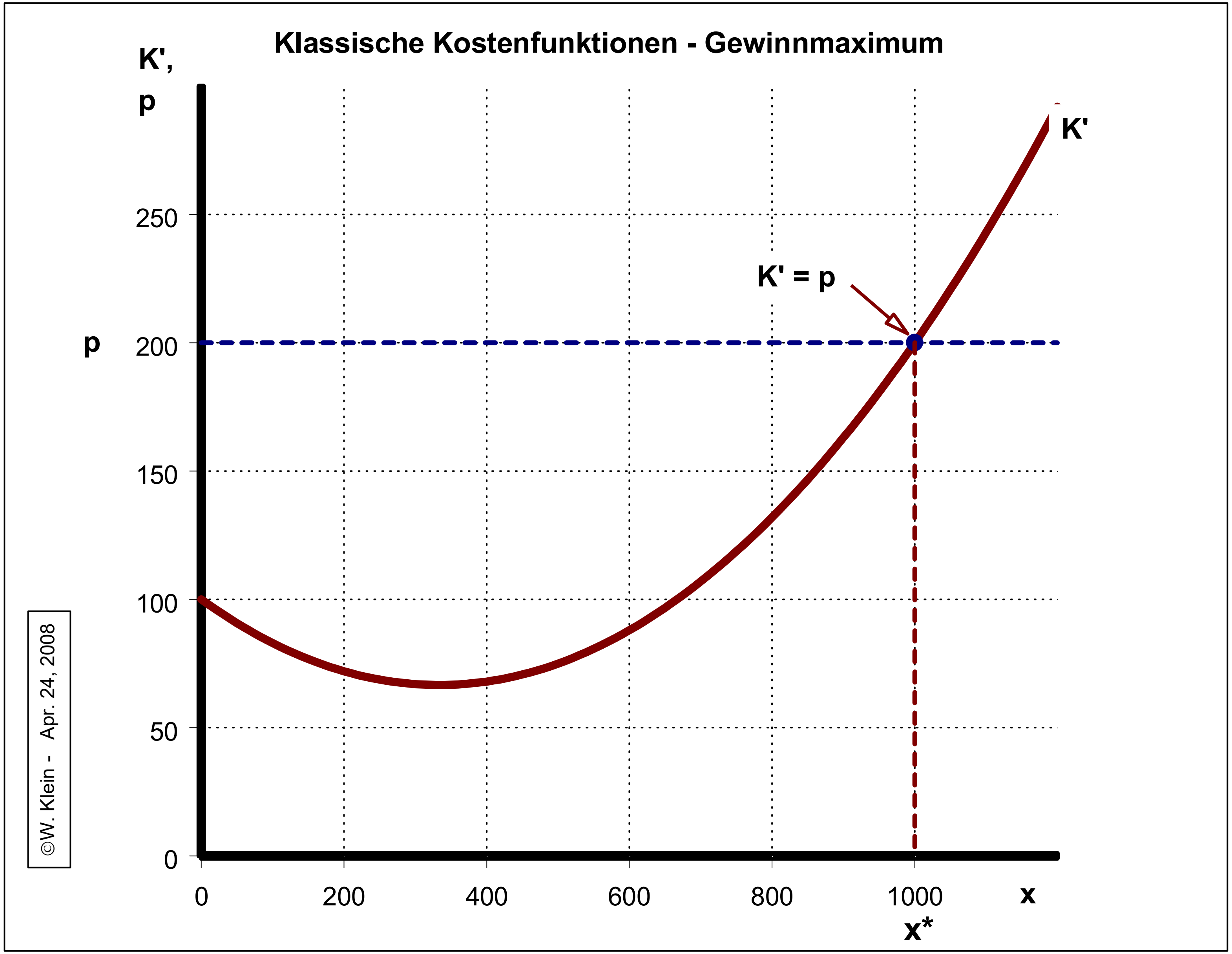
(4) $K_{(x)} = STK \cdot x$ (5) $DK_v = \dfrac{K_v}{x}, somit$

(6) $K_v = DK_v \cdot x$ (7) $DK_f = \dfrac{K_f}{x}, somit$

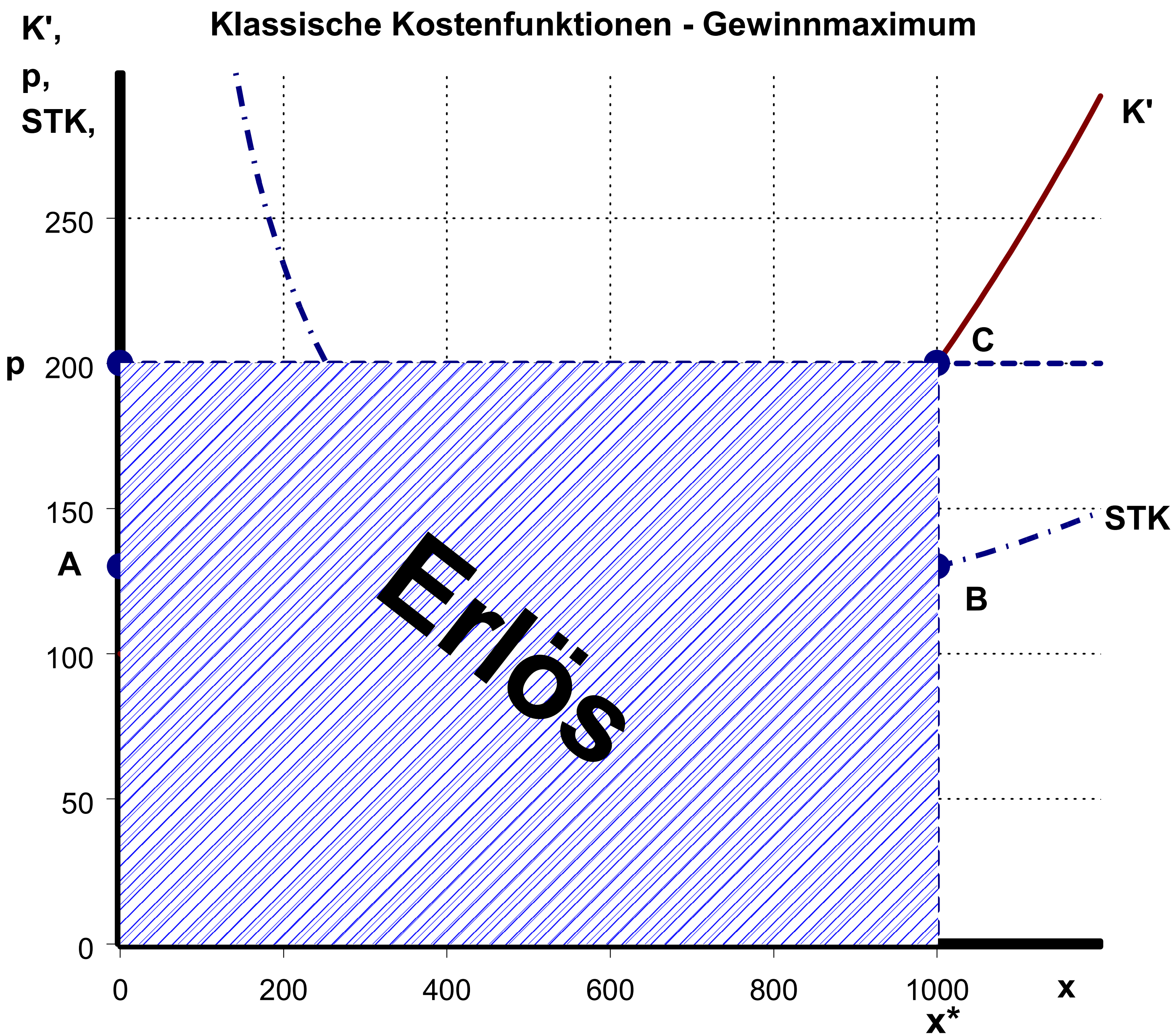
(8) $K_f = DK_f \cdot x$ aus (3) $fo\,\mathrm{lg}\,t$

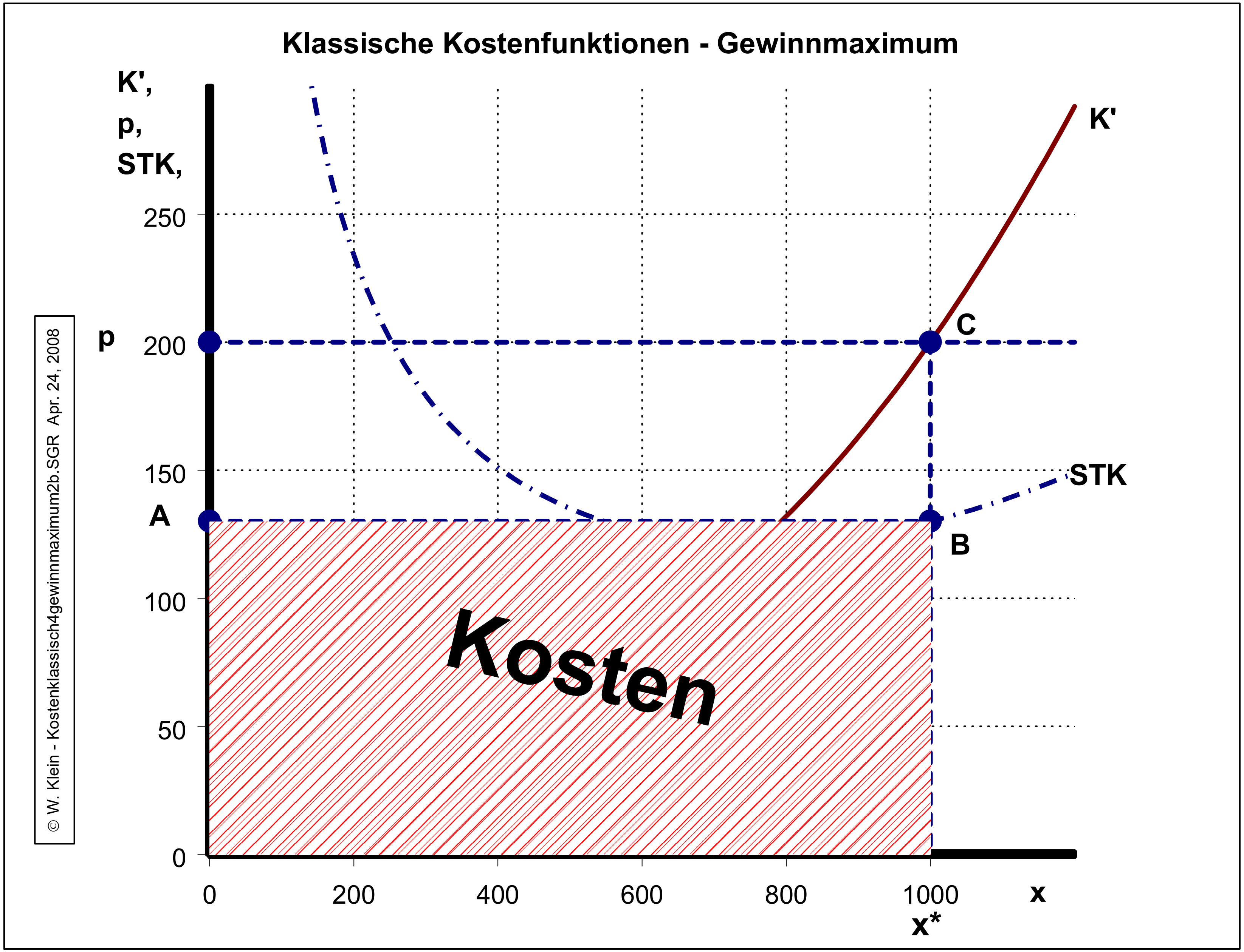
(9) $DK_f = STK - DK_v, somit$ (10) $K_f = (STK - DK_v) \cdot x$

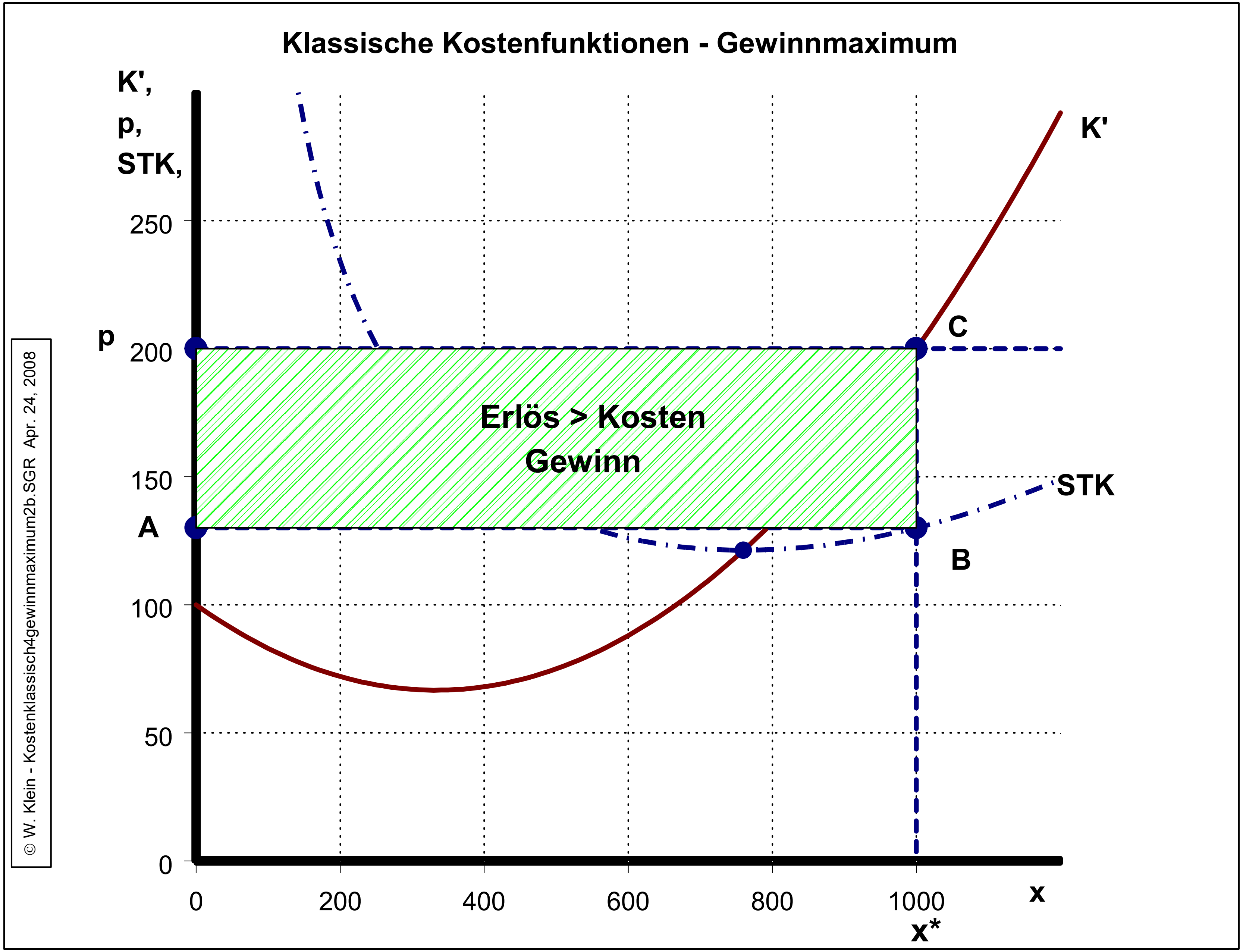
(11) $K_{(x)} = (DK_v + DK_f) \cdot x$ (12) $G_{(x)} = E_{(x)} - K_{(x)}$



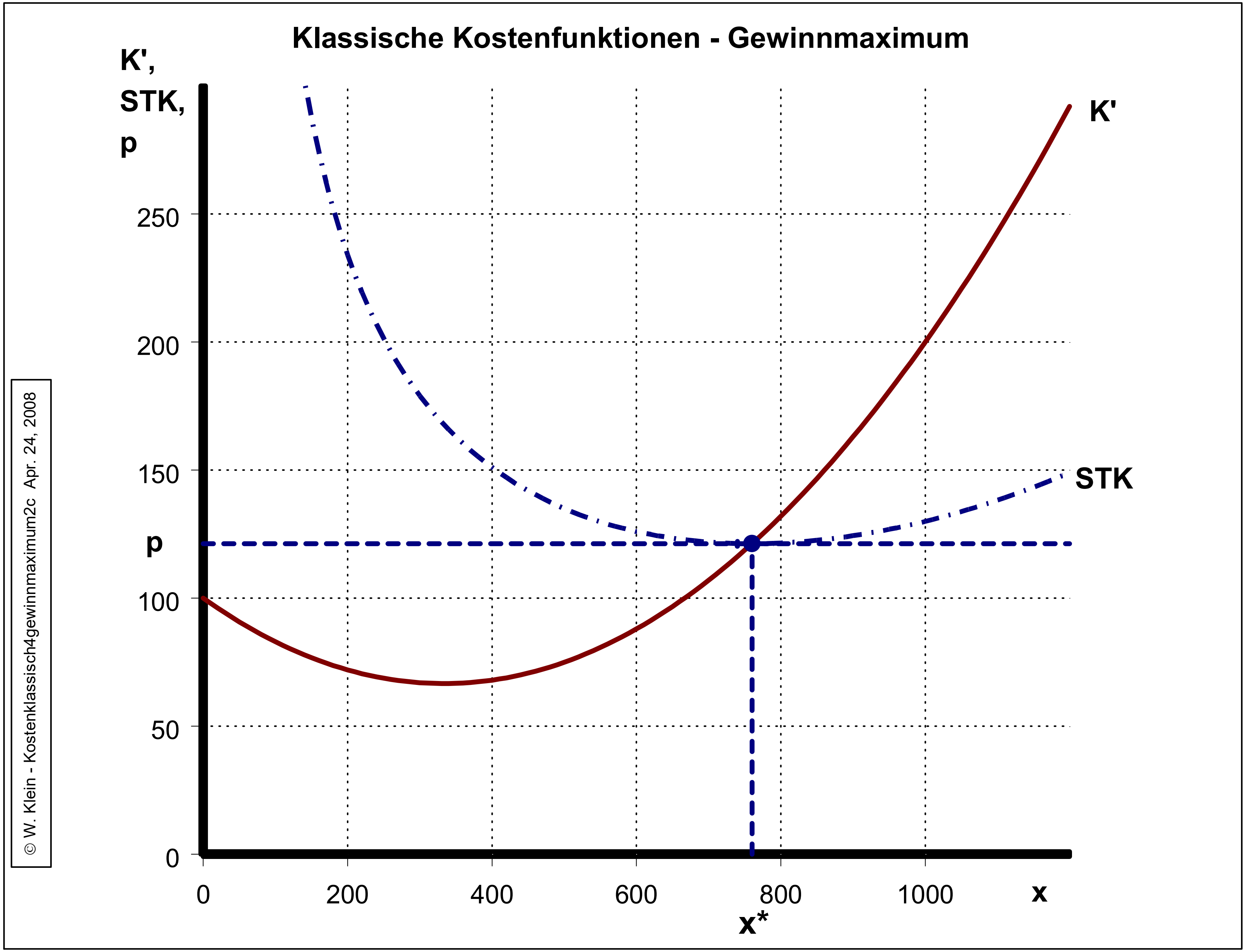
Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
p
K'
K' = p
p
250
200
150
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
x*
©W. Klein - Apr. 24, 2008

