HÖHERE MATHEMATIK
EINLEITUNG

WESSELKA MIHOVA

Begriffsbildungen, Vorgehensweisen und Erkenntnisse in einer Wissenschaftsdisziplin lassen sich immer dann präzise und zweifelsfrei darstellen, wenn eine geeignete Fachsprache zur Verfügung steht, deren "Vokabeln" und deren "Grammatik" vollständig und eindeutig definiert sind und bei korrekter Anwendung keiner Interpretationswillkür unterliegen.

Zu den wichtigsten klassischen Grundbausteinen der mathematischen Fachsprache gehören Elemente der Aussagenlogik und der Mengenlehre. Wir wollen diese Elemente im folgenden so weit darstellen, wie wir sie zur bequemen Anwendung der Mathematik auf ökonomische Probleme benötigen.

1. Grundbegriffe der Aussagenlogik

1.1. **Aussagen und Aussageformen.** Die formale Logik beschäftigt sich mit den Regeln bei der Bildung von Begriffen, Aussagen und Schlüssen und bildet damit nicht nur eine Grundlage der Mathematik, sondern jeder Wissenschaft.

Wir wollen im folgenden einige Grundbegriffe der *zweiwertigen* Aussagenlogik kennenlernen. Aussagen und ihre logischen Verknüpfungen mit Hilfe einer formalisierten Sprache dienen dazu, exakte Formulierungen mathemetischer Sachverhalte zu ermöglichen.

Erklärung 1.1. Unter *Aussagen* versteht man sprachliche Gebilde (Sätze), von dennen man sinnvoll annehmen kann, sie seien entweder "wahr" (w) oder "falsch" (f).

Die Aussage ist also eine gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhaltes. Je nachdem, ob dieser Sachverhalt der Realität entspricht oder nicht, ist die Aussage entweder "wahr" oder "falsch".

Beispiel 1.2. a) 2 ist eine Primzahl. (w)
b) $\sqrt{4} = \pm 2$. (f)
c) $(-4)^2 = 16$. (w)
d) $-2 > 2$. (f)
e) Berlin ist die Hauptstadt von Deutschland. (w)
f) Jeder Tisch hat vier Beine. (f)
g) 6 ist eine gerade Zahl. (w)
h) $0 : 3 = 0$. (w)
i) $7 : 0 = 0$. (f)

Jede Aussage kann **nur** einen der beiden Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" annehmen, es gibt **keine** dritte Möglichkeit (*Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch*).

Bemerkung 1.3. Der Wahrheitsgehalt der Aussage "*Jede gerade Zahl, die größer als* 2 *ist, läßt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben*" ist (noch) unbekannt (*Goldbach'sche Vermutung*). Wir zweifeln jedoch nicht daran, daß sie entweder wahr oder falsch sein **muß**. Daher werden auch derartige Sätze als Aussagen betrachtet.

Aufgabe 1.4. Welche der folgenden sprachlichen Gebilde sind Aussagen?

a) $2.2 = 5$	b) Quadrate schmecken bitter.
c) Alle Menschen sind sterblich.	d) Bist Du gesund?
e) Porsche baut die besten Autos.	f) Eßt mehr Gemüse!

In der Aussagenlogik wird häufig vom konkreten Inhalt der einzelnen Aussagen abgesehen und ganz allgemein nur von Aussagen gesprochen.

Für Überlegungen allgemeiner Art werden Symbole benutzt, die stellvertretend für bestimmte Aussagen stehen. Solche Symbole werden *Variablen* genannt. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Objekte, für die stellvertretend Variablen eingesetzt werden, einem (dem jeweiligen Sachverhalt entsprechenden) *Grundbereich* entnommen werden.

Variablen werden in der Mathematik durch kleine lateinische Buchstaben $a, b, c, ..., x, y, z, ...,$ oder $x_1, x_2, x_3, ...$ symboliziert.

Aussagevariablen, die mit *konkreten* Aussagen belegt werden können, werden in der formalen Logik mit $A, B, C, ...,$ oder $p, q, r, ...$ bezeichnet.

Aussagen werden meist in Form von *Aussagesätzen* angegeben. Nicht alle Aussagesätze sind jedoch Aussagen.

Die Sätze "a ist ein Teiler von 15" und "b ist keine Primzahl" sind zwar Aussagesätze, aber keine Aussagen; man kann nicht feststellen, ob diese Sätze wahr oder falsch sind. Setzen wir z.B. die Zahl 2 für a und die Zahl 7 für b , so gehen die Sätze in die (falschen) Aussagen "2 ist ein Teiler von 15" und "7 ist keine Primzahl" über, bei den Einsetzungen 3 und 6 für a und b ergeben sich wahre Aussagen.

Erklärung 1.5. Sätze mit einer oder mehreren Variablen heißen *Aussageformen*, wenn sie bei spezieller Wahl der Variablen in eine Aussage übergehen.

Aussageformen werden meist mit einem Buchstaben H, G, U und nachfolgender geklammerter Aufzählung der Variablennamen gekennzeichnet: $H(x), G(a, b, c), U(x, y)$ (gelesen: H von x, G von a, b, c usw.).