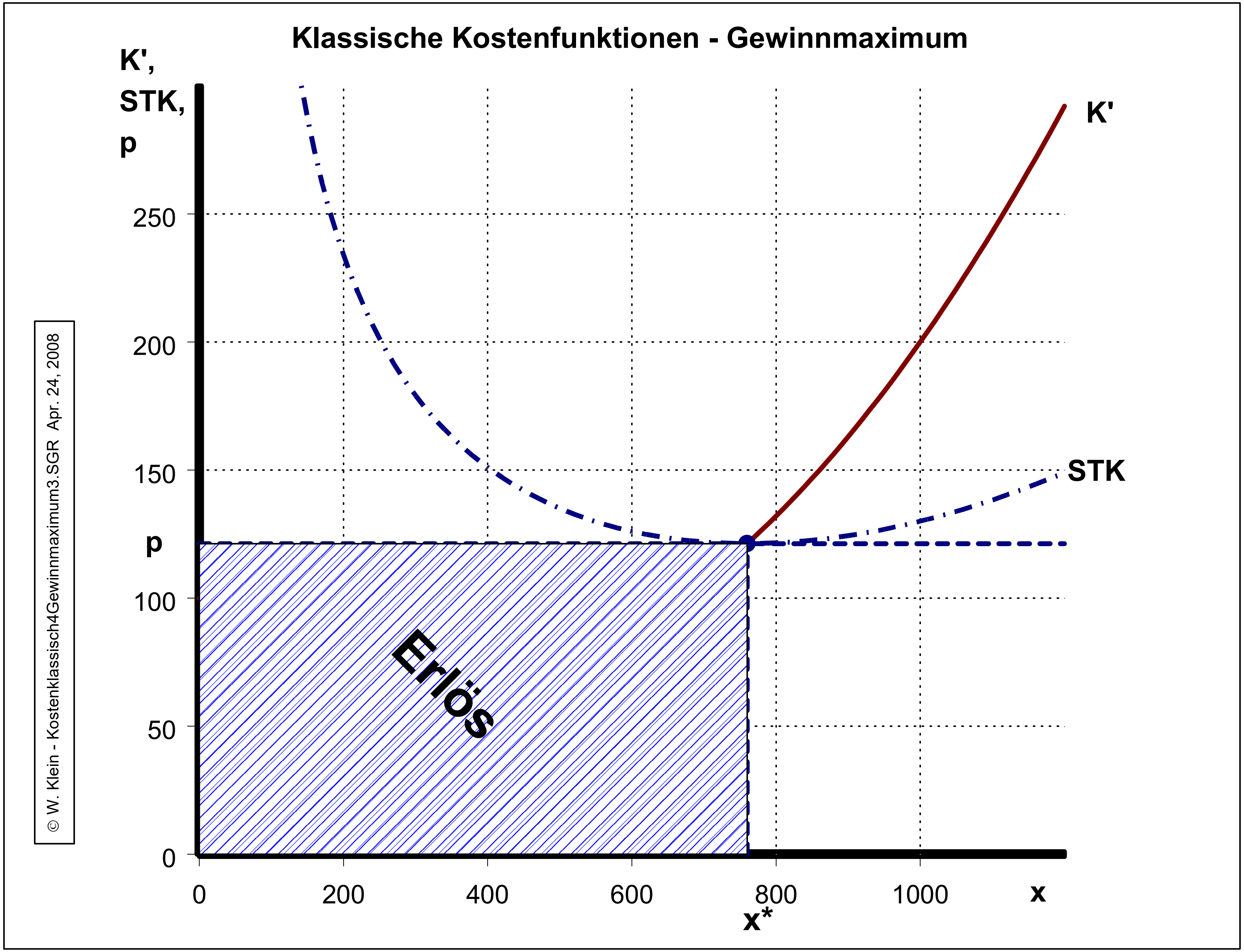

Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
p,
STK,
250
p
200
150
A
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x*
x
K'
C
STK
B
Erlös


Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
p,
STK,
250
200
150
100
50
0
p
A
C
B
K'
STK
Kosten
0
200
400
600
800
1000
x
x*
© W. Klein - Kostenklassisch4gewinnmaximum2b.SGR Apr. 24, 2008

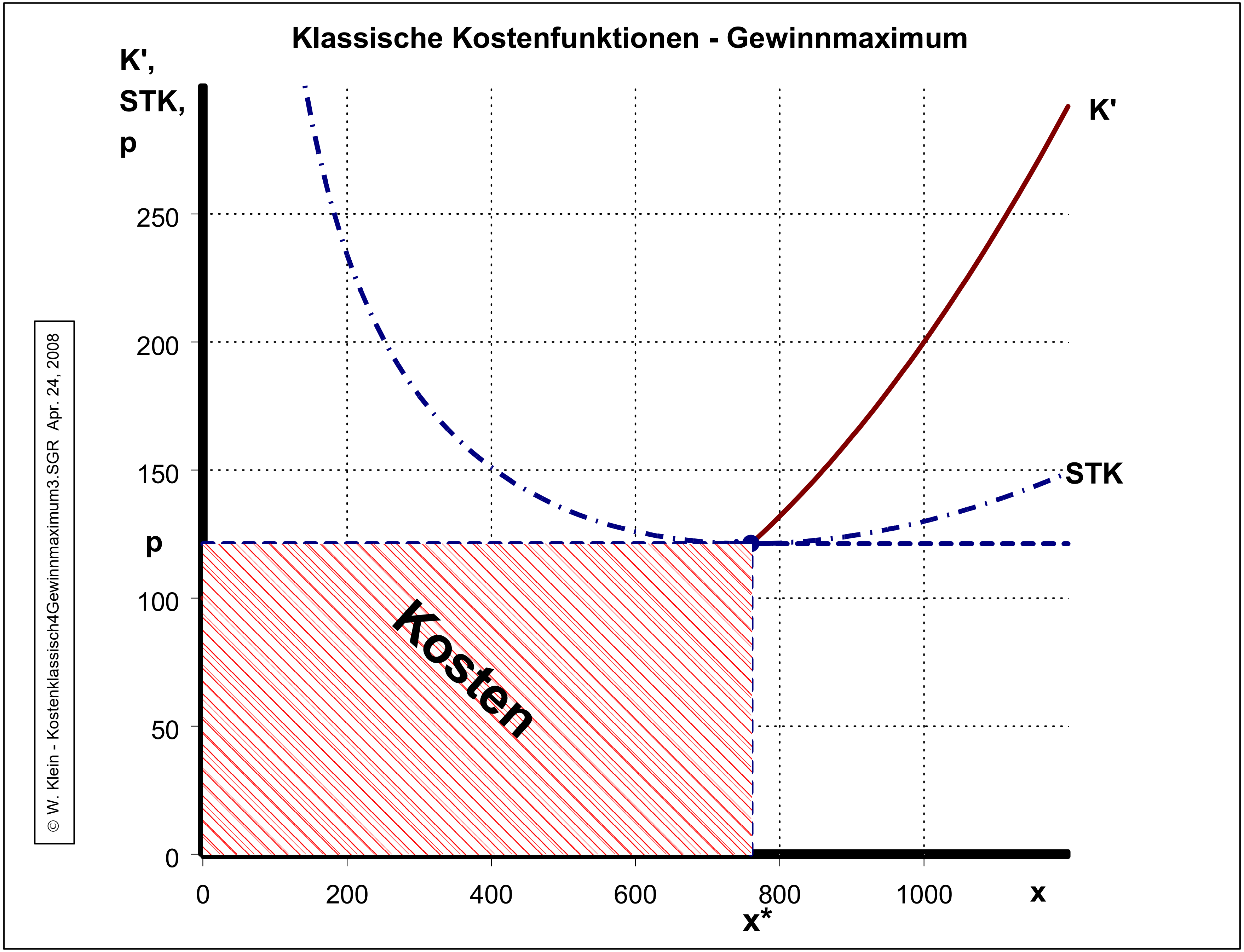


Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
p,
STK,
K'
250
200
150
100
50
0
p
A
C
B
Erlös > Kosten
Gewinn
STK
0
200
400
600
800
1000
x*
x
© W. Klein - Kostenklassisch4gewinnmaximum2b.SGR Apr. 24, 2008

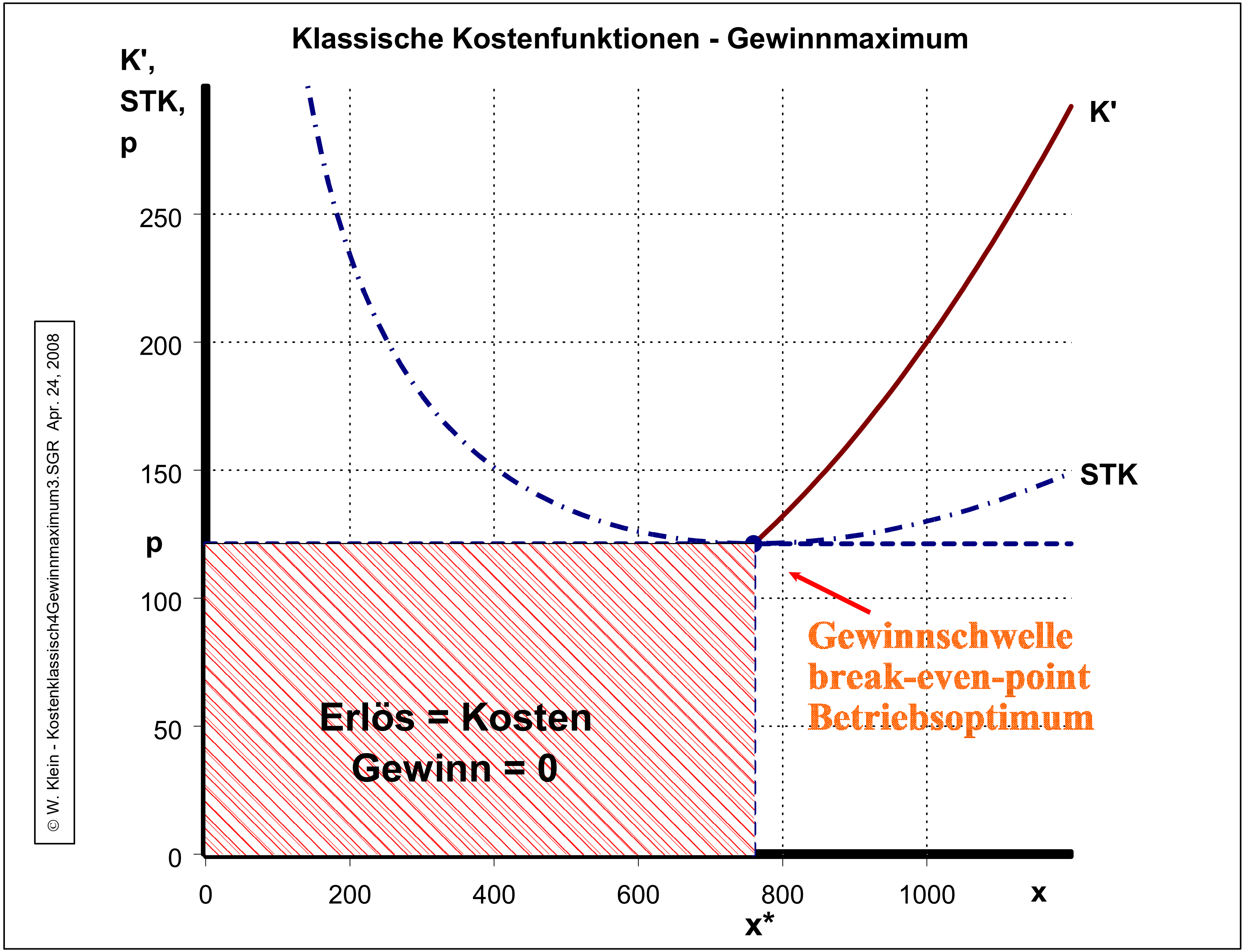

Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
p
250
200
150
p
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
x*
K'
STK
© W. Klein - Kostenklassisch4gewinnmaximum2c Apr. 24, 2008



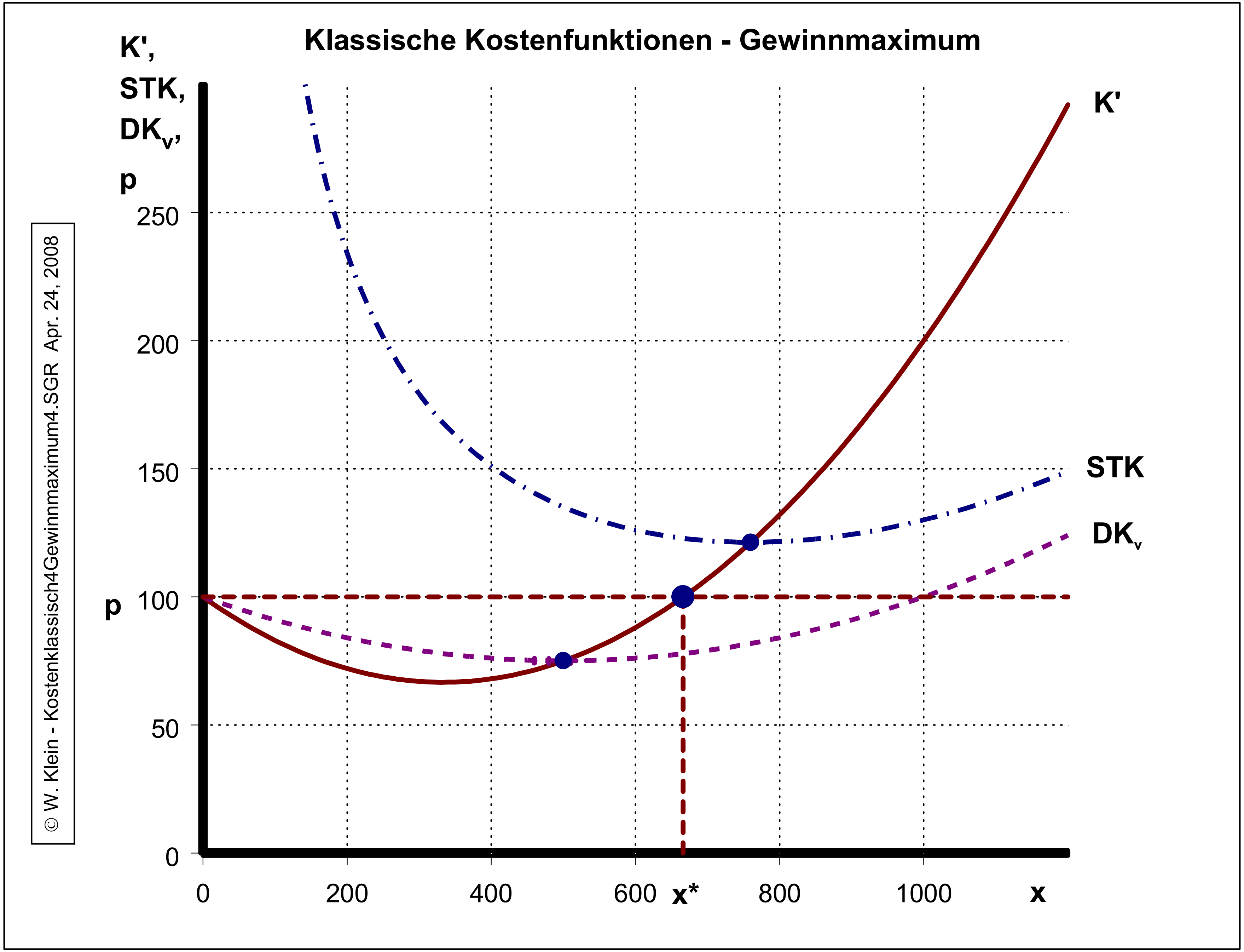
Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
p
250
200
150
p
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
x*
K'
STK
Erlös
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum3.SGR Apr. 24, 2008

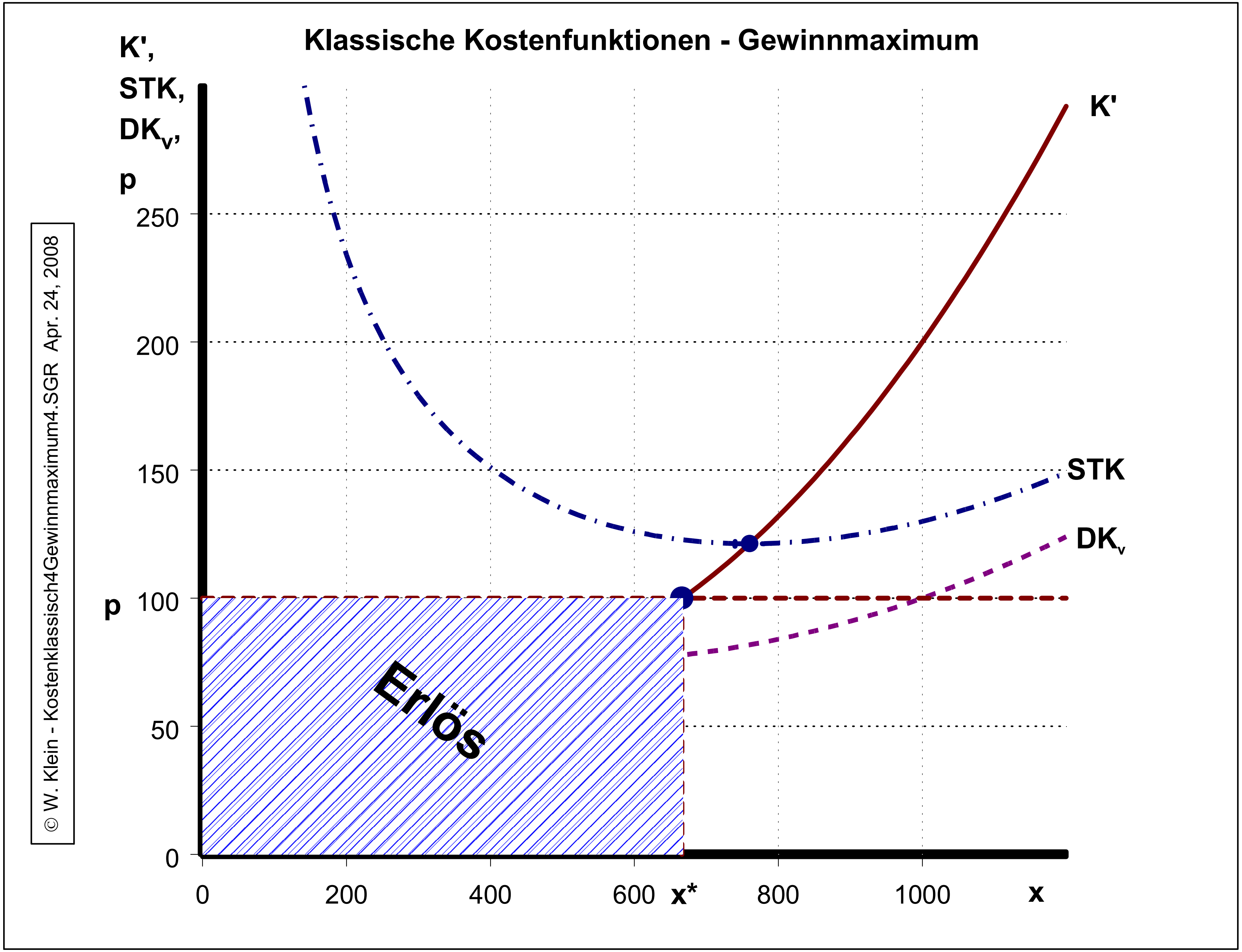


Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
p
250
200
150
p
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
x*
K'
STK
Kosten
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum3.SGR Apr. 24, 2008

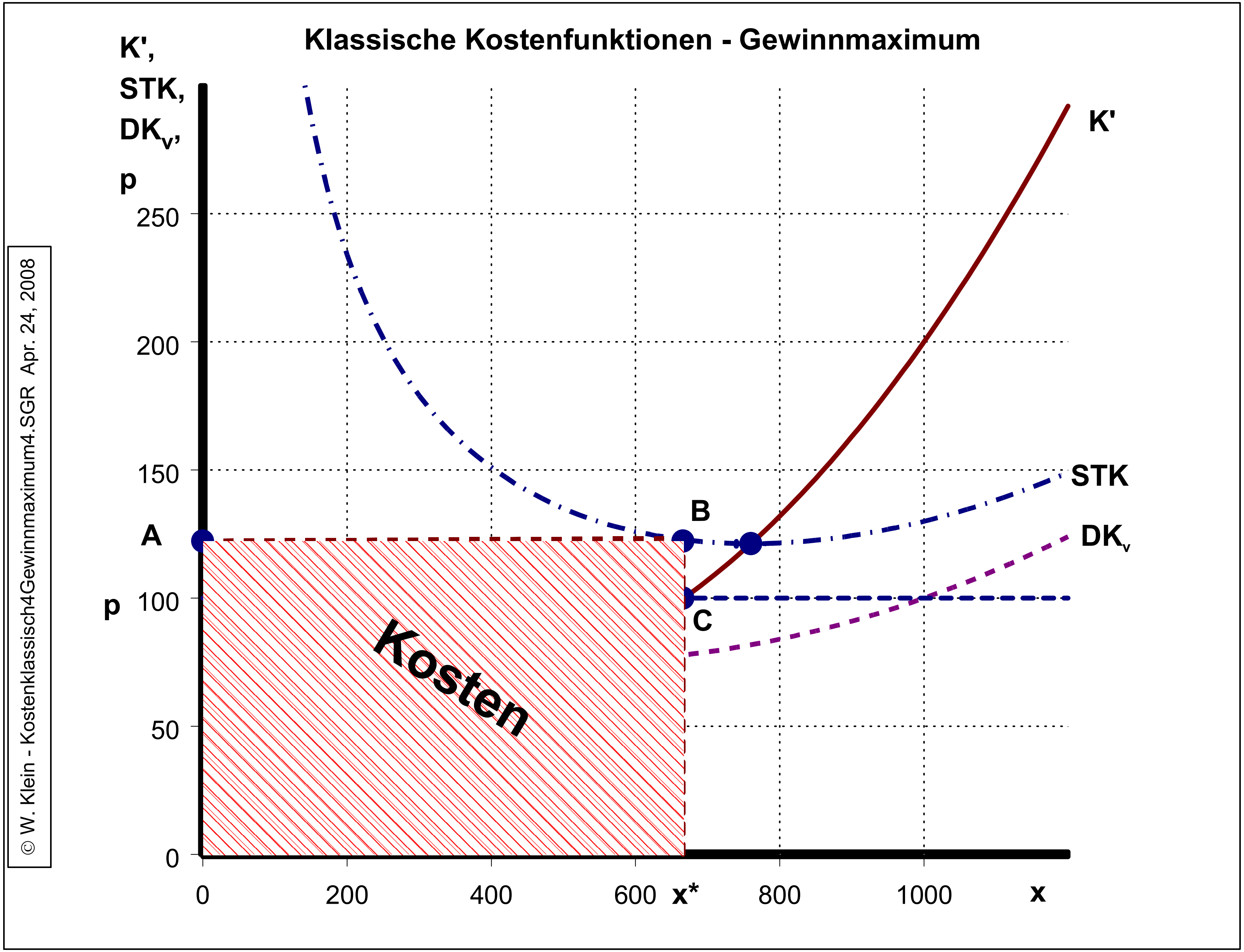


Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
p
250
200
150
p
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
x*
K'
STK
Gewinnschwelle
break-even-point
Betriebsoptimum
Erlös = Kosten
Gewinn = 0
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum3.SGR Apr. 24, 2008

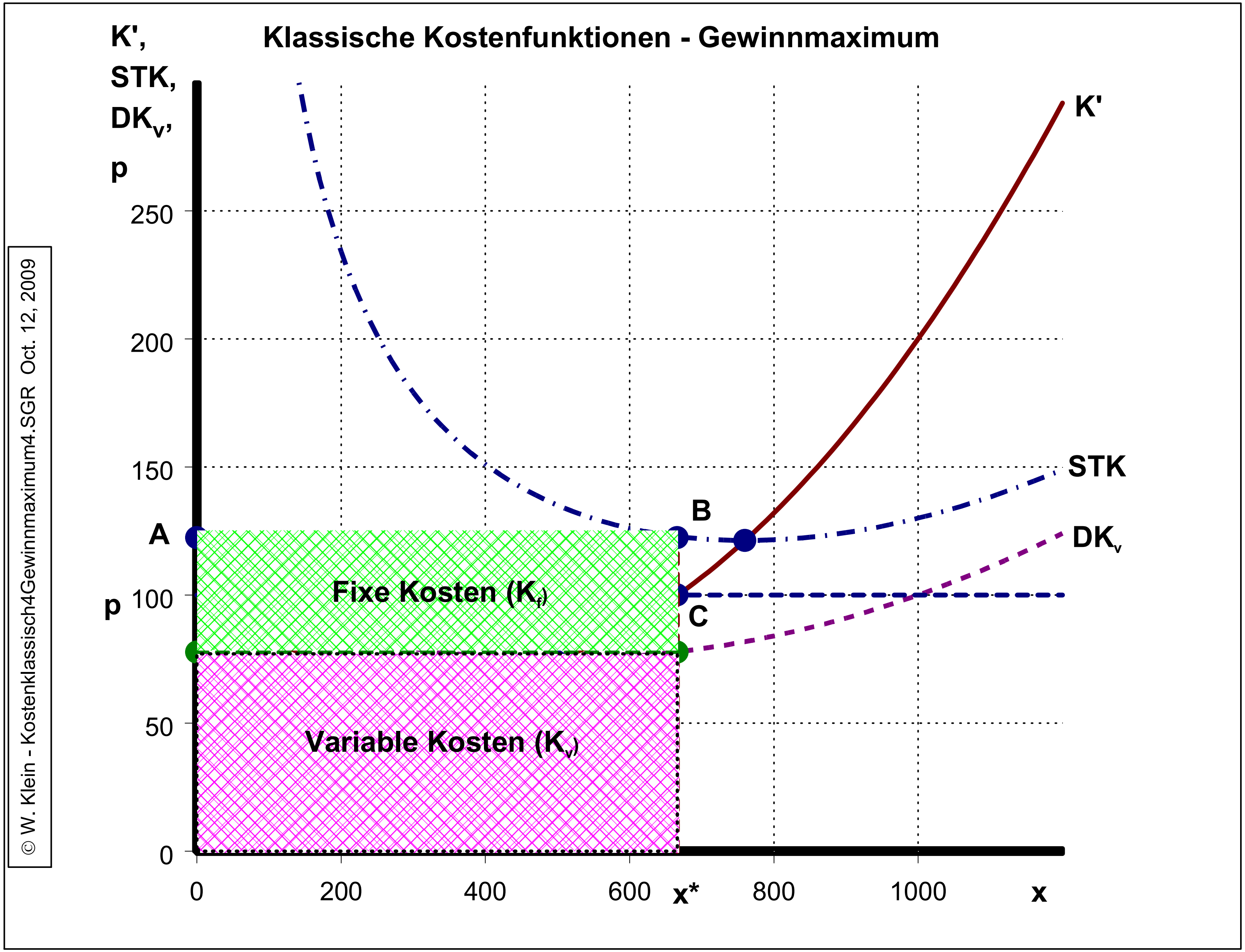

Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K', STK, DK$_v$, p
250
200
150
100
50
0
p
0
200
400
600
x*
800
1000
x
K'
STK
DK$_v$
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum4.SGR Apr. 24, 2008



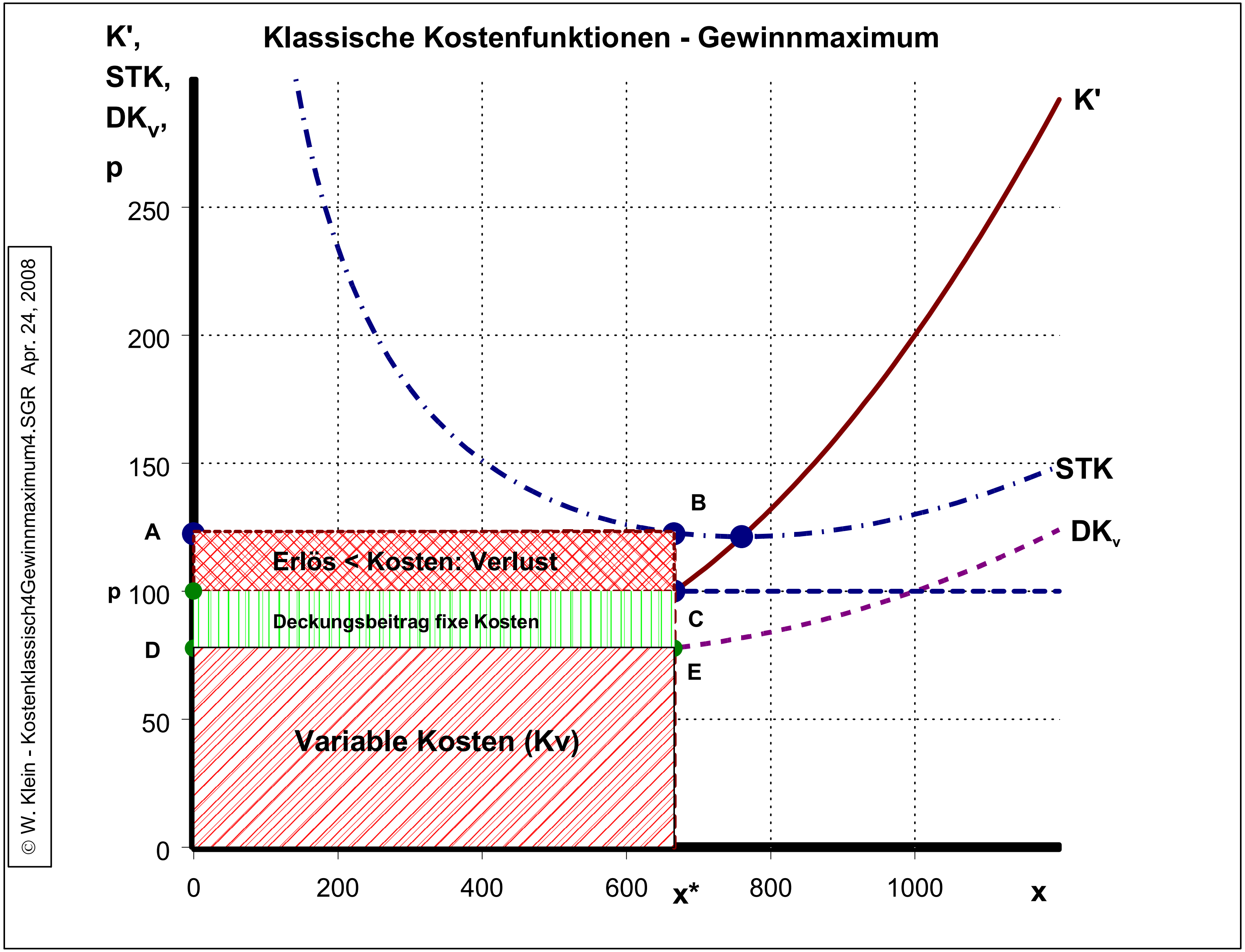
Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K', STK, DK$_v$, p
250
200
150
100
50
0
p
0
200
400
600
x*
800
1000
x
K'
STK
DK$_v$
Erlös
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum4.SGR Apr. 24, 2008



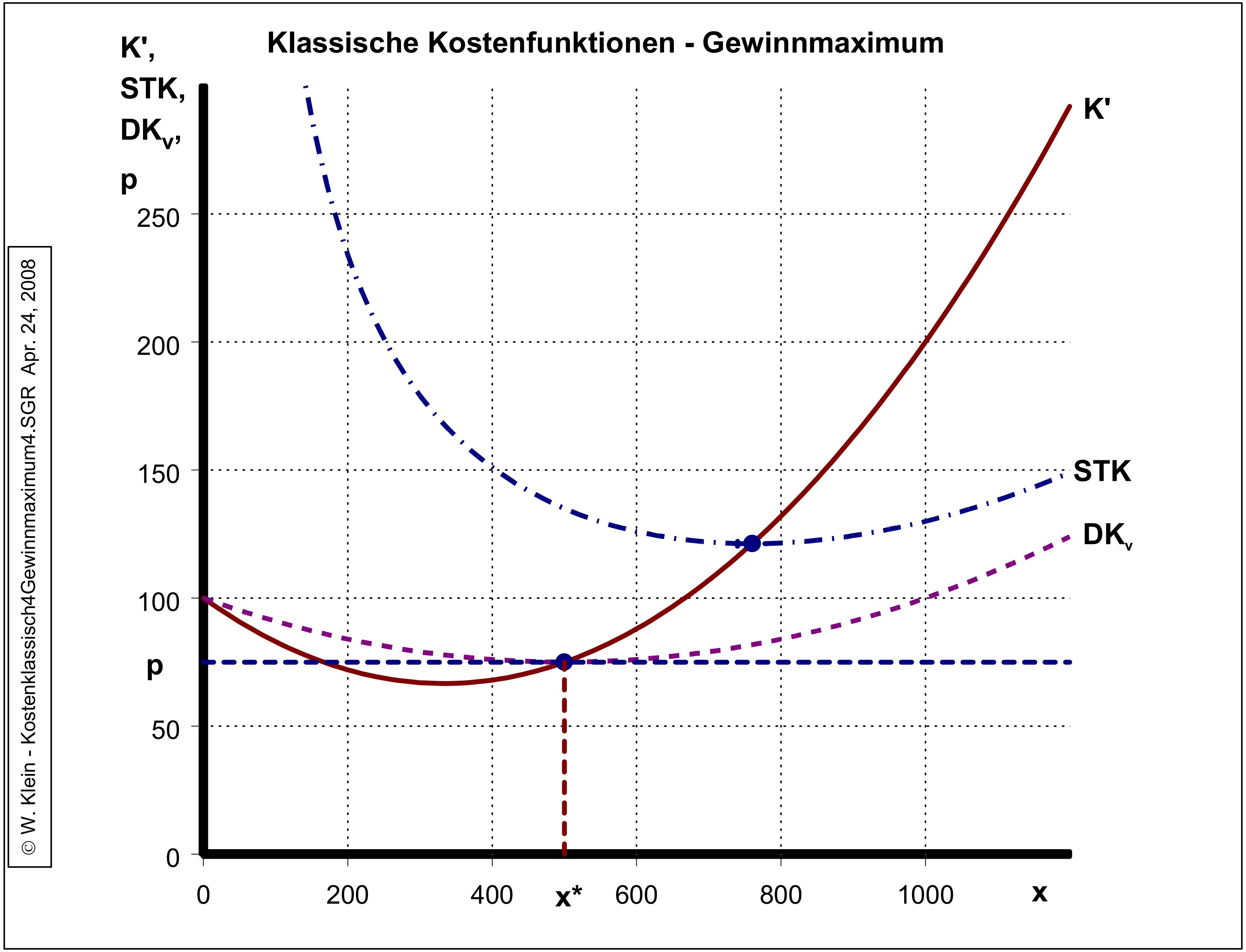
Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
DKv,
p
250
200
150
100
50
0
p
A
B
C
K'
STK
DKv
Kosten
0
200
400
600
x*
800
1000
x
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum4.SGR Apr. 24, 2008



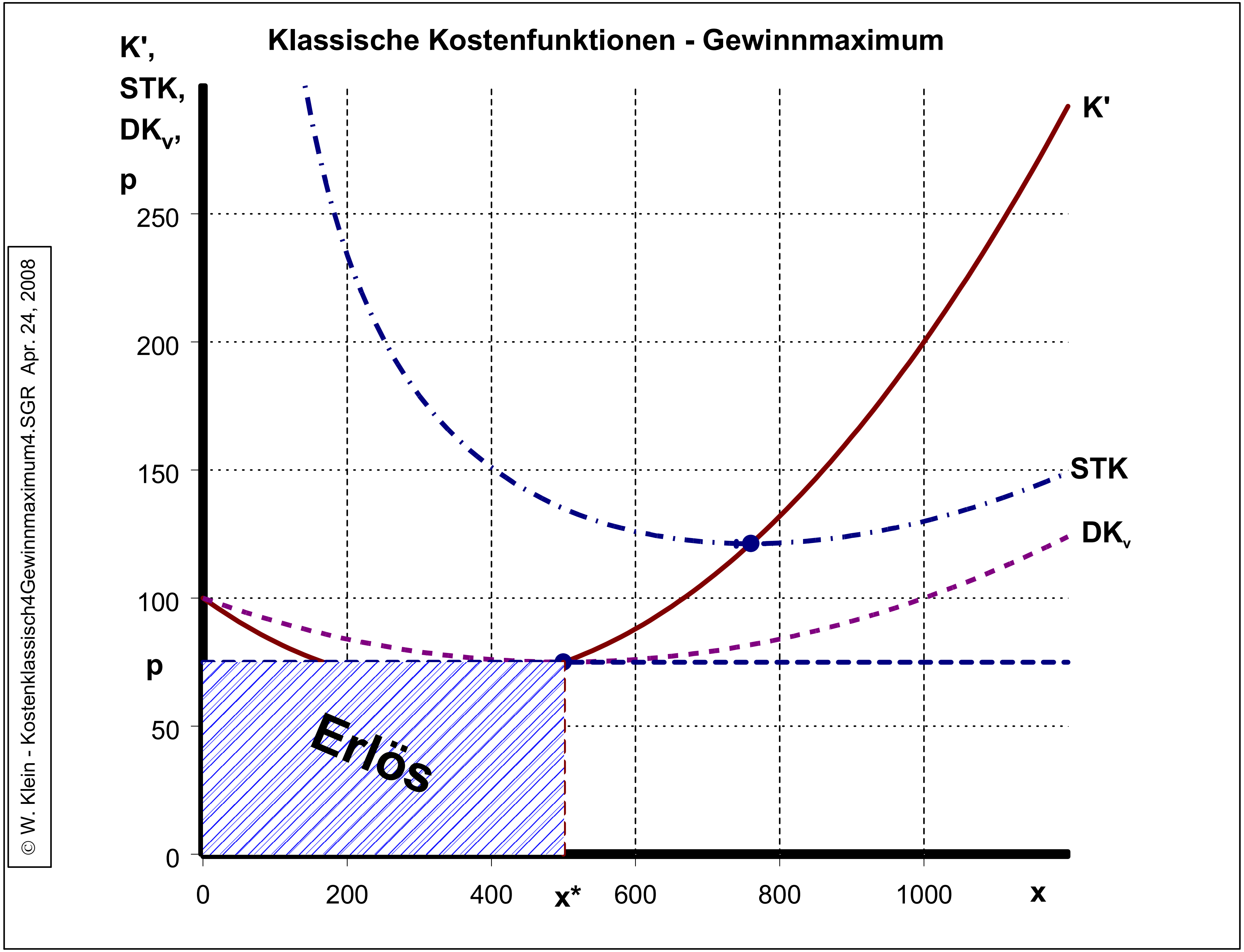
Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K', STK, DK$_v$, p
250
200
150
100
50
0
p
A
B
C
K'
STK
DK$_v$
Fixe Kosten (K$_f$)
Variable Kosten (K$_v$)
0
200
400
600
x*
800
1000
x
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum4.SGR Oct. 12, 2009



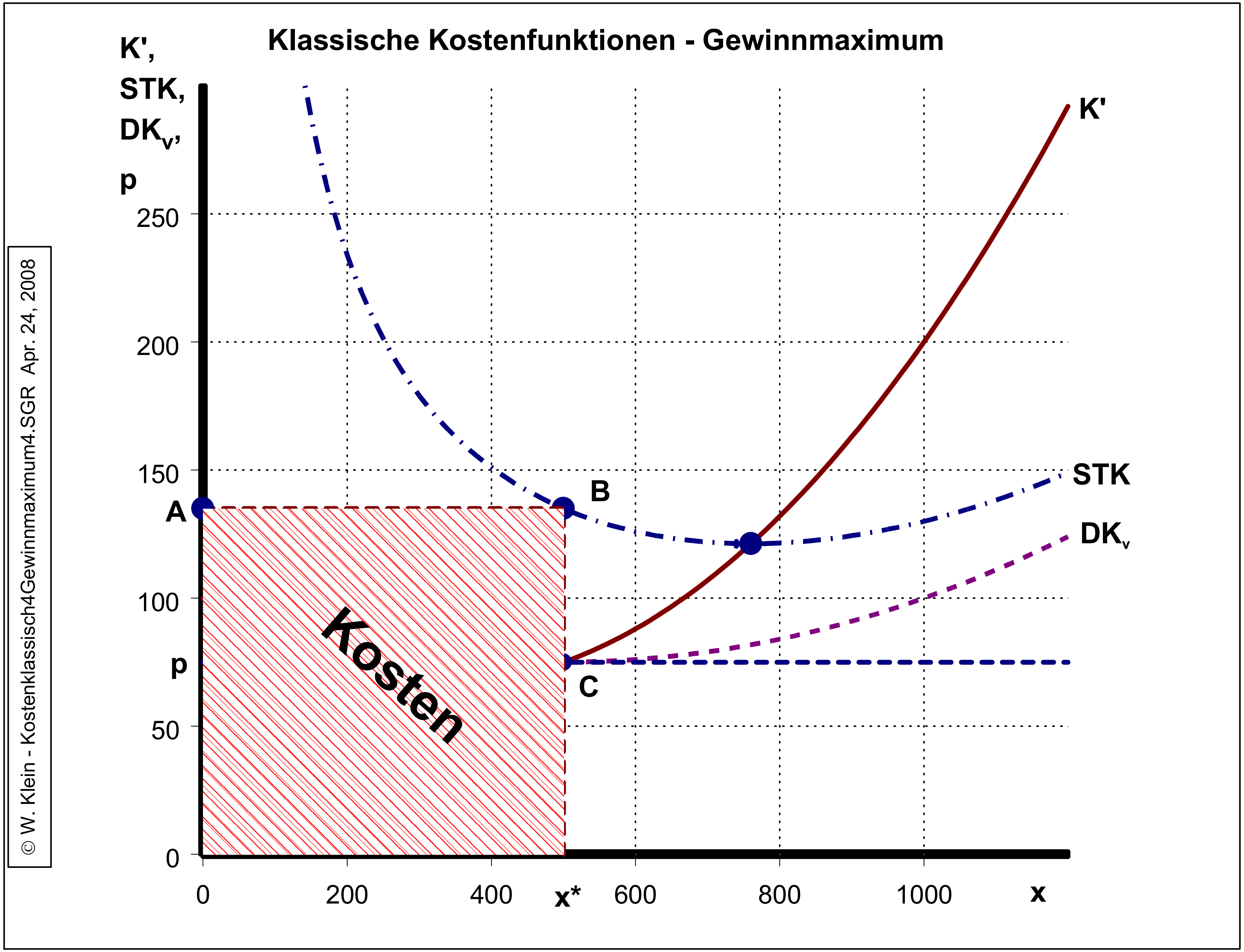
Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
DKv,
p
250
200
150
p 100
50
0
0
200
400
600
x*
800
1000
x
K'
STK
DKv
A
B
C
D
E
Erlös < Kosten: Verlust
Deckungsbeitrag fixe Kosten
Variable Kosten (Kv)
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum4.SGR Apr. 24, 2008