Beispiel 1.6. a) $H(x) : x + 4 = 7$, mit $x \in \mathbb{N}$;
b) $G(a, b, c) : a + b + c \geq 3$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$;
c) $U(x, y) : x/y$ (gelesen: x ist ein Teiler von y) mit $x, y \in \mathbb{N}$;
d) $H(x, y) : x < y$.

Eine Aussageform $H(x)$ wird *quantifiziert*, indem ihr die Wendungen "*für alle x*" oder "*es gibt mindestens ein x*" vorangestellt werden. Als Abkürzung für die Quantifikatoren "*für alle*" bzw. "*es gibt mindestens ein*" benutzt man in der formalen Logik die Zeichen $\forall$ bzw. $\exists$.

Beispiel 1.7.

	Aussageform		wahre Aussage
(1)	$x + 5 = 3$	mit $x \in \mathbb{N}$	$\exists\, x \in \mathbb{N} : x + 5 = 3;$
(2)	$y - 2 < 3$	mit $x \in \mathbb{R}$	$\exists\, y \in \mathbb{R} : y - 2 < 3;$
(3)	$a + 2 = 2 + a$	mit $a \in \mathbb{R}$	$\forall\, a \in \mathbb{R} : a + 2 = 2 + a.$

Aussageformen der Art (1) und (2) nennt man "*erfüllbar*", Aussageformen der Art (3) - "*allgemeingültig*".

Die Aussage "Es gibt mindestens eine natürliche Zahl x mit $x+5 = 3$" ist falsch, während die Aussage "Es gibt mindestens eine ganze Zahl x mit $x + 5 = 3$" wahr ist.

Wir **erkennen**: Ob eine Aussage wahr oder falsch ist, hängt auch vom jeweiligen Grundbereich ab. Deshalb muß dieser stets eindeutig vorgegeben werden.

Ausdrücke wie $x+2$, a^2, $y-3$, x^2+y^2 nennt man *Terme*. Werden in diesen Ausdrücken die Variablen durch Objekte eines vorgegebenen Grundbereiches belegt, so entstehen keine Aussagen, sondern Bezeichnungen für Objekte.

Erklärung 1.8. Als *Term* bezeichnet man jeden mathematischen Ausdruck, der

- eine definierte Zahl darstellt, z.B. $\sqrt{3}.4+7$ oder
- nach Ersetzen der vorkommenden Variablen durch Zahlen in eine definierte Zahl übergeht, z.B. x^2+y^2.

Keine Terme sind sinnlose oder nicht definierte Ausdrücke wie z.B.

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{1}{0}, \quad 0^0.$$

Terme werden oft mit dem Buchstaben T bezeichnet, gefolgt von den geklammerten Variablennamen, z.B.

$$T(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^x+1}, \quad T(x,y) = x^2+y^2.$$

Jede mathematische Gleichung $T_1 = T_2$ (Ungleichung $T_1 \leq T_2$), deren Terme eine oder mehrere Variable enthalten, ist eine Aussageform. Ersetzt man die Variablen der Gleichung (Ungleichung) durch Elemente der zugehörigen Grundmenge, so geht die Gleichung (Ungleichung) in eine (wahre oder falsche) Aussage über.

Erklärung 1.9. Diejenigen Elemente der Grundmenge, die eine Aussageform (Gleichung, Ungleichung) zu einer wahren Aussage machen, heißen *Lösungen* der Aussageform (Gleichung, Ungleichung). Sie werden zusammengefaßt in der *Lösungsmenge* L der Aussageform (Gleichung, Ungleichung).

Gelegentlich kann es vorkommen, daß ein Element aus der Grundmenge beim Einsetzen einen nicht definierten Ausdruck erzeugt. Daher ist es erforderlich, die Grundmenge zu reduzieren auf die sogenannte *Definitionsmenge*.

Erklärung 1.10. Die *Definitionsmenge* D_A der Aussageform $A(x)$ enthält nur diejenigen Elemente der Grundmenge, bei deren Einsetzen $A(x)$ in eine sinnvolle, definierte Aussage übergeht.

Beispiel 1.11. Die Lösungsmenge L_A der Gleichung

$$A(x) : (x+1)^2 = x^2+2x+1, \quad x \in \mathbb{R}$$

ist $L_A = \mathbb{R}$, denn für jede Einsetzung aus der Grundmenge $\mathbb{R}$ geht die Gleichung in eine wahre Aussage über.

Erklärung 1.12. Eine Aussageform (Gleichung, Ungleichung) $A(x)$ heißt *allgemeingültig*, wenn die Lösungsmenge L_A von $A(x)$ mit der Definitionsmenge D_A von $A(x)$ übereinstimmt.

Erklärung 1.13. Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ heißen *äquivalent* (gleichwertig), wenn bei jeder Einsetzung von Variablen die beiden Terme T_1 und T_2 dieselben Zahlenwerte liefern.