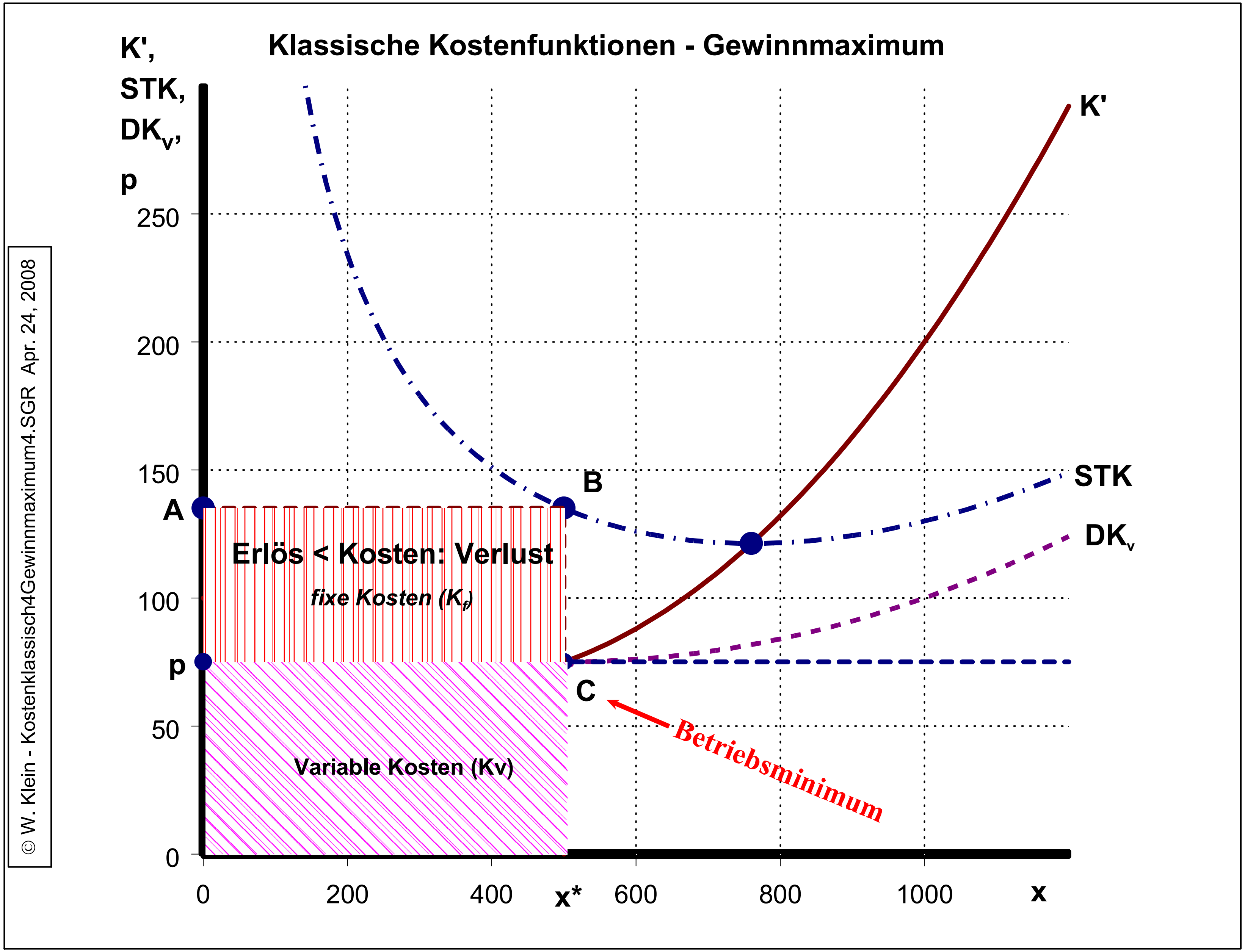
Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
DK_v,
p
250
200
150
100
p
50
0
0
200
400
x*
600
800
1000
x
K'
STK
DK_v

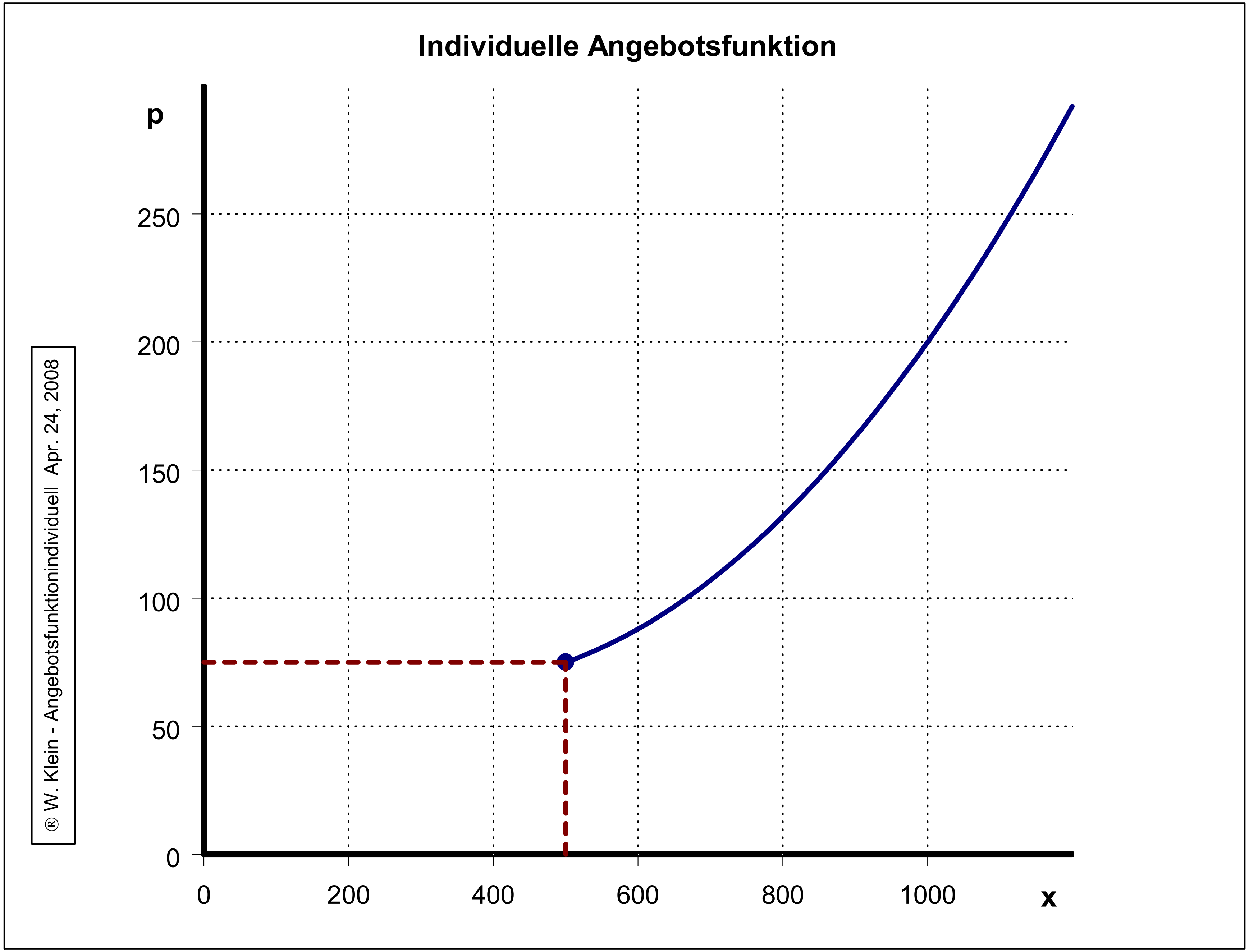


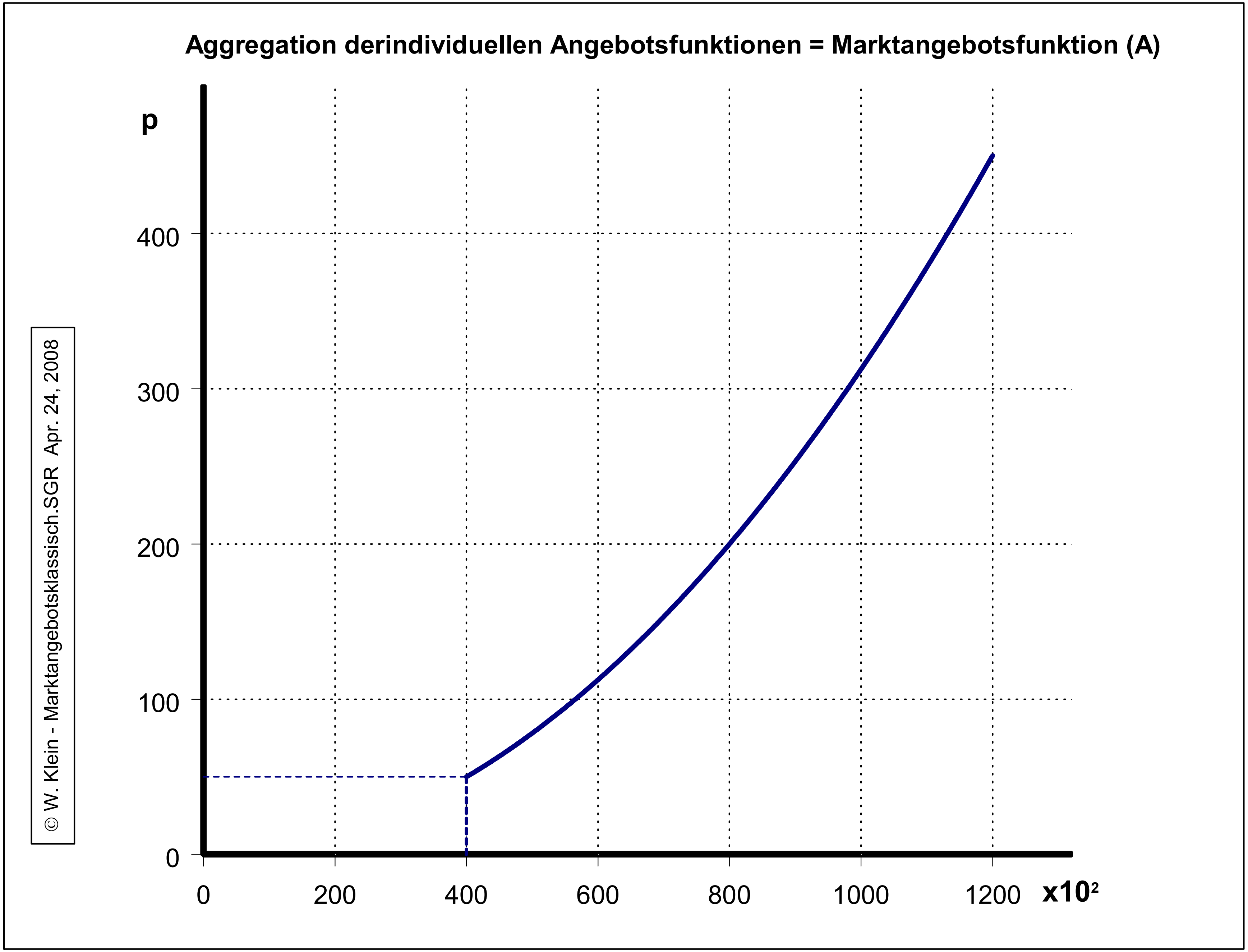
Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
DK$_v$,
p
250
200
150
100
p
50
0
0
200
400
x*
600
800
1000
x
K'
STK
DK$_v$
Erlös
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum4.SGR Apr. 24, 2008

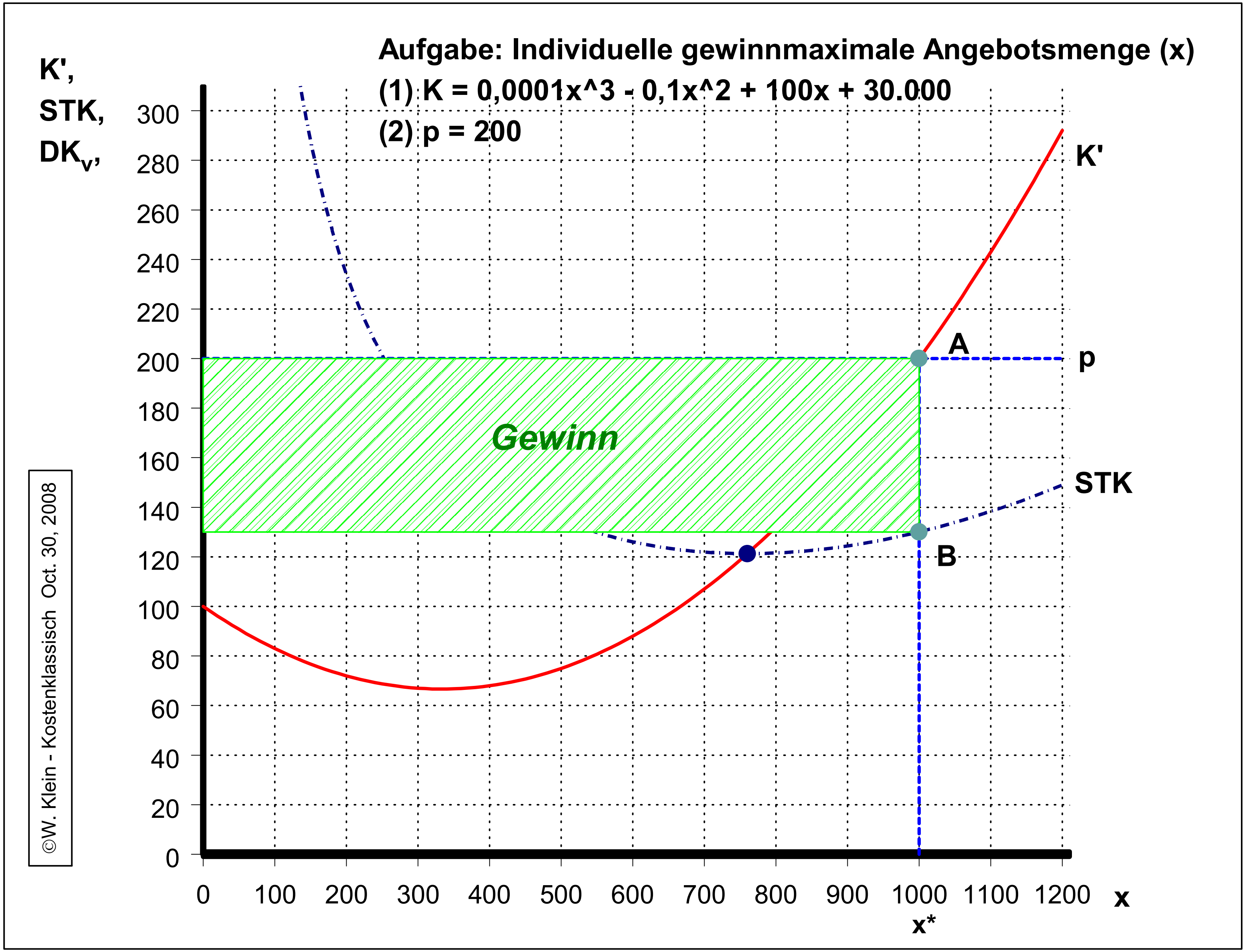


Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K', STK, DKv, p
250
200
150
100
50
0
A
B
C
p
Kosten
K'
STK
DKv
0
200
400
x*
600
800
1000
x
© W. Klein - Kostenklassisch4Gewinnmaximum4.SGR Apr. 24, 2008


Klassische Kostenfunktionen - Gewinnmaximum
K',
STK,
DK$_v$,
p
250
200
150
100
50
0
0
200
400
x*
600
800
1000
x
K'
STK
DK$_v$
A
B
C
p
Erlös < Kosten: Verlust
fixe Kosten (K_f)
Variable Kosten (Kv)
Betriebsminimum


Individuelle Angebotsfunktion
p
250
200
150
100
50
0
0
200
400
600
800
1000
x
® W. Klein - Angebotsfunktionindividuell Apr. 24, 2008


Aggregation derindividuellen Angebotsfunktionen = Marktangebotsfunktion (A)
p
400
300
200
100
0
0
200
400
600
800
1000
1200
x10²
© W. Klein - Marktangebotsklassisch.SGR Apr. 24, 2008



Aufgabe: Individuelle gewinnmaximale Angebotsmenge (x)
(1) K = 0,0001x^3 - 0,1x^2 + 100x + 30.000
(2) p = 200
K',
STK,
DKv,
300
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
x
x*
K'
A
p
Gewinn
STK
B
©W. Klein - Kostenklassisch Oct. 30, 2008

Lösung:

$$(1) K = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 100x + 30000 \quad (2) K' = p \quad (3) K' = \frac{dK}{dx} = 0{,}0003x^2 - 0{,}2x + 100$$

$$(4) p = 200$$

$$(5) 0{,}0003x^2 - 0{,}2x + 100 = 200$$

$$(6) 0{,}0003x^2 - 0{,}2x - 100 = 0 \mid \div 0{,}0003$$

$$(7) x^2 - 666{,}6x - 333333{,}3 = 0$$

$$(8) x_{(1,2)} = -\frac{-666{,}6}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{666{,}6}{2})^2 + 333333{,}3}$$

$$(9) x_{(1,2)} = 333{,}3 \pm 666{,}6$$

$$(10) x_1^* = 1000 \quad [(11) x_2 = -333{,}3]$$

$$(12) G = E - K \quad (13) E = 200 \cdot 1000 = 200000$$

$$(14) K = STK \cdot x$$

$$(15) STK = 0{,}0001x^2 - 0{,}1x + 100 + \frac{30000}{x}$$

$$(16) STK_{(1000)} = 0{,}0001(1000)^2 - 0{,}1 \cdot 1000 + 100 + \frac{30000}{1000} = 130$$

$$(17) K = 130 \cdot 1000 = 130000 \quad (18) G = E - K = 200000 - 130000 = 70000$$

Lineare Kostenfunktionen

$$(1)\ K_{(x)} = c \cdot x + d \ mit$$

$$(2)\ K_v = c \cdot x \ und$$

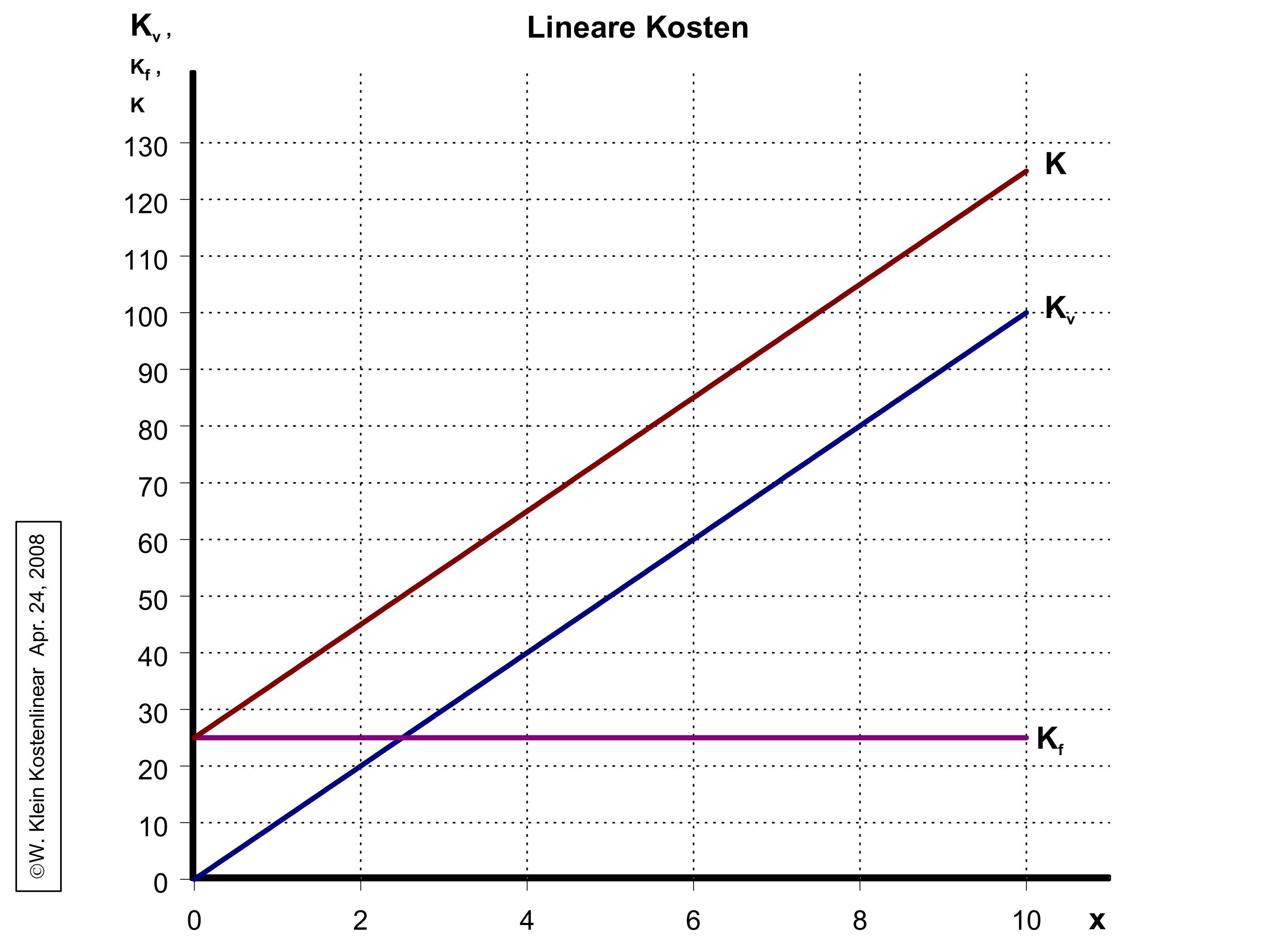
$$(3)\ K_f = d.\ Aus\ (1)\ und\ (2)\ folgt$$

$$(4)\ K' = \frac{dK_{(x)}}{dx} = \frac{dK_v}{dx} = c \ und$$

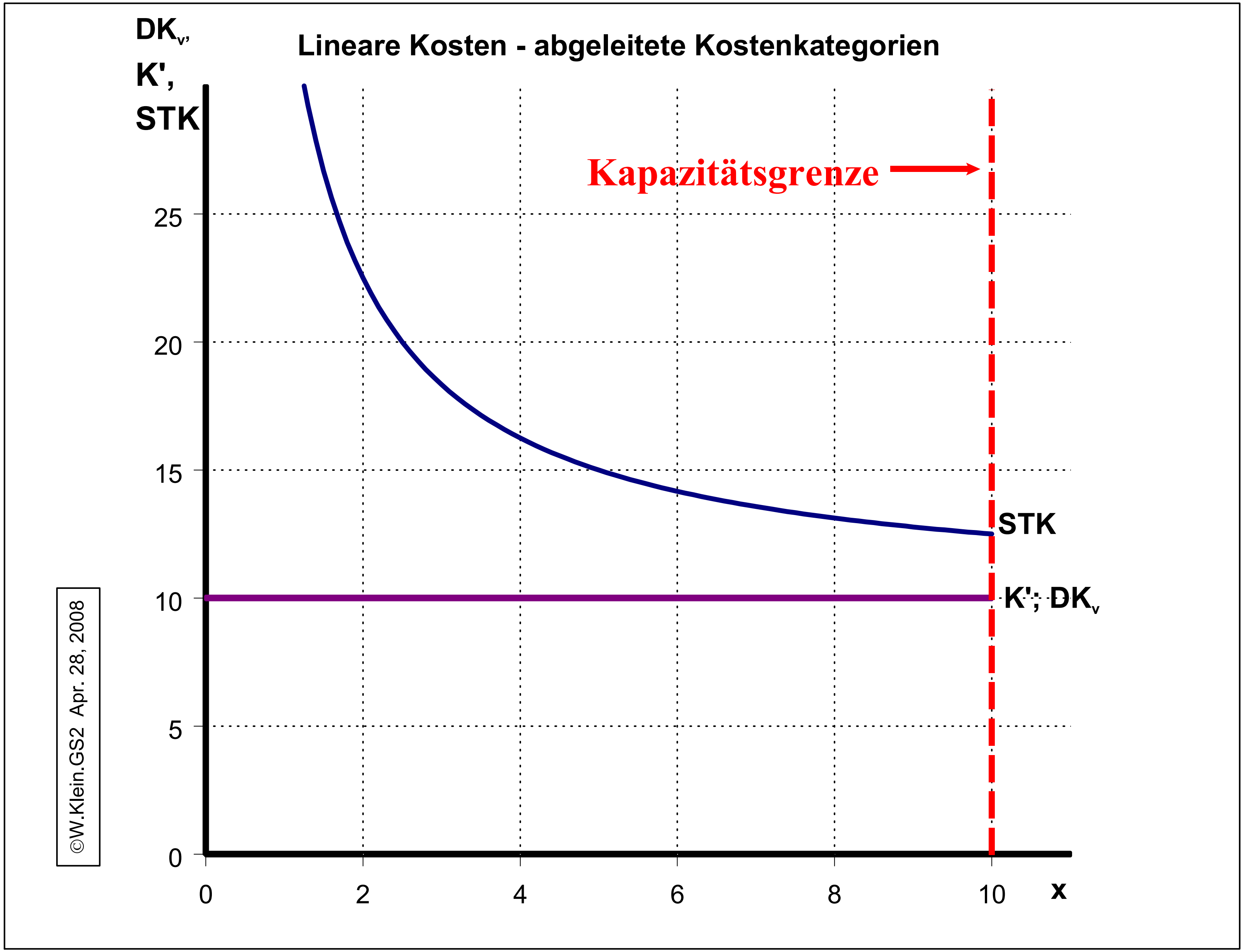
$$(5)\ DK_v = \frac{K_v}{x} = c \ und$$

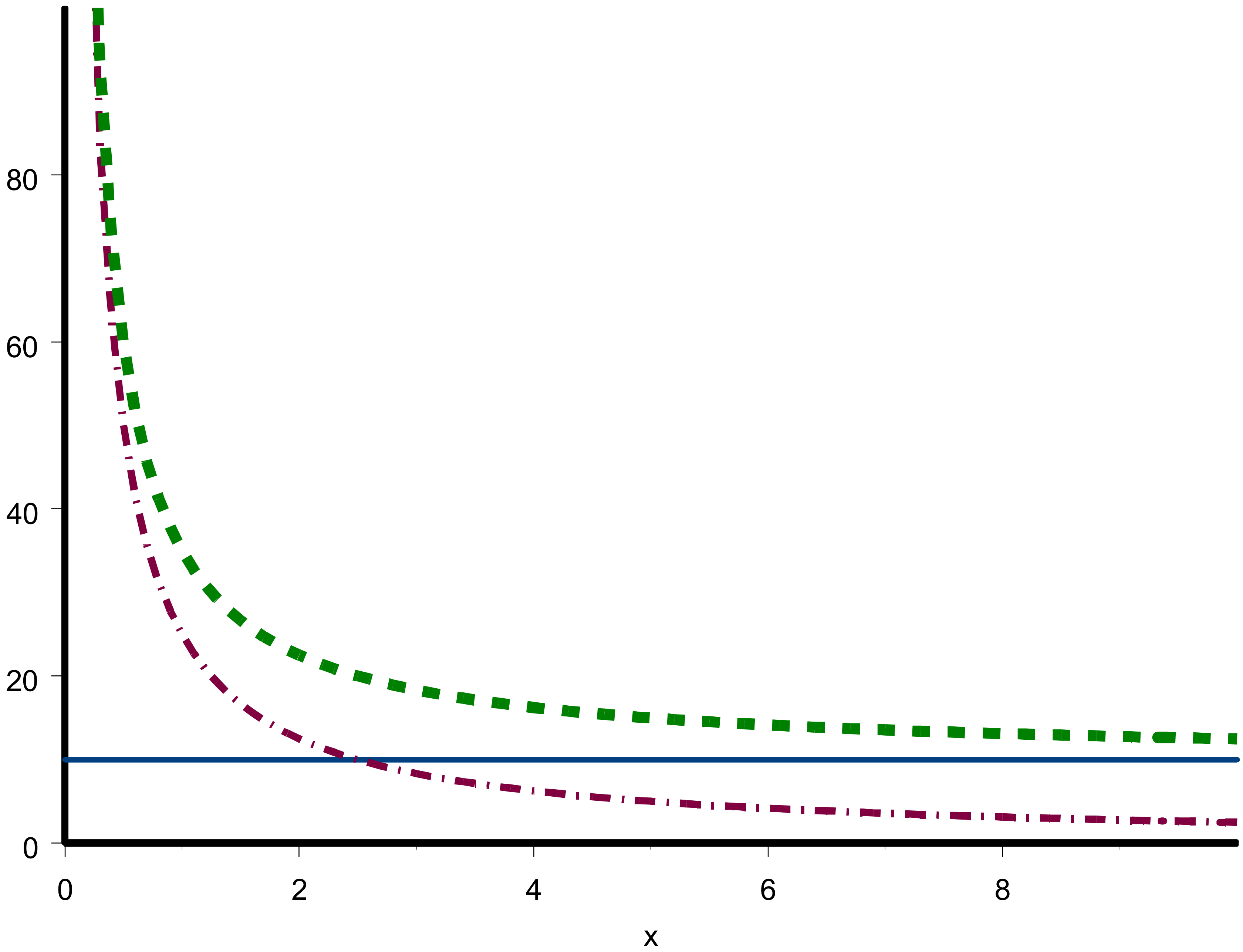
$$(6)\ DK_f = \frac{K_f}{x} = \frac{d}{x}$$

$$(7)\ STK = \frac{K_{(x)}}{x} = \frac{c \cdot x + d}{x} = c + \frac{d}{x}$$

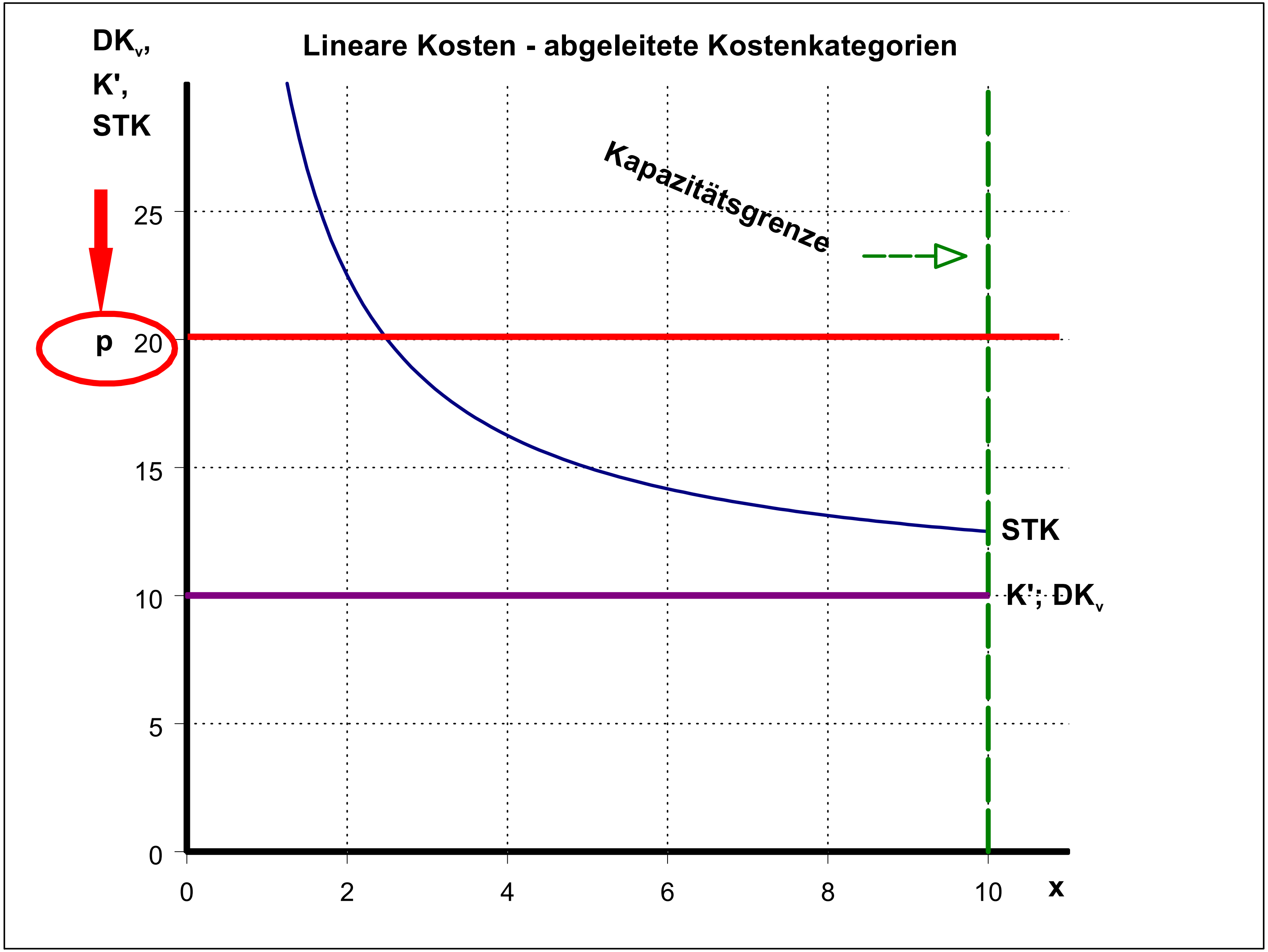


Lineare Kosten
Kv ,
Kf ,
K
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
2
4
6
8
10
x
K
Kv
Kf
©W. Klein Kostenlinear Apr. 24, 2008

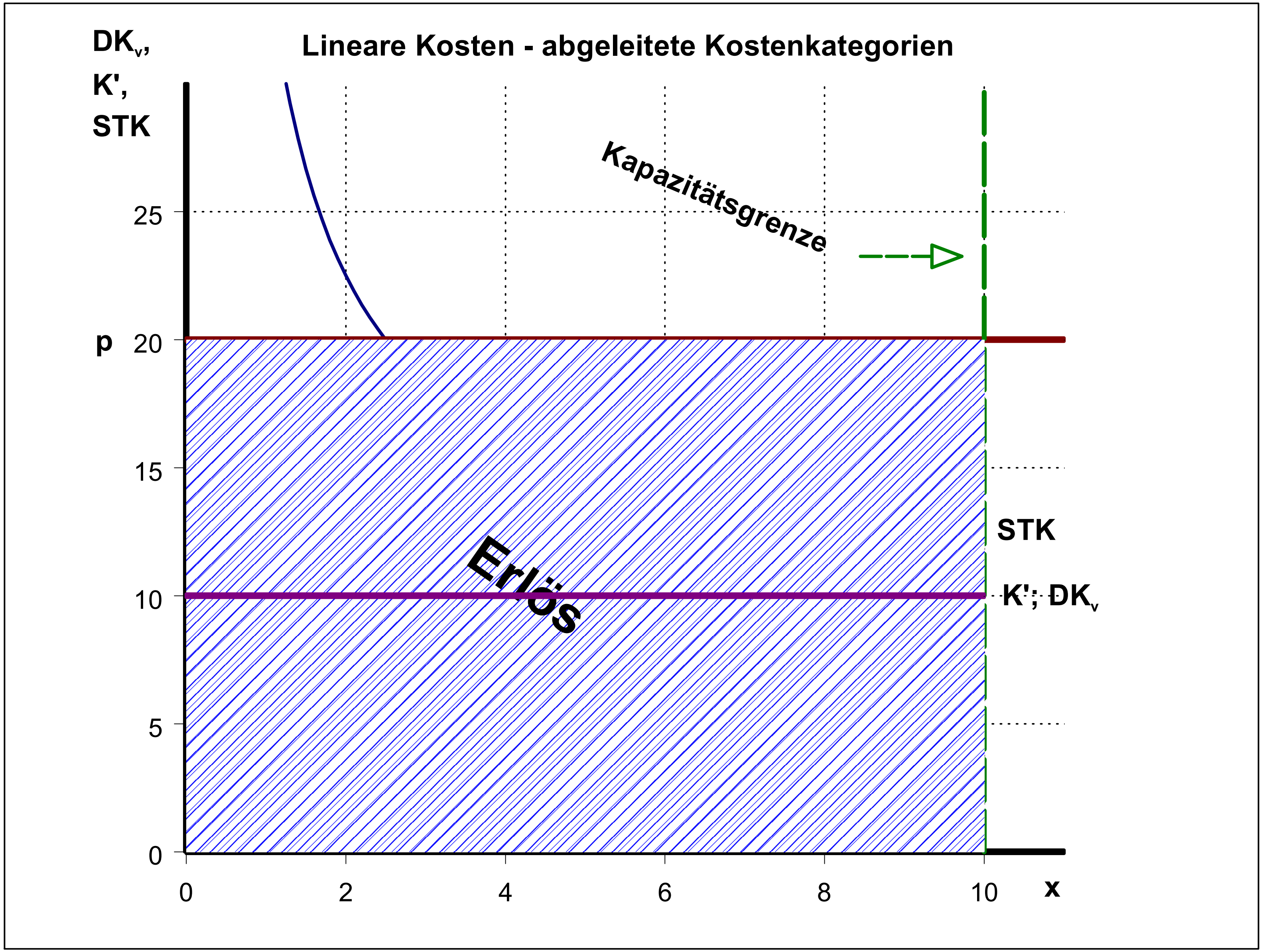

Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv, K', STK
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DKv
x
0
2
4
6
8
10
0
5
10
15
20
25
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008