Beispiel 1.14. Folgende Terme sind jeweils äquivalent:

$$\begin{array}{lll}
(i) & T_1(x) = x^2 + 5x - 14, & T_2(x) = (x+7)(x-2); \\
(ii) & T_1(x) = x^4 - y^4, & T_2(x) = (x^2+y^2)(x^2-y^2); \\
(iii) & T_1(a,b,x) = \dfrac{a-b}{b-a}\,x, & T_2(a,b,x) = -x,\ a \neq b; \\
(iv) & T_1(u,v,x) = \dfrac{ux-vx}{x^2+7x}, & T_2(u,v,x) = \dfrac{u-v}{x+7},\ x \neq 0, -7.
\end{array}$$

Erklärung 1.15. Eine Aussageform (Gleichung, Ungleichung) A heißt *unerfüllbar* (oder: widersprüchlich), wenn keine Zahl aus der Definitionsmenge Lösung von A ist.

Die Lösungsmenge unerfüllbarer Aussageformen ist *leer*.

Zusammenfassung: Es gibt Aussageformen (Gleichungen, Ungleichungen), die in $\mathbb{R}$

(i) lösbar sind, und zwar
  - mit genau einer Lösung, z.B. $x - 1 = 0,\ L = \{1\}$;
  - mit mehreren Lösungen, z.B. $x^2 = 4,\ L = \{-2, 2\}$;
  - mit unendlich vielen Lösungen, z.B. $x^2 < 49, \quad L = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\}$;

(ii) allgemeingültig sind, z.B. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1),\ L = \mathbb{R}$;

(iii) unerfüllbar sind, z.B. $x^2 + 1 = 0,\ L = \emptyset$.

Aufgabe 1.16. (i) In welchen Fällen handelt es sich um Aussagen, in welchen Fällen um Aussageformen?

$a)\ x^2 + 1 = 1 + x^2$; $\quad b)\ A + B = 1$; $\quad c)\ 4 + 1 = 0$;

$d)\ 0 \leq 0^2 = \sqrt{4} - 1$; $\quad e)\ x + y = 4$; $\quad f)\ y = x^2 + 1$;

$g)\ \dfrac{1}{0} = 0$; $\quad h)\ a^2 + b^2$; $\quad i)$ 2 ist Lösung von $x > 4$.

(ii) Man gäbe die Lösungsmengen folgender Aussageformen an. Welche Aussageformen sind allgemeingültig, welche unerfüllbar? (Grundmenge: $\mathbb{R}$)

$a)\ x^2 = 49$; $\quad b)\ p^2 \geq 0$; $\quad c)\ 0\,x = 5\,x$; $\quad d)\ (y+1)(y+2) = 0$;

$e)\ 0 + x = 5 + x$; $\quad f)\ 2z + 1 = 1 + 2z$; $\quad g)\ x^2 > 36$; $\quad h)\ u^2 < 81$.

Von jeder gegebenen Aussage läßt sich eine neue Aussage, ihre *Negation*, bilden.

Erklärung 1.17. Die *Negation* (Verneinung) einer Aussage ist genau dann wahr, wenn die Aussage falsch ist und umgekehrt.

Die Negation einer Aussage A wird mit $\overline{A}$ (gelesen: nicht A) bezeichnet.

Die Beziehungen zwischen den Wahrheitswerten von A und $\overline{A}$ lassen sich in einer Wahrheitswerttabelle zusammenstellen:

A	$\overline{A}$
w	f
f	w

Auch quantifizierte Aussageformen können negiert werden.

So gilt beispielsweise im Bereich

a) der natürlichen Zahlen $\exists\, x : x < 0$ (f) und $\overline{\exists}\, x : x < 0$ (w);
$\exists\, x : x \leq 0$ (f) und $\overline{\exists}\, x : x \leq 0$ (w).

b) der ganzen Zahlen $\exists\, x < 0$ (w) und $\overline{\exists}\, x < 0$ (f);
$\exists\, x \leq 0$ (w) und $\overline{\exists}\, x \leq 0$ (f).

Allgemein ist die Formulierung $\overline{\exists}\, x : H(x)$ (gelesen: es gibt kein x mit $H(x)$) gleichbedeutend mit $\forall\, x : \overline{H(x)}$ (gelesen: für alle x gilt die Negation von $H(x)$).

Eine analoge Beziehung besteht zwischen $\overline{\forall}\, x : H(x)$ und $\exists\, x : \overline{H(x)}$.

So ist z.B. die Formulierung "Nicht alle Abteilungen des Betriebes arbeiten dreischichtig" gleichwertig mit der Aussage "Es gibt mindestens eine Abteilung des Betriebes, die nicht dreischichtig arbeitet".

1.2. **Verknüpfungen von Aussagen und Aussageformen.** Aus zwei gegebenen Aussagen A und B lassen sich mit Hilfe von Bindewörtern (*Junktoren*) neue Aussagen gewinnen.

Häufig auftretende Verknüpfungen von Aussagen sind die sogenannten klassischen Aussagenverbindungen:

Name	Schreibweise	gelesen
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
Alternative	$A \vee B$	A oder B
Disjunktion	$A \asymp B$	entweder A oder B
Implikation	$A \Rightarrow B$	wenn A, so B
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B

Es interessiert uns vor allem der Zusammenhang zwischen dem Wahrheitswert einer Aussagenverbindung und den Wahrheitswerten der verbundenen Einzelaussagen.