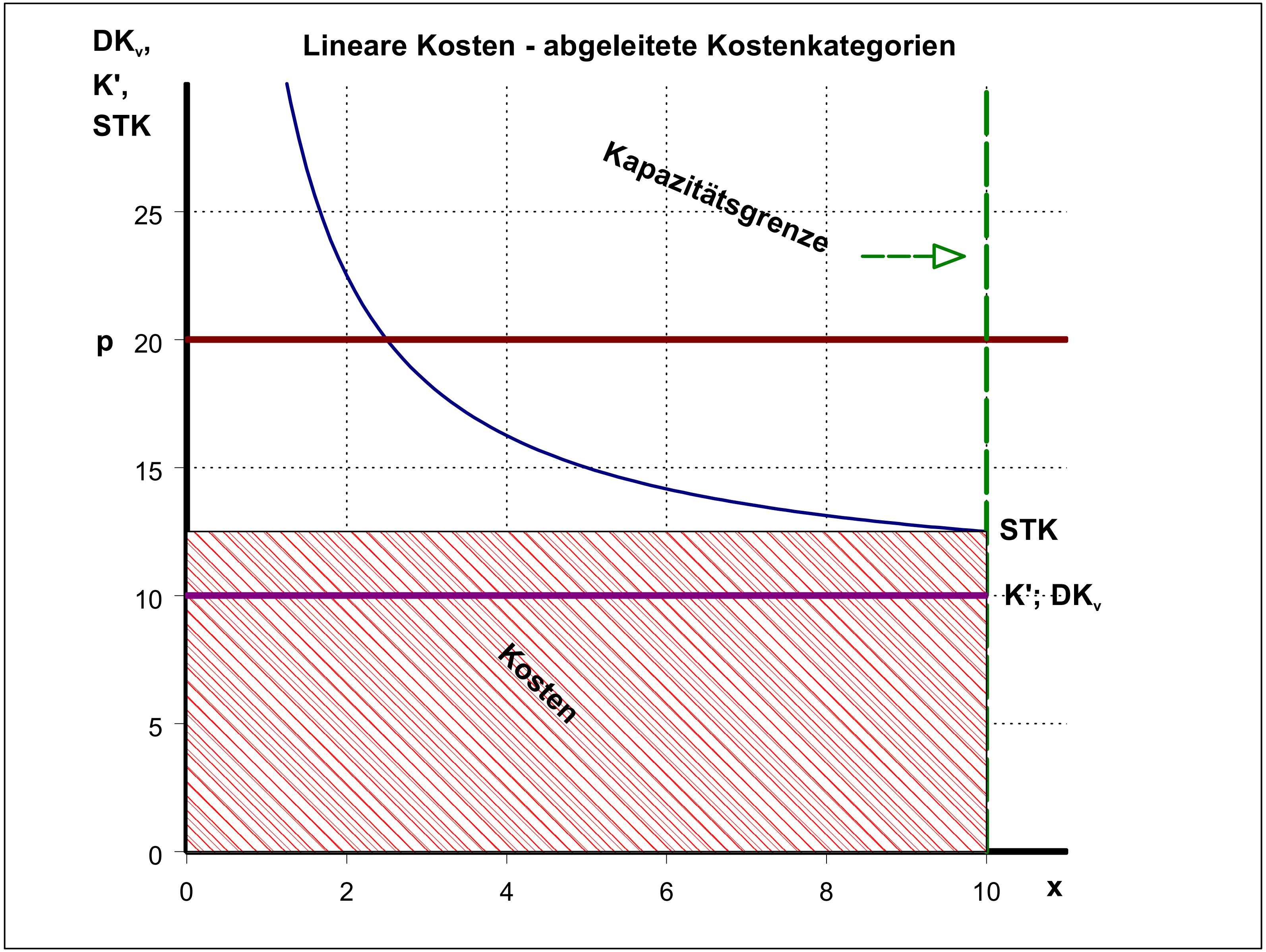
80
60
40
20
0
0
2
4
6
8
x



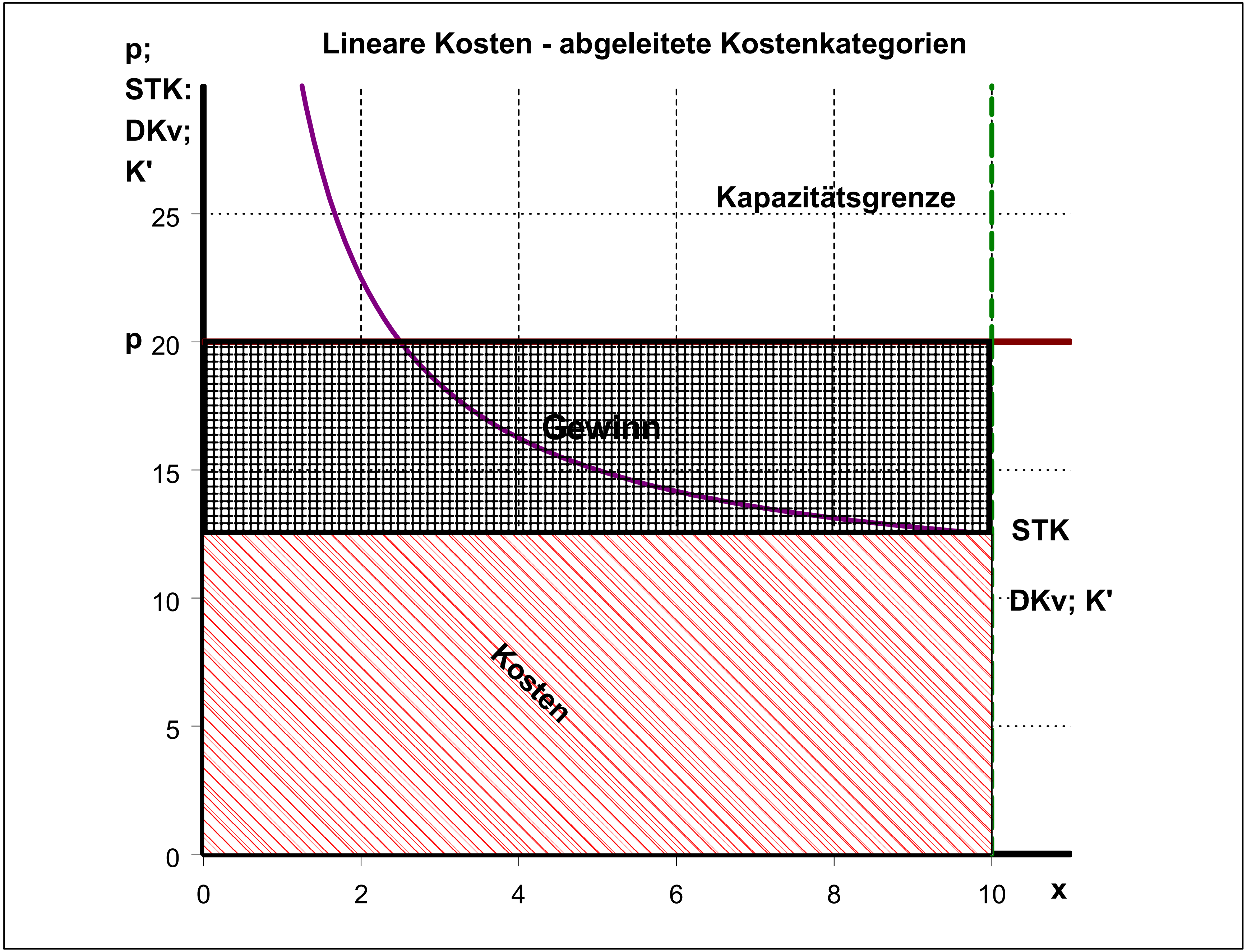
Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DK_v,
K',
STK
25
p 20
15
10
5
0
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DK_v

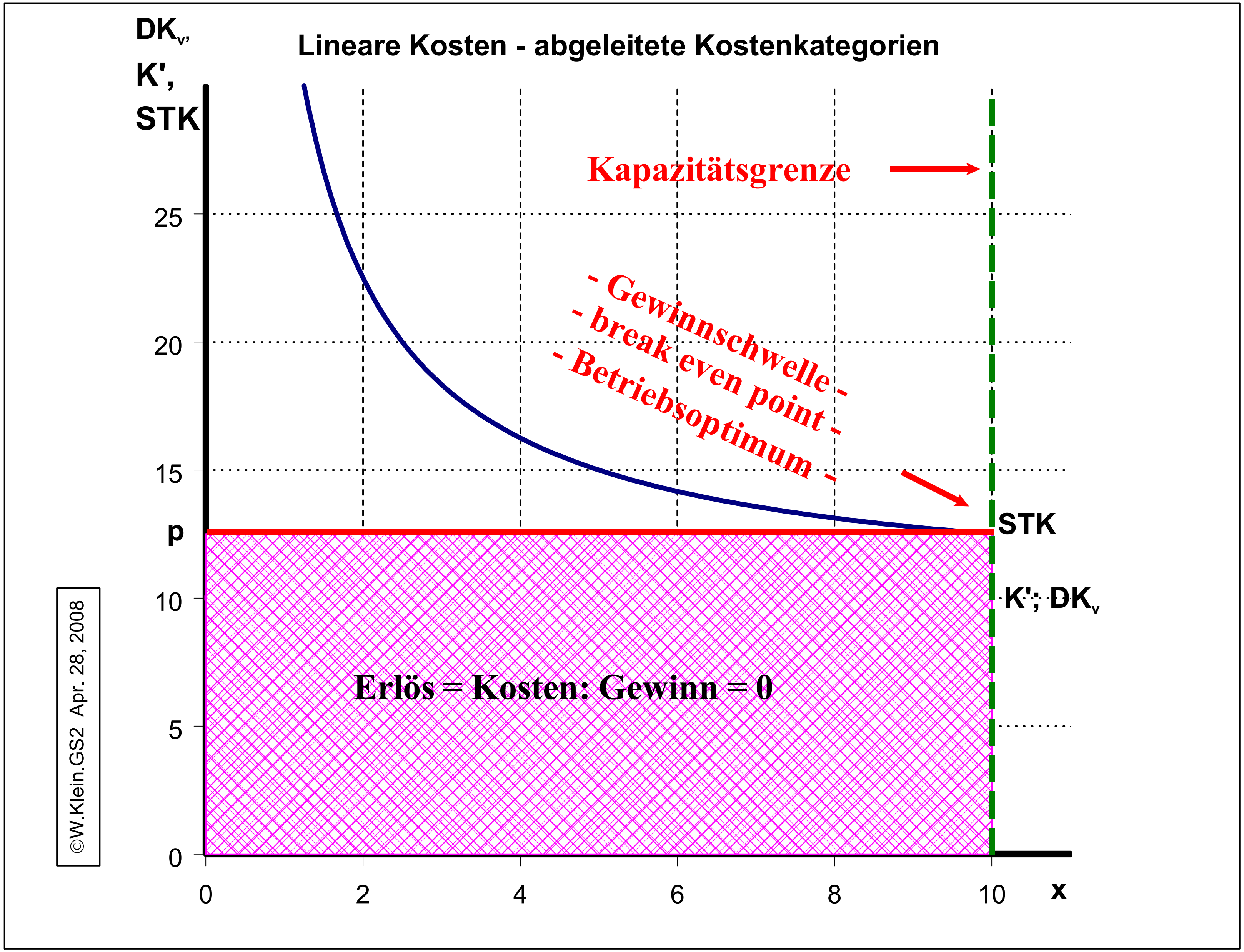


Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv,
K',
STK
Kapazitätsgrenze
p
25
20
15
10
5
0
Erlös
STK
K'; DKv
0
2
4
6
8
10
x

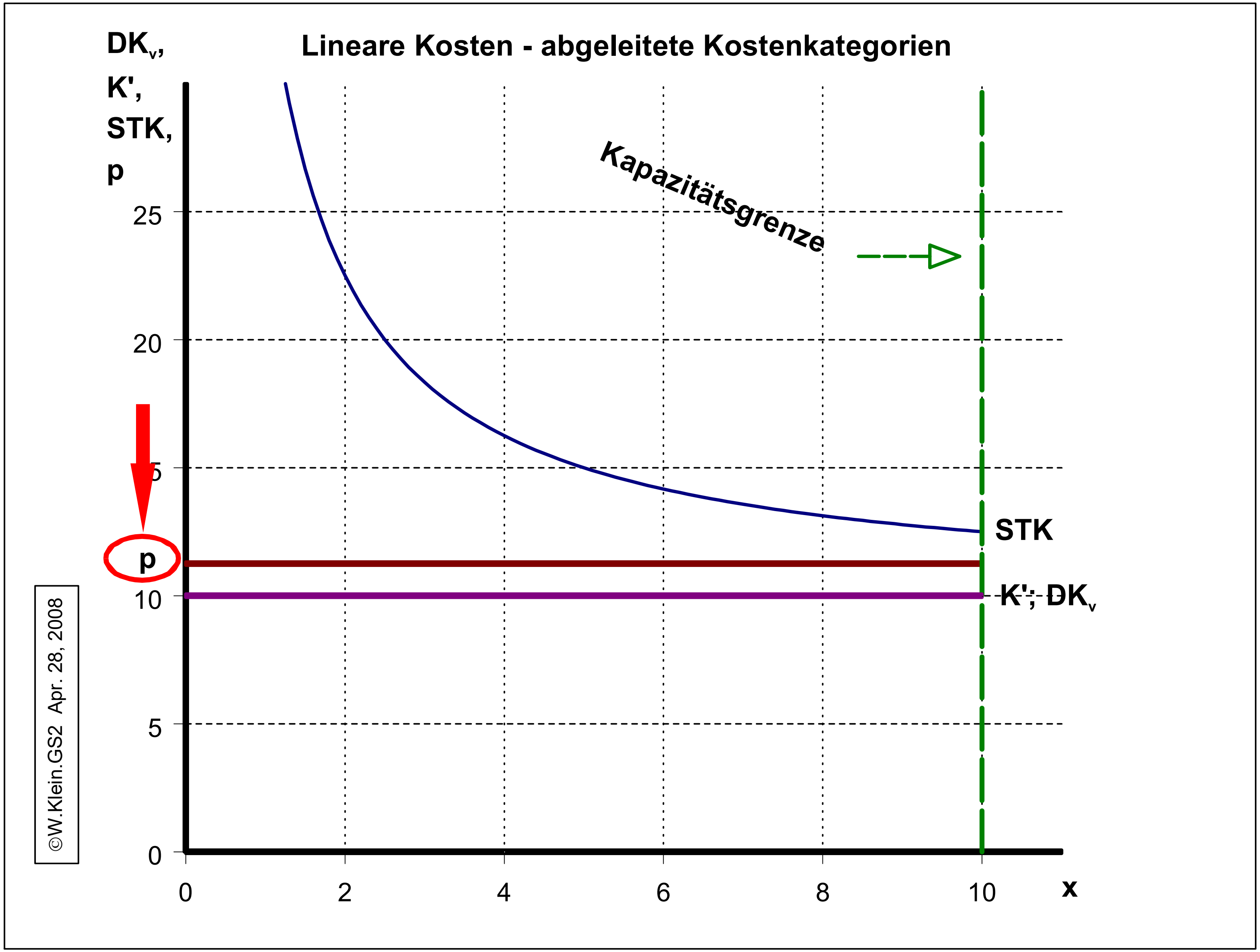


Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DK$_v$,
K',
STK
Kapazitätsgrenze
p
25
20
15
10
5
0
STK
K'; DK$_v$
Kosten
0
2
4
6
8
10
x

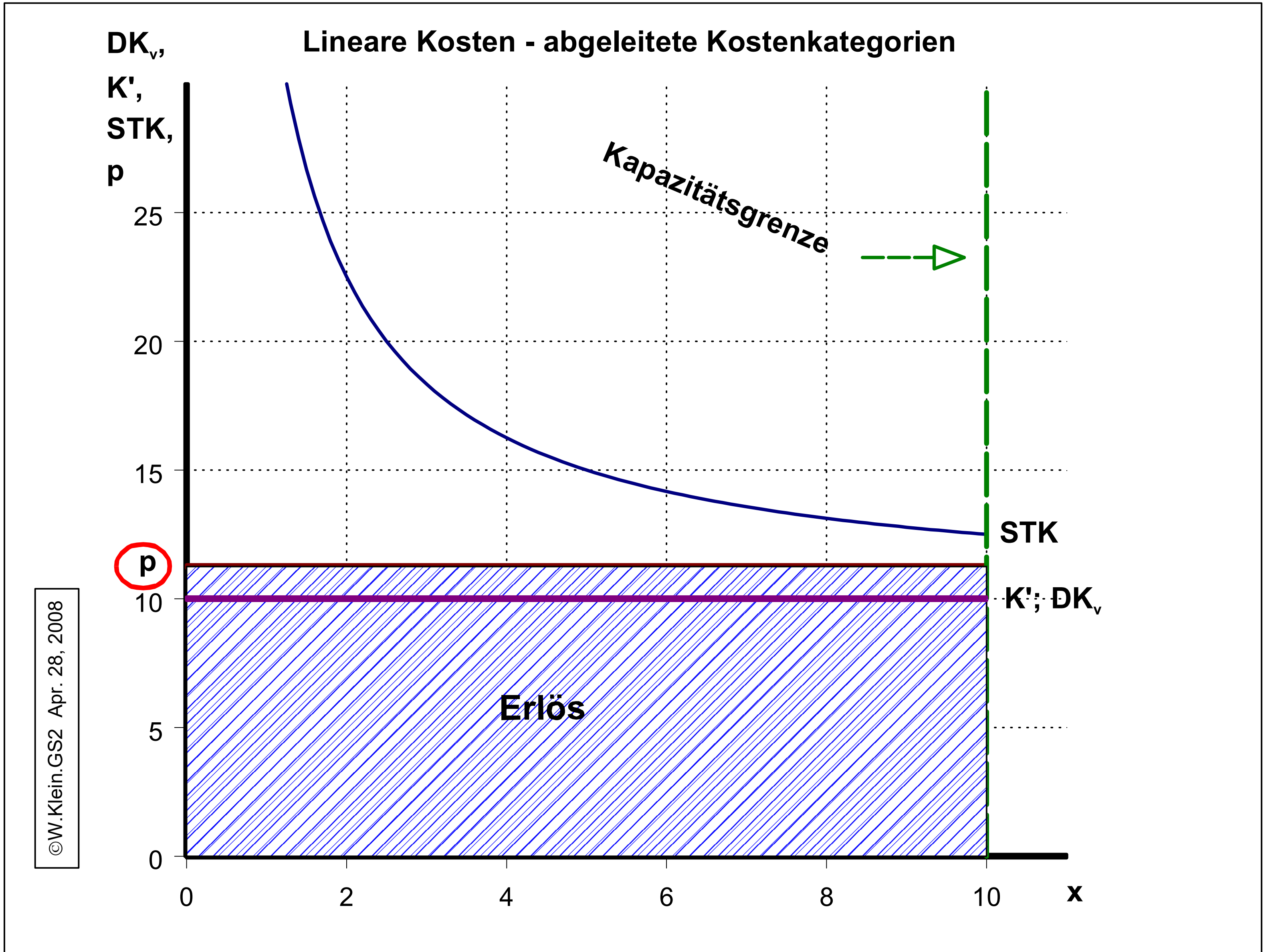

Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
p;
STK:
DKv;
K'
25
p 20
15
10
5
0
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
Gewinn
Kosten
STK
DKv; K'



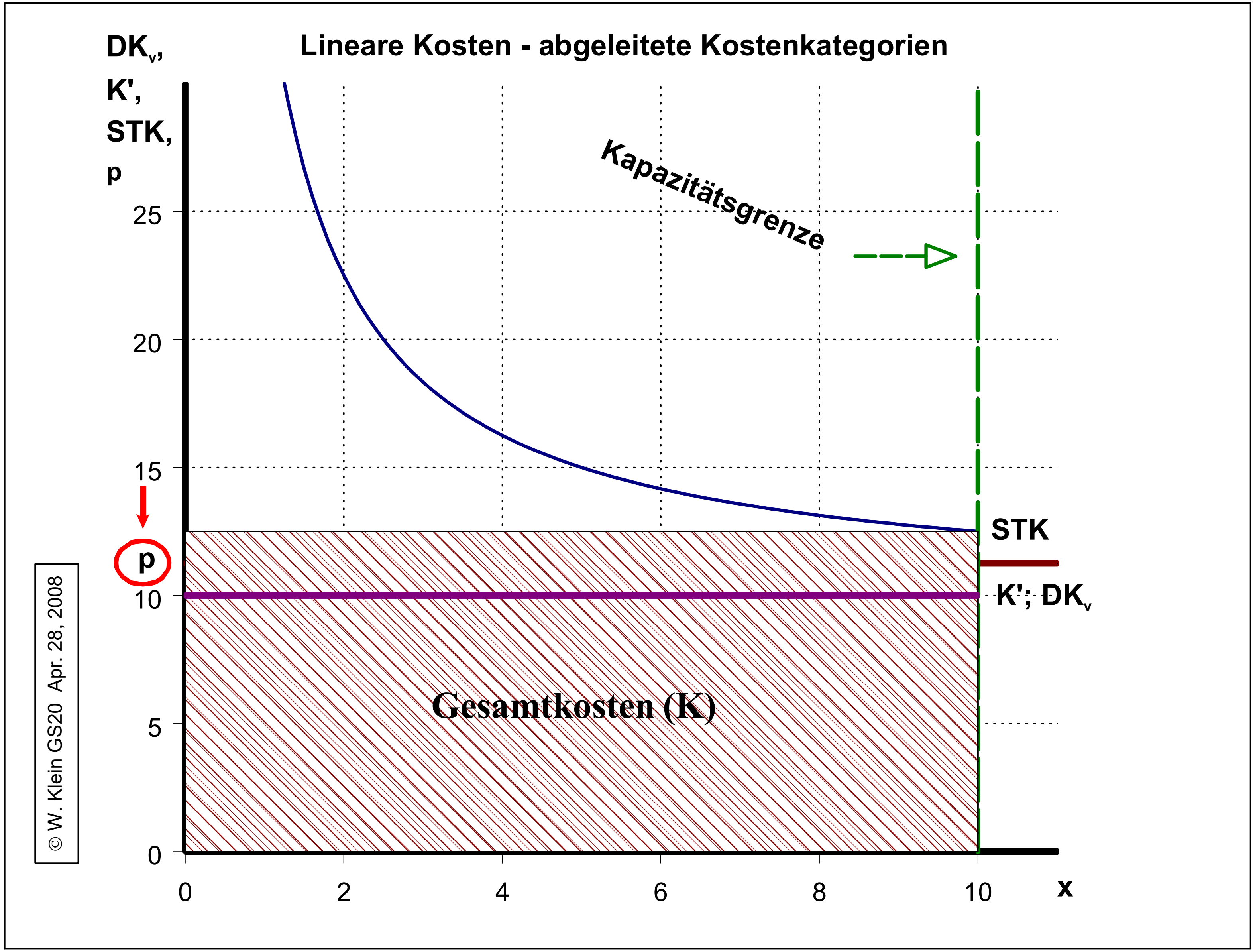
DK_v,
K',
STK
Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
Kapazitätsgrenze
- Gewinnschwelle -
- break even point -
- Betriebsoptimum -
25
20
15
p
10
5
0
STK
K'; DK_v
Erlös = Kosten: Gewinn = 0
0
2
4
6
8
10
x
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008

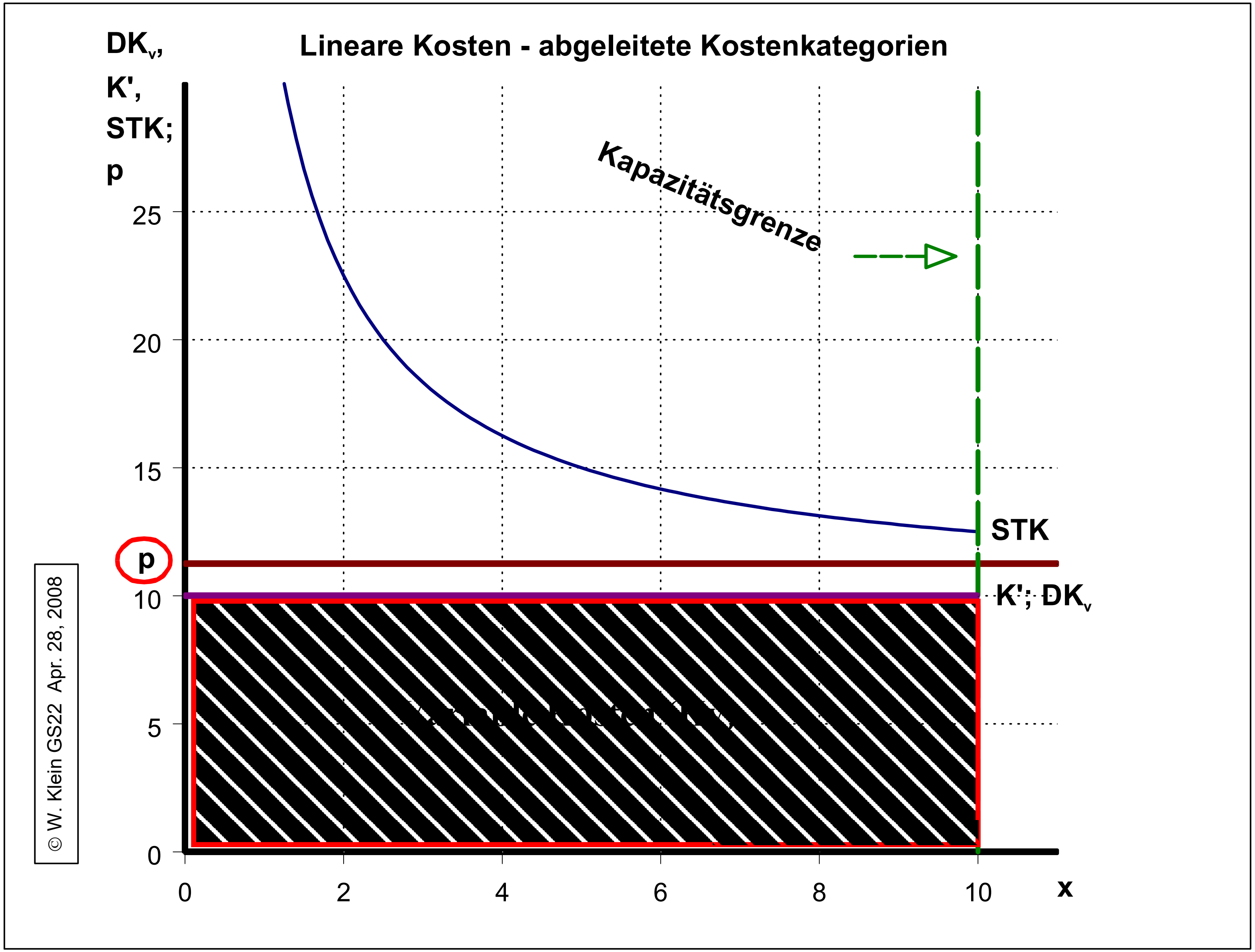


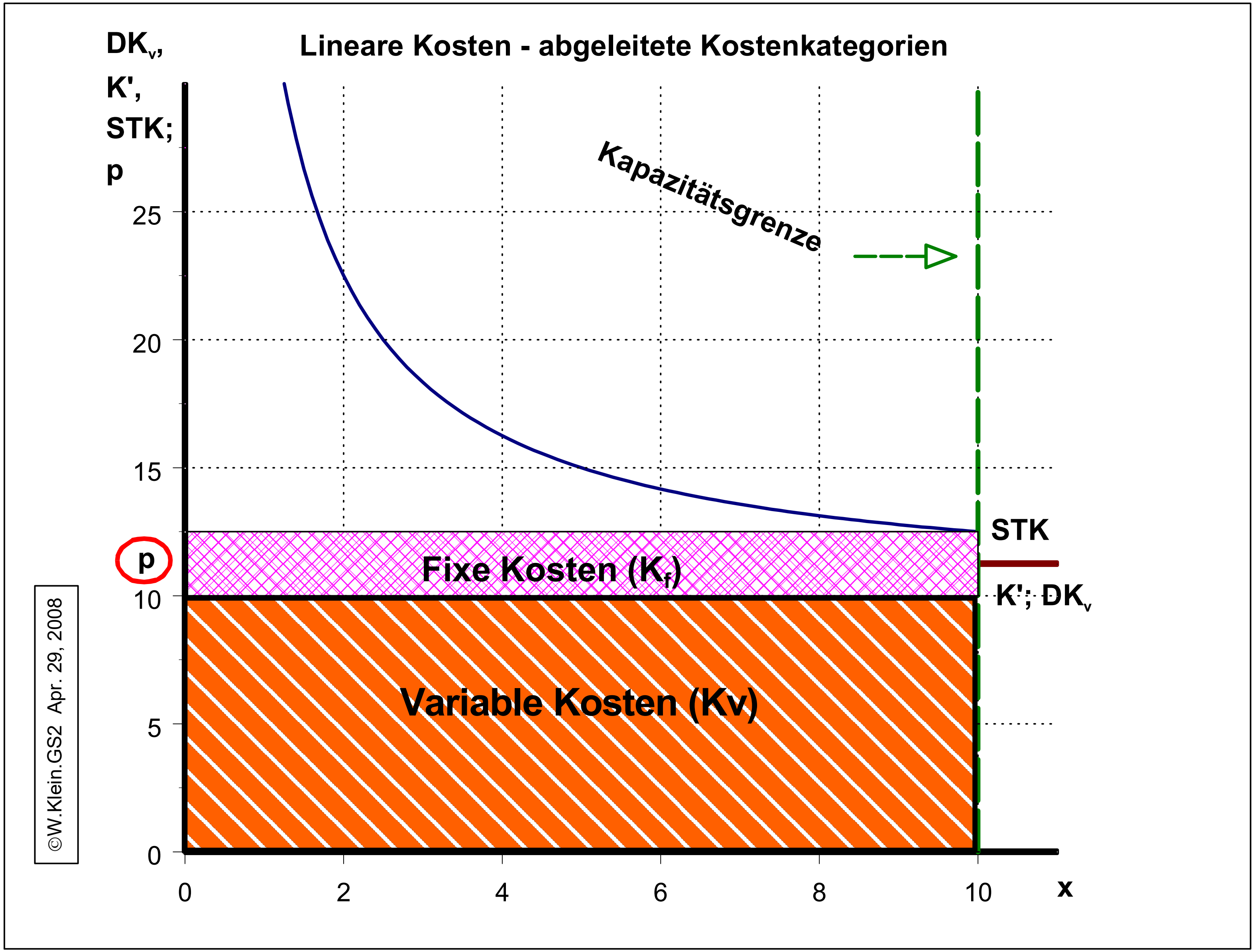
Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DK_v, K', STK, p
25
20
15
10
5
0
p
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DK_v
0
2
4
6
8
10
x
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008



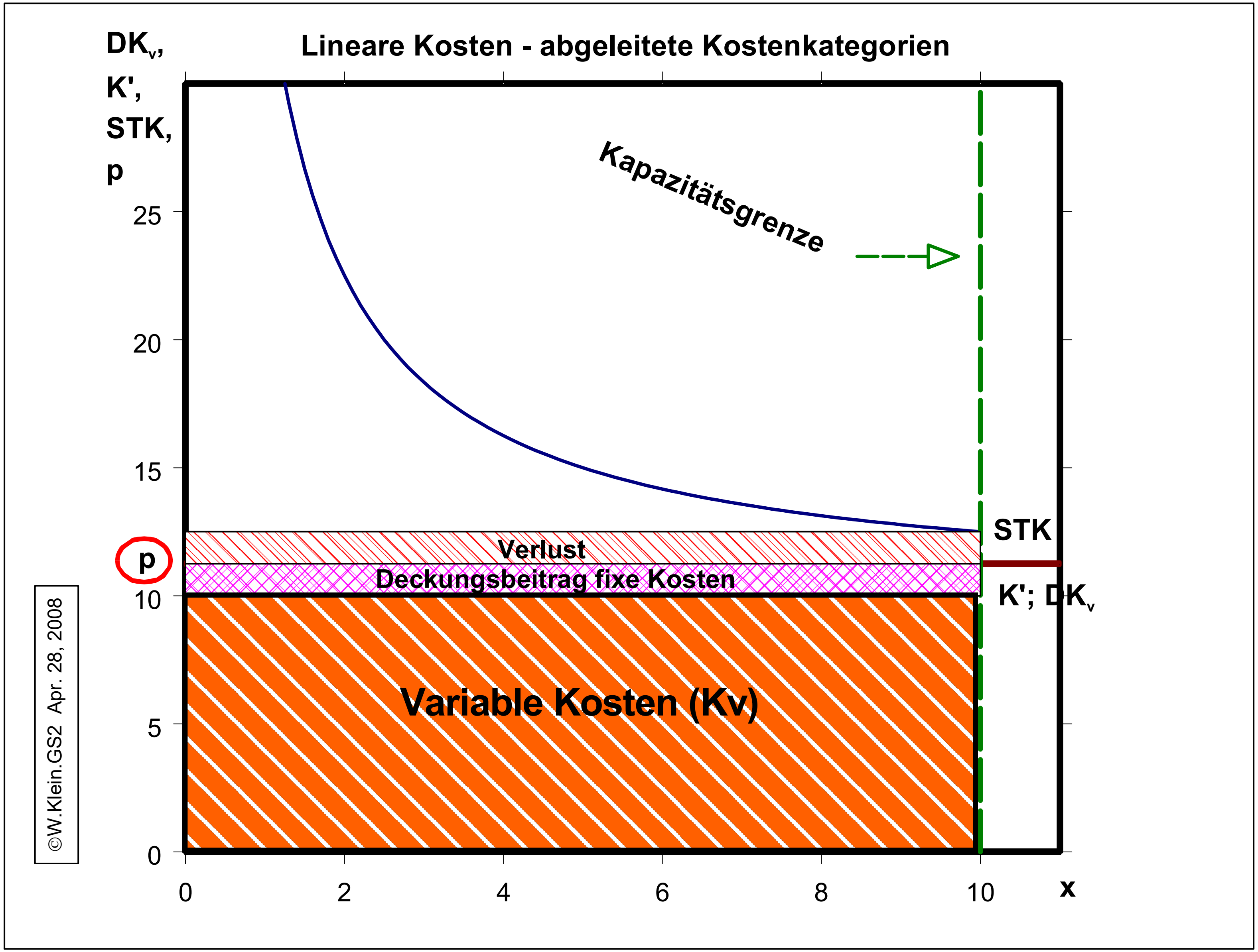
Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv,
K',
STK,
p
25
20
15
10
5
0
p
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DKv
Erlös
0
2
4
6
8
10
x
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008

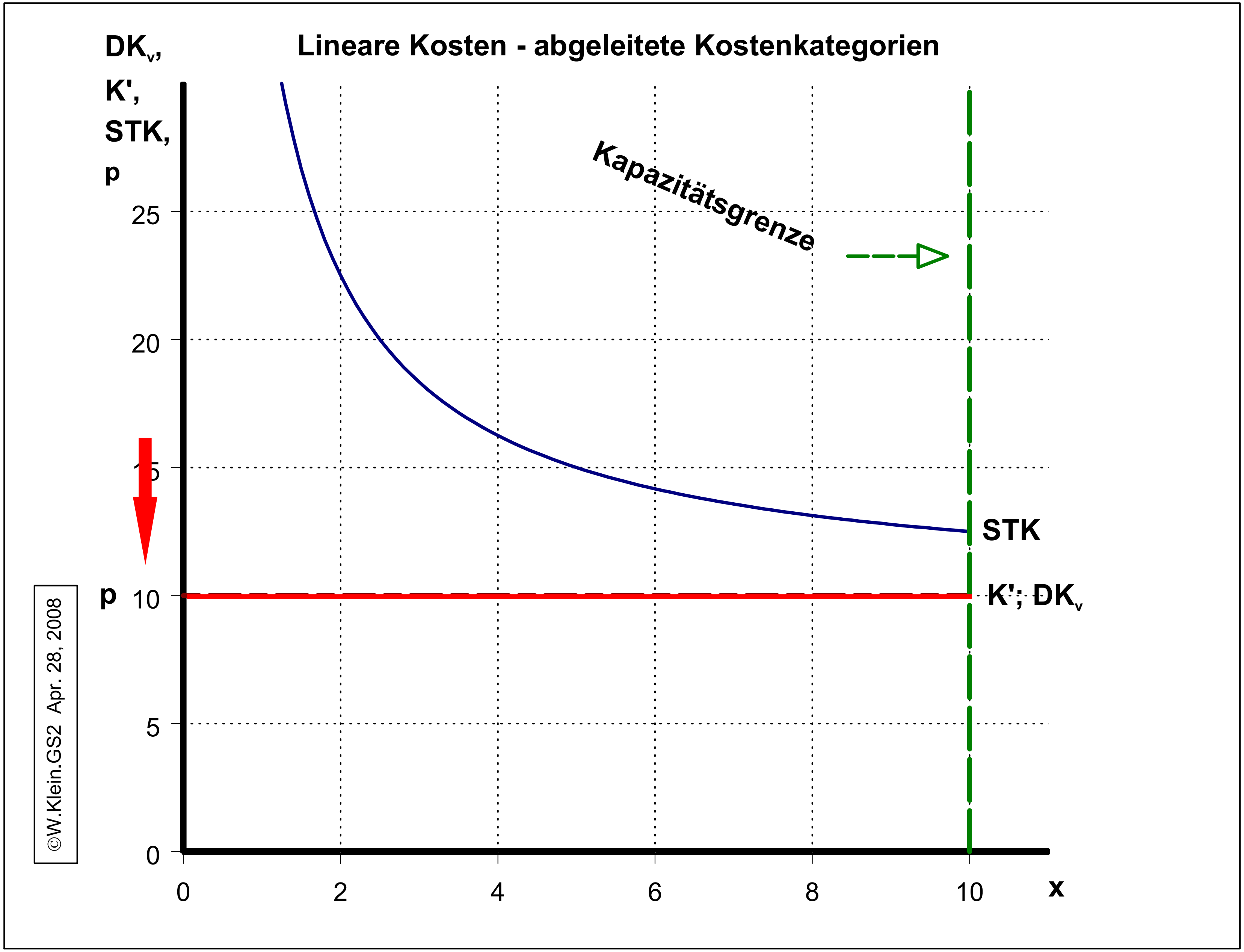

Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv, K', STK, p
25
20
15
p
10
5
0
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DKv
Gesamtkosten (K)
© W. Klein GS20 Apr. 28, 2008


Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv,
K',
STK;
p
25
20
15
10
5
0
p
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DKv
0
2
4
6
8
10
x
© W. Klein GS22 Apr. 28, 2008

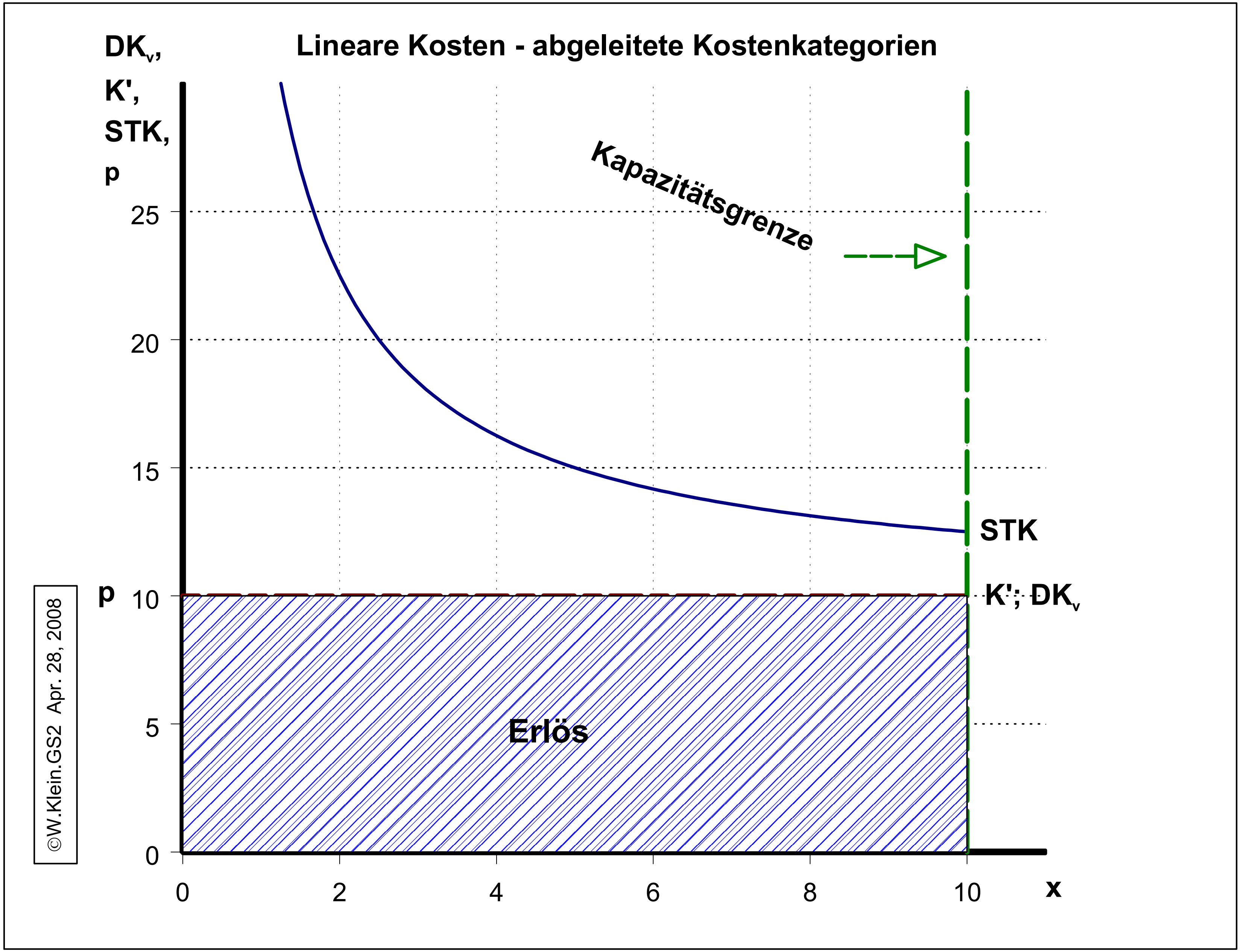


Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv, K', STK; p
25
20
15
p
10
5
0
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
STK
Fixe Kosten (Kf)
K'; DKv
Variable Kosten (Kv)
©W.Klein.GS2 Apr. 29, 2008