Erklärung 1.18. Werden zwei Aussagen durch *und* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Konjunktion* (Junktor: "und"; Quantor: $\wedge$).

Die *Konjunktion* $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn *beide* Aussagen A und B wahr sind.

Die Wahrheitstafel für die Konjunktion ist:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

$A \wedge B$ bedeutet logisch dasselbe wie $B \wedge A$ (Kommutativgesetz).

Beispiel 1.19. Grundbereich: $G = \{2, 3, 4, 5\}$;
Aussage $A : \{H_1(x) : x < 4\}$;
Aussage $B : \{H_2(x) : x$ ist geradzahlig$\}$.

Streng genommen sind $H_1(x)$ und $H_2(x)$ Aussageformen, die erst bei Belegung der Variablen x in Aussagen überführt werden.

	A	B	$A \wedge B$
$2 < 4$ und 2 ist geradzahlig	w	w	w
$3 < 4$ und 3 ist geradzahlig	w	f	f
$4 < 4$ und 4 ist geradzahlig	f	w	f
$5 < 4$ und 5 ist geradzahlig	f	f	f

Erklärung 1.20. Werden zwei Aussagen durch *oder* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Alternative* (Junktor: "oder"; Quantor: $\vee$).

Die *Alternative* $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn *wenigstens eine* ihrer Aussagen A und B wahr ist.

Die Wahrheitstafel für die Alternative ist:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Das *oder* in einer Alternative wird als *einschließendes oder* bezeichnet, weil die Wahrheit der einen Aussage die Wahrheit der anderen nicht ausschließt.

$A \vee B$ bedeutet logisch dasselbe wie $B \vee A$ (Kommutativgesetz).

Beispiel 1.21. Grundbereich: $G = \{2, 3, 4, 5\}$;
Aussage A: $\{H_1(x) : x < 4\}$;
Aussage B: $\{H_2(x) : x$ ist geradzahlig$\}$.

	A	B	$A \vee B$
$2 < 4$ oder 2 ist geradzahlig	w	w	w
$3 < 4$ oder 3 ist geradzahlig	w	f	w
$4 < 4$ oder 4 ist geradzahlig	f	w	w
$5 < 4$ oder 5 ist geradzahlig	f	f	f

Erklärung 1.22. Werden zwei Aussagen durch *entweder - oder* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Disjunktion* (Junktor: "entweder - oder": Quantor: $\asymp$).

Die *Disjunktion* $A \asymp B$ ist genau dann wahr, wenn die Aussagen A und B verschiedene Wahrheitswerte haben.

Die Wahrheitstafel für die Disjunktion ist:

A	B	$A \asymp B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \asymp B$ bedeutet logisch dasselbe wie $B \asymp A$ (Kommutativgesetz).

Beispiel 1.23. Grundbereich: $G = \{2, 3, 4, 5\}$;
Aussage A: $\{H_1(x) : x < 4\}$;
Aussage B: $\{H_2(x) : x$ ist geradzahlig$\}$.

	A	B	$A \asymp B$
Entweder ist $2 < 4$ oder ist 2 geradzahlig	w	w	f
Entweder ist $3 < 4$ oder ist 3 geradzahlig	w	f	w
Entweder ist $4 < 4$ oder ist 4 geradzahlig	f	w	w
Entweder ist $5 < 4$ oder ist 5 geradzahlig	f	f	f

Erklärung 1.24. Werden zwei Aussagen durch *wenn - so* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Implikation* (Folgerung) (Junktor: "wenn - so"; Quantor: $\Rightarrow$).

Außer der formulierung "wenn A, so B", werden für eine Implikation auch andere Wendungen benutzt: "aus A folgt B"; "A ist eine hinreichende Bedingung für B"; "B ist eine notwendige Bedingung für A".

A ist die *Voraussetzung* (Prämisse), B ist die *Behauptung* (Konklusio).

Die *Implikation* $A \Rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn die Voraussetzung wahr und die Behauptung falsch ist.

Die Wahrheitstafel für die Implikation ist:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Bemerkung 1.25. Jede Implikation, deren Behauptung wahr ist, ist auch wahr, unabhängig davon, ob die Voraussetzung wahr ist oder nicht. Ebenso ist jede Implikation wahr, deren Voraussetzung falsch ist, unabhängig davon, ob die Behauptung wahr ist oder nicht.

Aus der Gültigkeit der Folgerung $A \Rightarrow B$ läßt sich durch *Kontraposition* der Schluß ziehen: Immer, wenn B falsch ist, dann ist auch A falsch (denn andernfalls - d.h. wenn A wahr wäre - müßte wegen $A \Rightarrow B$ auch B wahr sein).

$A \Rightarrow B$ bedeutet dasselbe, wie $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Die Implikation ist *nicht* umkehrbar, d.h die Aussagen A und B dürfen nicht gegenseitig vertauscht werden.

Beispiel 1.26. Grundbereich: $G = \{2, 3, 4, 5\}$;
Aussage A: $\{H_1(x) : x < 4\}$;
Aussage B: $\{H_2(x) : x \text{ ist geradzahlig}\}$.