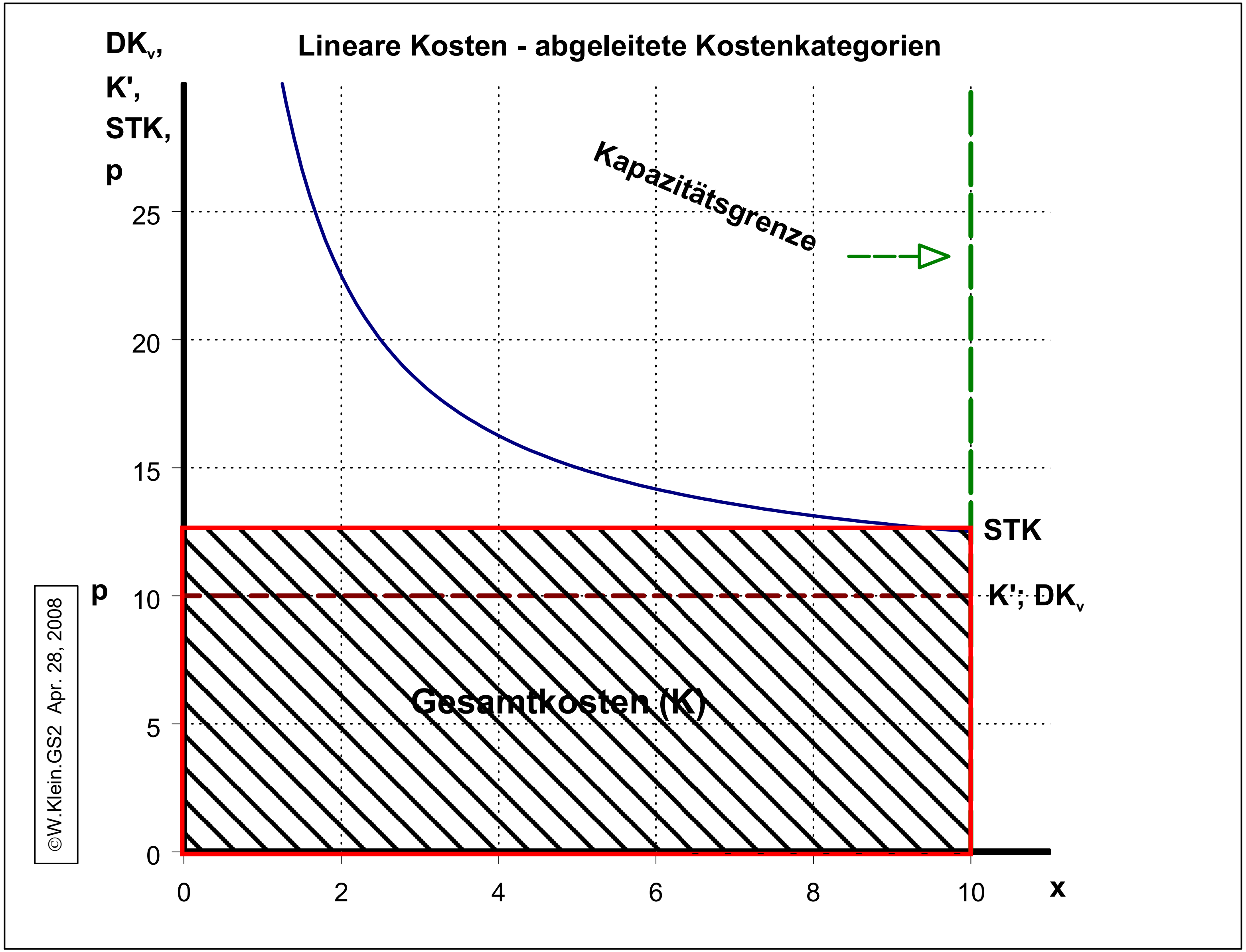

Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv, K', STK, p
25
20
15
p
10
5
0
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
STK
Verlust
Deckungsbeitrag fixe Kosten
K'; DKv
Variable Kosten (Kv)
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008



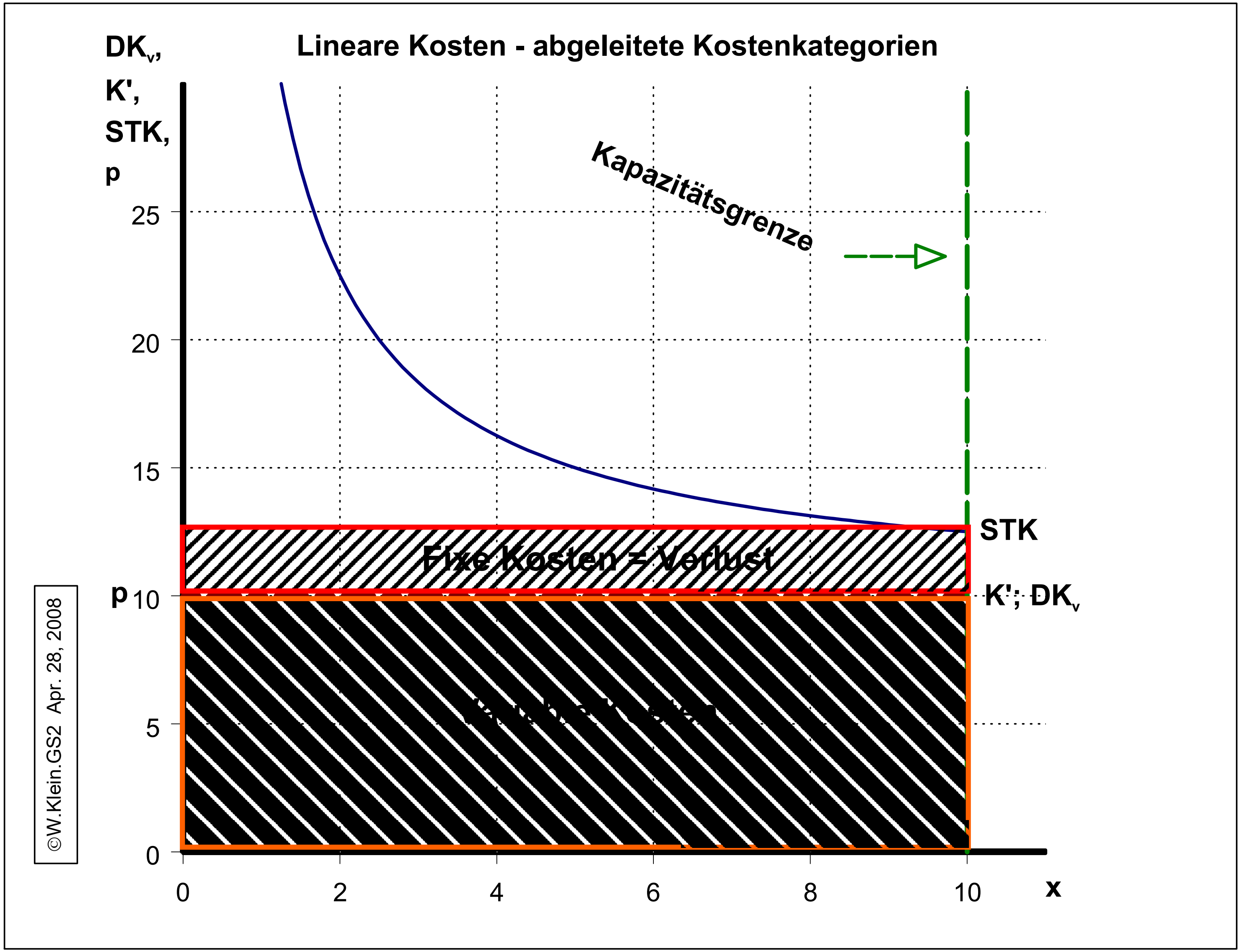
Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv, K', STK, p
25
20
15
p 10
5
0
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DKv
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008

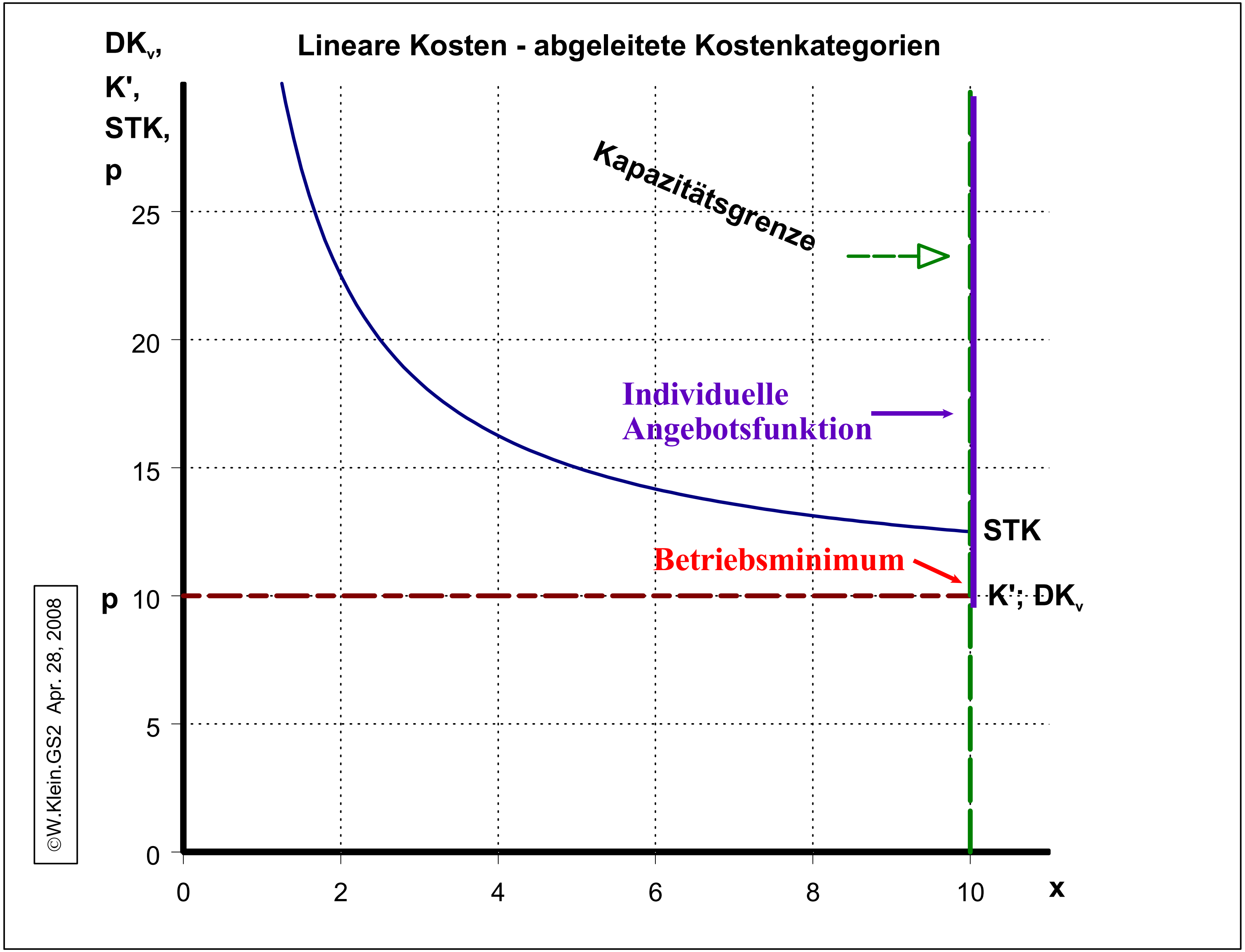


Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DK$_v$, K', STK, p
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DK$_v$
p
Erlös
x
0
5
10
15
20
25
0
2
4
6
8
10
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008

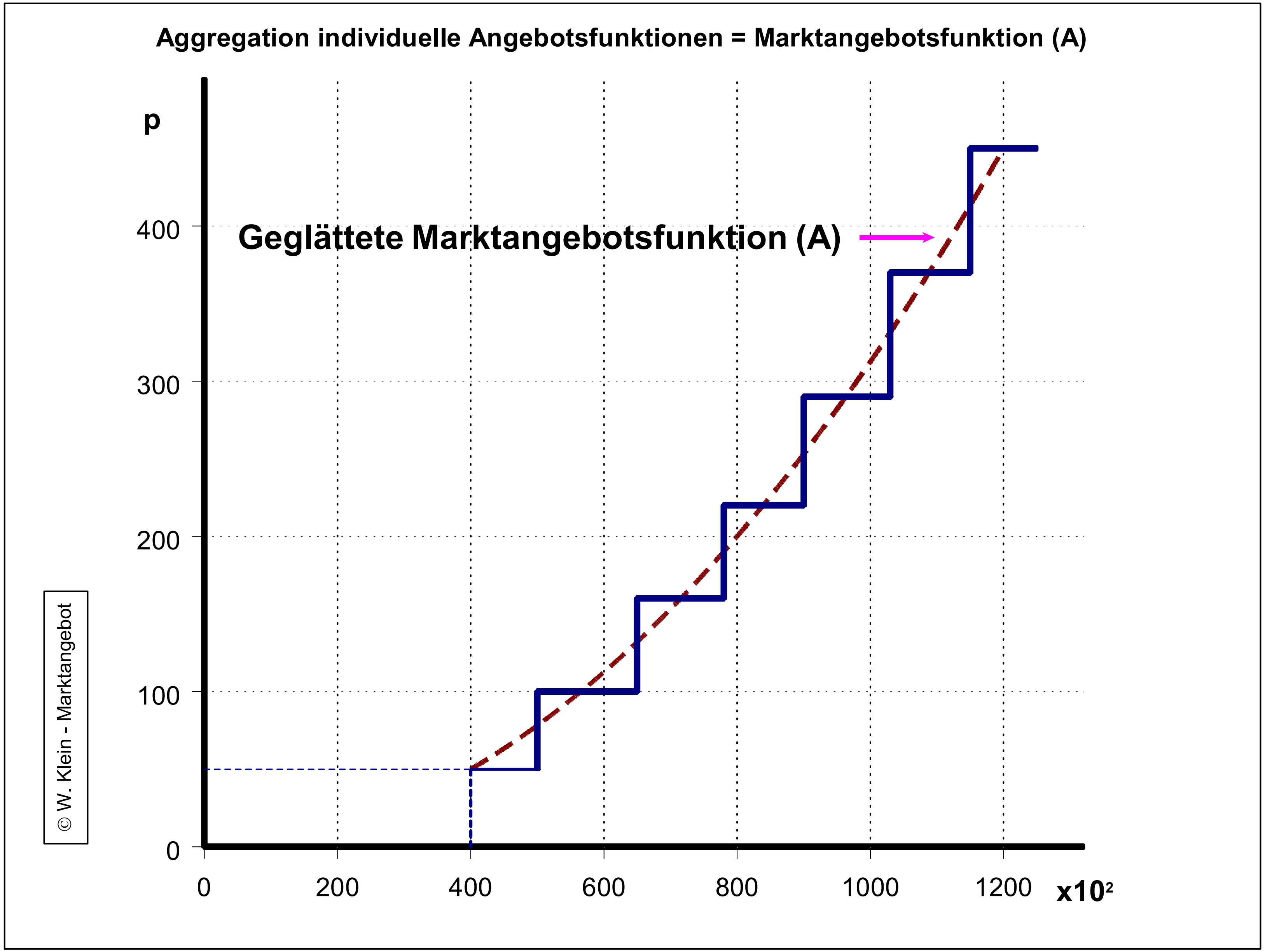


Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv, K', STK, p
25
20
15
10
5
0
p
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DKv
Gesamtkosten (K)
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008


Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DKv,
K',
STK,
p
25
20
15
p 10
5
0
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
STK
K'; DKv
Fixe Kosten = Verlust
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008



Lineare Kosten - abgeleitete Kostenkategorien
DK$_v$, K', STK, p
25
20
15
p 10
5
0
0
2
4
6
8
10
x
Kapazitätsgrenze
Individuelle Angebotsfunktion
STK
Betriebsminimum
K'; DK$_v$
©W.Klein.GS2 Apr. 28, 2008


Aggregation individuelle Angebotsfunktionen = Marktangebotsfunktion (A)
p
Geglättete Marktangebotsfunktion (A)
400
300
200
100
0
0
200
400
600
800
1000
1200
x10²
© W. Klein - Marktangebot

3. 2 Theorie der Faktornachfrage

Modellannahmen:

"ein Produkt - zwei Faktoren - Modell"
- gegebene klassische Produktionsfunktion
- partielle Faktorvariation, d.h. u.a. gegebener Preis des fixen Faktors (v_f)
- Wettbewerb sowohl auf dem Markt des variablen Faktors, d.h. gegebener Faktorpreis (p_v), als auch auf dem Produktmarkt, d.h. gegebener Produktpreis(p)
- kurzfristige Gewinnmaximierung

Gesucht wird der Funktionalzusammenhang

$$(1)\ v_v = f(p_v)$$

Es gilt:

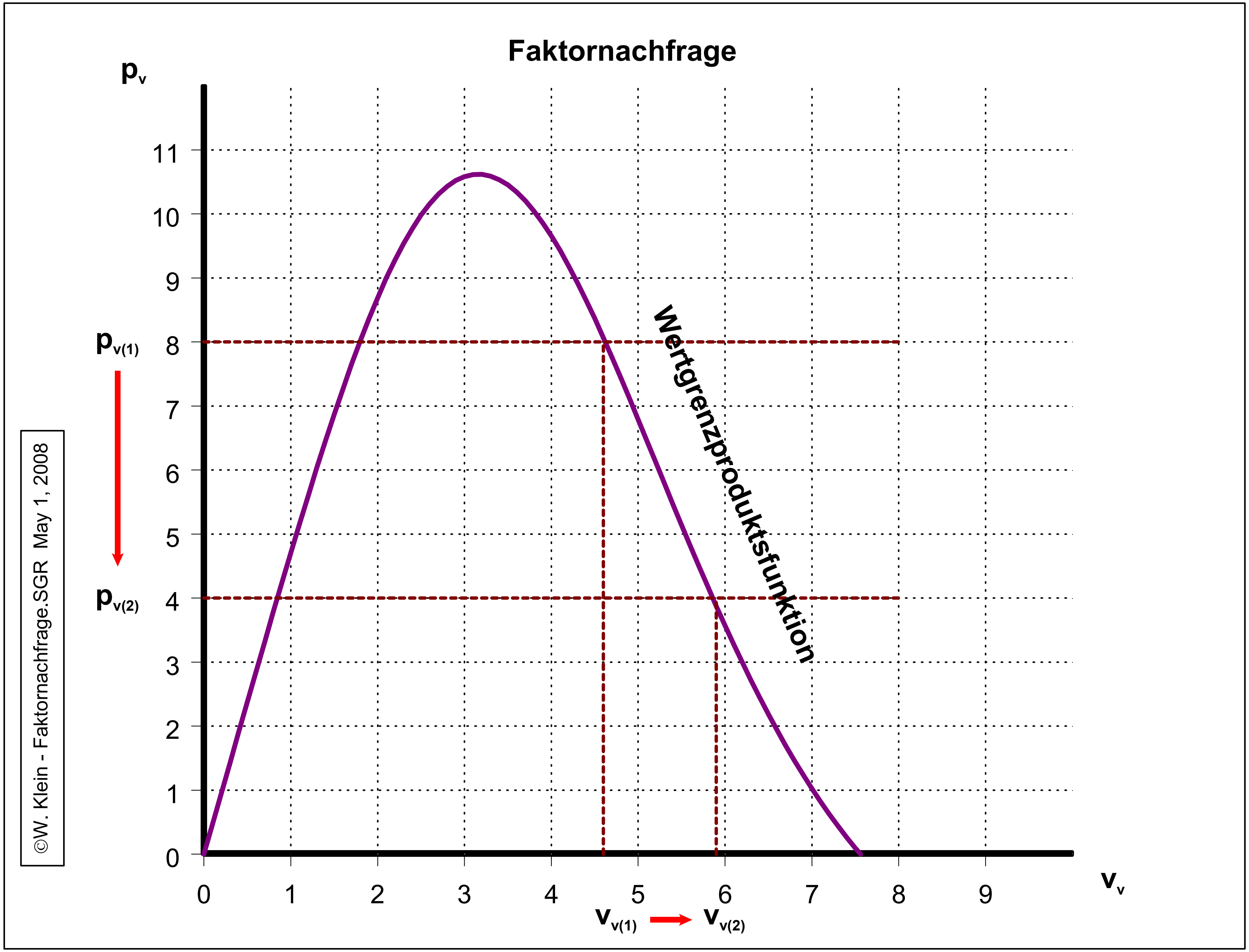
$$(2)\ G = E - K \ und\ (3)\ K' = E'\ (Outputregel\ der\ Gewinn\max imierung!)$$

$$(4)\ K' = p\ (siehe\ Modellannahme!)\ (5)\ K' = \frac{dK}{dx} = \frac{dK_v}{dx}$$

$$(6)\ dK_v = dv_v \cdot p_v\ (7)\ K' = \frac{dv_v}{dx} \cdot p_v\ (8)\ \frac{dv_v}{dx} = \frac{1}{GP_{(v)}}\ somit$$

$$(9)\ K' = \frac{1}{GP_{(v)}} \cdot p_v\ Wegen\ (4)\ gilt\ auch\ (10)\ p = \frac{1}{GP_{(v)}} \cdot p_v\ oder$$

$$\boxed{(11)\ p_v = GP_{(v)} \cdot p - \quad spezielle\quad Inputregel\ der\ Gewinn\max imierung!}$$


Faktornachfrage
p_v
$p_{v(1)}$
$p_{v(2)}$
Wertgrenzproduktfunktion
v_v
$v_{v(1)}$
$v_{v(2)}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
©W. Klein - Faktornachfrage.SGR May 1, 2008