	A	B	$A \Rightarrow B$
Wenn $2 < 4$, so ist 2 geradzahlig	w	w	w
Wenn $3 < 4$, so ist 3 geradzahlig	w	f	f
Wenn $4 < 4$, so ist 4 geradzahlig	f	w	w
Wenn $5 < 4$, so ist 5 geradzahlig	f	f	w

Es gilt die Folgerung $A \Rightarrow B$, wenn alle Lösungen von $H_1(x)$ auch Lösungen von $H_2(x)$ sind.

Aufgabe 1.27. Man untersuche, ob der Folgerungspfeil korrekt verwendet wurde:

a) $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$;
b) $(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$;
c) $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$;
d) $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = 4$;
e) $z = \sqrt{4} \Rightarrow z^2 = 4$;
f) $x(x+1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$;
g) $x^2 < 16 \Rightarrow x < 4$;
h) $x^2 < 16 \Rightarrow x < 4 \wedge x > -4$;
i) $k^2 > 16 \Rightarrow k > 4$;
j) $x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$;
k) $(z-4)(z+5) = 0 \Rightarrow z = 4 \vee z = -5$.

Beispiel 1.28. (1) Zu beweisen ist die Irrationalität von der Zahl $\sqrt{2}$.

Beweis. Statt die Aussage $p = \{\sqrt{2} \text{ ist irrational}\}$ zu beweisen, widerlegt man die Aussage $\overline{p} = \{\sqrt{2} \text{ ist rational}\}$.

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational. Dann ist $\sqrt{2}$ darstellbar als Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ nicht beide durch 2 teilbar. (Sonst kürze man den Bruch.) Aus $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ folgt $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und damit $2n^2 = m^2$. Also ist m^2 gerade. Dann ist auch m gerade, $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. (Denn das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist ungerade!) Aus $2n^2 = m^2$ und $m = 2k$ folgt $2n^2 = 4k^2$, d.h. $n^2 = 2k^2$. Also ist auch n gerade.

Das ist ein Widerspruch; m, n sollten nicht beide durch 2 teilbar sein.

$\square$

(2) Für je zwei positive Zahlen a, b gilt: $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.

Indirekter Beweis. Es sei $a^2 < b^2$.

Annahme: $a \geq b$. Dann folgt durch Multiplikation mit a, daß $a^2 \geq ab$, und durch Multiplikation mit b, daß $ab \geq b^2$, also $a^2 \geq b^2$.

Das ist ein Widerspruch.

Beweis durch Übergang zur Kontraposition. Anstelle von $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ beweisen wir die Kontraposition der Aussage: $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$.

Aus $a \geq b$ folgt durch Multiplikation mit a, daß $a^2 \geq ab$, und mit Multiplikation mit b, daß $ab \geq b^2$. Also ist $a^2 \geq b^2$.

$\square$

Erklärung 1.29. Werden zwei Aussagen durch *genau dann, wenn* verbunden, so heißt die entstandene Aussagenverbindung *Äquivalenz* (Junktor: "genau dann, wenn"; Quantor: $\Leftrightarrow$).

Man sagt:

- Genau dann, wenn $A(x)$ gilt, gilt auch $B(x)$.
- Wenn $A(x)$, so $B(x)$ und umgekehrt.
- $A(x)$ ist notwendig und hinreichend für $B(x)$ bzw.
- $B(x)$ ist notwendig und hinreichend für $A(x)$.
- $A(x)$ ist äquivalent zu $B(x)$.

A und B dürfen dabei vertauscht werden.

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

Zwei Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ sind äquivalent genau dann, wenn die Lösungsmengen beider Aussageformen übereinstimmen.

Bei der Umformung von Gleichungen zur Lösungsfindung darf man daher nur Äquivalenzumformungen vornehmen, d.h. Gleichungsumformungen, die die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung nicht verändern.

Aufgabe 1.30. Man untersuche durch Vergleich der Lösungsmengen, ob folgende Aussageformen äquivalent sind (d.h. ob der Äquivalenzpfeil zutreffend angewendet wurde):

$$\begin{array}{ll} a)\ x = 7 \Leftrightarrow x^2 = 49; & x = 1 \vee x = 4 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0; \\ c)\ \dfrac{x-1}{x-2} = 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x = 1; & d)\ x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0; \\ e)\ \sqrt{x} = -4 \Leftrightarrow x = 16; & f)\ x^2 > 9 \Leftrightarrow x > 3 \vee x < -3. \end{array}$$

Bemerkung 1.31. Bei allen Aussagenverbindungen der formalen Logik ist zu beachten, daß der Wahrheitswert einer Aussagenverbindung nicht vom Sinn (der Intension) der Einzelaussagen, sondern nur von deren Wahrheitswert abhängt. Sie werden deshalb **extensionale** Aussagenverbindungen genannt.

Erklärung 1.32. Eine aus einzelnen Aussagen mit Hilfe von Junktoren zusammengesetzte Aussage, die unabhängig von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen wahr ist, nennt man *aussagenlogisch allgemeingültig*, ein *Gesetz der Aussagenlogik* oder eine *Tautologie*.

Sind A und B zusammengesetzte Aussagen und ist $A \Leftrightarrow B$ eine Tautologie, so nennt man A und B *aussagenlogisch equivalent.*

Ist $A \Rightarrow B$ eine Tautologie, so sagt man: Die Aussage A *folgt aussagenlogisch aus* B.

Beispiel 1.33. Ist A eine Aussage, so ist die Aussage $A \vee \overline{A}$ eine Tautologie.

Aufgabe 1.34. (1) Im Grundbereich der natürlichen Zahlen sind folgende mathematischen Ausdrücke gegeben:

$$\begin{array}{llll} a)\ 3/18; & b)\ 3x \geq 0; & c) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; & \\ d)\ 4/b; & e)\ 4 + c < 8; & f)\ \dfrac{5x-4}{3} = 6; & g)\ \dfrac{2x+2}{4}. \end{array}$$

Man bestimme die Aussagen, die Aussagenformen und die Terme.

(2) Man quantifiziere die Beispiele $b)$ bis $e)$ in Aufgabe 1 mit Hilfe der Quantoren $\forall$ oder $\exists$ so, daß stets wahre Aussagen entstehen.

(3) Gegeben sind folgende Aussagenverbindungen:
   a) Eine natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade.
   b) Eine natürliche Zahl, die durch 6 teilbar ist, ist auch durch 3 teilbar.
   c) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie gerade und durch 3 teilbar ist.

   Um welche Aussagenverbindungen handelt es sich?

(4) Mit den Aussagen
   A: 5 ist ein Teiler von 15.
   B: 7 ist eine ungerade Zahl.
   C: 9 ist eine Primzahl.
   D: 8 ist durch 2 teilbar.
   E: 8 ist eine ungerade Zahl.
   F: 2 ist eine Primzahl.

   sind nachstehende Aussagenverbindungen aufzubauen und auf ihren Wahrheitswert zu prüfen:
   a) $A \wedge B$ b) $A \wedge C$ c) $A \vee D$ d) $E \Rightarrow F$
   e) $E \vee C$ f) $B \Leftrightarrow F$ g) $D \Rightarrow E$ h) $C \Leftrightarrow E$

(5) Man negiere folgende Aussagen:
   a) Das Papier aller Bücher ist weiß.
   b) Es ist nicht wahr, daß $3 + 2 = 5$ ist.
   c) Alle Studenten unserer Seminargruppe erreichen im Fach Mathematik die Note "*Sehr gut*".

(6) Welche Eigenschaft besitzen die Zahlen, für die die Konjunktion $A \wedge B$ der folgenden Aussagen gilt?
   Aussage A: Eine gegebene Zahl ist durch 3 teilbar,
   Aussage B: Eine gegebene Zahl ist durch 4 teilbar.

(7) Man überprüfe durch Aufstellen von Wahrheitstabellen die folgenden *Gesetze der (zweiwertigen) Aussagenlogik* (Aussagenalgebra). Dabei behauptet der Äquivalenzpfeil $\Leftrightarrow$, daß die Wahrheitstabellen übereinstimmen:

a) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$; $\quad \overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$;
$A \vee (B \wedge C) \not\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge C$.

b) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$; $\quad (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

c) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

d) $A \vee A \Leftrightarrow A$; $\quad A \wedge A \Leftrightarrow A$.

e) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$; $\quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$.

f) $A \vee \overline{A}$ immer war; $\quad A \wedge \overline{A}$ immer falsch.

2. Grundbegriffe der Mengenlehre

2.1. **Der Mengenbegriff.** In der Umgangssprache bezeichnet das Wort *Menge* eine unbestimmte, nicht näher bekannte Anzahl gleichartiger Objekte. Wir sprechen von der Menge der Zuschauer bei einem Fußballspiel, der Menge der Neubauten einer Stadt, der Menge der Teilnehmer an einer Kundgebung.

In der Mathematik ist der Begriff der Menge ein Grundbegriff, der sich nicht auf noch allgemeinere Begriffe zurückführen läßt, sich nicht definieren läßt (wie der Begriff *Punkt* in der Geometrie oder *war* in der Logik).

Von Georg Kantor (1845 - 1918), dem Begründer der klassischen Mengenlehre, stammt die folgende Definition einer Menge:

Erklärung 2.1. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens - welche die *Elemente* der Menge genannt werden - zu einem Ganzen.

Nach dieser Erklärung soll unter einer Menge eine Gesamtheit von wirklichen oder gedachten Objekten verstanden werden, wenn vor der Zusammenfassung von jedem Objekt einwandfrei festgestellt bzw. entschieden werden kann, ob es der Gesamtheit angehört oder nicht.

Die grundlegende Beziehung zwischen einer Menge und ihren Elementen, die sogenannte *Element-Mengen-Relation*, wird kurz symbolisiert durch $x \in M$ (gelesen: x ist ein Element der Menge M oder x gehört zu M), bzw. $x \notin M$ (gelesen: x ist nicht Element der Menge M oder x gehört nicht zu M).

Bei der Bildung von Mengen muß vorausgesetzt werden, daß ein Grundbereich, dem die einzelnen Elemente der Menge entnommen werden, bereits vorgegeben ist.

Zur eindeutigen Festlegung einer Menge formulieren wir das *Mengenbildungsprinzip*:

Ist $H(x)$ eine Aussageform über einem gegebenen Grundbereich G, so gibt es eine eindeutig bestimmte Menge M, die genau diejenigen Elemente des Grundbereiches enthält, für die $H(x)$ wahre Aussagen ergibt.

Eine Menge kann demnach folgenderweise beschrieben werden:

(1) durch die Angabe des jeweiligen Grundbereiches und einer die Menge M erzeugenden Aussageform $H(x)$ (d.h. durch eine die Menge charakterisierende Eigenschaft).
Schreibweise: $M = \{x \mid x \in G \wedge H(x)\}$ (gelesen: M gleich Menge aller x, mit x Element von G und $H(x)$).

(2) durch die Aufzählung aller ihrer Elemente.
Schreibweise: $M = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Dabei ist die Reihenfolge innerhalb der Mengenklammern unerheblich.

Die vollständige Aufzählung aller Elemente ist nur bei endlichen Mengen (d.h. bei Mengen mit endlich vielen Elementen) möglich.

Unendliche Mengen (d.h. Mengen mit mehr als endlich vielen Elementen) müßen gemäß (1) beschrieben werden.

(3) durch graphische Darstellung.

Zur graphischen Veranschaulichung von Mengen benutzt man häufig sogenannte Venn-Diagramme, d.h. berandete Punktmengen in der Zeichenebene. Die Menge wird veranschaulicht durch die Menge aller im berandeten Bereich liegengen Punkte.

Bei der Festlegung einer Menge spielen die Aussageformen $H^*(x) : x = x$ und $H_0(x) : x \neq x$ eine besondere Rolle.

Die Aussageform $H^*(x) : x = x$ wird offensichtlich von jedem Objekt des vorgegebenen Grundbereiches G erfüllt; deshalb wird die dadurch festgelegte Menge auch als *Grundmenge* bezeichnet.

Die Aussageform $H_0(x) : x \neq x$ wird dagegen, unabhängig vom betrachteten Grundbereich, von keinem Objekt erfüllt; die entsprechende Menge enthält also kein Element und wird *leere Menge* (symbolisch: $\emptyset$) genannt. Die leere Menge wird in der Literatur auch als Nullmenge bezeichnet.

Die Menge $M = \{0\}$ ist eine Einermenge, da sie ein (eiziges) Element, die Zahl 0, enthält, während die Nullmenge 0 Elemente (kein Element) besitzt bzw. leer ist.

Beispiel 2.2. (1) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$;
(2) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 0\} = \{0\}$;
(3) $\emptyset = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x^2 - 3 = 0)\}$;
(4) $L = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 - 3 = 0)\} = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$.

Bestimmte Zahlenmengen, die häufig in der Mathematik verwendet werden, haben genormte Symbole:

(1) $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ (Menge der natürlichen Zahlen);
(2) $\mathbb{Z} := \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ (Menge der ganzen Zahlen);
(3) $\mathbb{Q} := \{x \mid x = \dfrac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0\}$ (Menge der rationalen Zahlen);

Fügt man die sogenannten *irrationalen* Zahlen (wie z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{10}$, π, ...) zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hinzu, so ergibt sich

(4) $\mathbb{R}$:={Menge der reellen Zahlen}.

Bemerkung 2.3. Mit $\mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$ wollen wir die jeweils *positiven* und mit $\mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{R}_0^+$ die jeweils *nichtnegativen* ganzen, rationalenn bzw. reellen Zahlen bezeichnen. Analog bedeutet $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$ die Menge der um die Zahl 0 erweiterten natürlichen Zahlen.

Aufgabe 2.4. (1) Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an:
a) $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x^2 + 2x - 15 = 0)\}$;
b) $M = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge (x^2 + 2x - 15 = 0)\}$;
c) $M = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 + 4 = 0)\}$.

(2) Beschreiben Sie die folgenden Mengen durch Angabe wenigstens einer Eigenschaft:
a) {1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81};
b) {2; 11; 101; 1001};
c) {1; -1}.

(3) Welche folgender vier Aussagen ist richtig?

$$a)\ 3 \in \{3\};\quad b)\ \{3\} \in \{3\};\quad c)\ \{3\} \in 3;\quad d)\ 3 \in 3.$$

2.2. **Relationen zwischen Mengen.** Zwischen Mengen können verschiedene *Relationen* (Beziehungen) bestehen. Elementare Mengenrelationen sind *Gleichheit* und *Enthaltensein* (Teilmengeneigenschaft).

Gleichheit zweier Mengen

Erklärung 2.5. Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, geschrieben $A = B$, wenn sie nur dieselben Elemente enthalten.

$$A = B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Eine Menge $\{a\}$ mit einem Element ist sorgfältig zu unterscheiden von dem Element a selbst. Es gilt: $x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a$.

Gleiche Mengen können durch verschiedene Aussageformen erzeugt werden.

Beispiel 2.6. (1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2x/20\}$; $B = \{1; 2; 5; 10\}$. Beide Mengen enthalten nur dieselben Elemente; es gilt $A = B$.

(2) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2x < 7\}$. Beide Mengen enthalten nur dieselben Elemente; es gilt $A = B$.

Die Mengengleichheit ist eine *Äquivalenzrelation*, d.h. sie ist sicher

a) reflexiv: $A = A$;
b) symmetrisch: $A = B \Rightarrow B = A$;
c) transitiv: $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$.

Teilmengenrelation

Erklärung 2.7. Gehören *alle* Elemente einer Menge A zugleich einer Menge B an, so heißt A *Teilmenge* von B.

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Anstelle von $A \subseteq B$ (gelesen: A ist Teilmenge von B oder A ist enthalten in B) ist auch $B \supseteq A$ (gelesen: B ist Obermenge von A oder B umfaßt A) gebräuchlich.

Es gilt stets:

$M \subseteq M$ Jede Menge ist (unechte) Teilmenge von sich selbst.

$\emptyset \subseteq M$ Die leere Menge ist in jeder Menge enthalten.

Beim Enthaltensein wird, wenn notwendig, unterschieden zwischen *enthalten* und *echt enthalten*. Die Formulierung "echt enthalten" ist wesentlich strenger als "enthalten". Sie fordert, daß die Menge B außer den gleichen Elementen wenigstens ein Element mehr enthält als die Menge A.

Erklärung 2.8. Eine Menge A heißt *echte Teilmenge* der Menge B, wenn A Teilmenge von B ist und außerdem mindestens ein Element $x \in B$ existiert, das nicht zu A gehört.

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (A \neq B).$$

Die Mengenrelation Enthaltensein umfaßt den Fall der Gleichheit zweier Mengen.

Im Falle der Gleichheit von A und B gilt:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Die Teilmengenrelation ist eine *Ordnungsrelation*, d.h. sie ist sicher

a) reflexiv: $A \subseteq A$;
b) identitiv: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$;
c) transitiv: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Beispiel 2.9. Die Studenten einer Seminargruppe bilden eine Menge im mathematischen Sinne. Diese Menge soll mit G bezeichnet werden. Die Menge M der männlichen Studenten dieser Seminargruppe ist eine Teilmenge von G. Es existiert noch eine andere Teilmenge von G, die Menge W der weiblichen Studenten dieser Seminargruppe. Man nennt die Menge W die *Komplementärmenge* von M in G und bezeichnet sie mit $\overline{M}$ (gelesen: M quer).

Erklärung 2.10. Ist $H(x)$ eine Aussageform über einer Grundmenge G, dann heißen die Mengen $M = \{x \mid x \in G \wedge H(x)\}$ und $\overline{M} = \{x \mid x \in G \wedge \overline{H(x)}\}$ *zueinander komplementäre Mengen* in G.

$$M \subseteq G \Rightarrow \forall x : x \in \overline{M} \Leftrightarrow x \in G \wedge x \notin M.$$

Beispiel 2.11. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbb{N}} := \{... -3, -2, -1, 0\}$, d.h. $\overline{\mathbb{N}}$ enthält alle negativen ganzen Zahlen und die Zahl Null.

Die Negation der Teilmengenbeziehung bedeutet: A ist nicht Teilmenge von B ($A \nsubseteq B$), wenn nicht alle Elemente von A auch zu B gehören, wenn es also mindestens ein Element von A gibt, das nicht zugleich Element von B ist.

Erklärung 2.12. Die Menge $P(M)$ aller Teilmengen einer Menge M heißt die *Potenzmenge* der Menge M.

$$P(M) := \{X \mid X \subseteq M\}.$$

Die Elemente der Potenzmenge sind selbst Mengen.
Solche Mengen, deren Elemente selbst Mengen sind, werden *Mengensysteme* genannt.

Beispiel 2.13. $A = \{2; 3; 4\} \quad \Leftrightarrow$

$$P(A) = \{\emptyset; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{3; 4\}; \{2; 3; 4\}\}.$$

Erklärung 2.14. Wenn in einem Satz von einer unbestimmten ganzen Zahl n die Rede ist, die nur der einen Beschränkung unterworfen ist, nicht unterhalb eines gewissen Anfangswertes a zu liegen, so kann man die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes häufig dadurch dartun, daß man folgendes nachweist:

i) Der Satz ist richtig für den Anfangswert a der Zahl n, also kurz für $n = a$;
ii) Der Satz ist, wenn k irgendeine nicht unterhalb a gelegene Zahl bedeutet und seine Gültigkeit für $n = a, n = a + 1, ..., n = k$ vorausgesetzt wird, auch für den nächstfolgenden Wert $n = k + 1$ richtig.

Diese Methode ist als *Schluß von n auf* $n + 1$ oder als die *Methode der vollständigen mathematischen Induktion* bekannt.

Satz 2.15. *Ist M eine endliche Menge und bezeichnet $|M| = n$ die Anzahl ihrer Elemente, so gilt für die Elementenzahl der Potenzmenge* $|P(M)| = 2^{|M|} = 2^n$.

Beweis. Wir wenden die Methode der *vollständigen mathematischen Induktion* an.

- Ist M die leere Menge $\emptyset$, dann hat diese nur sich selbst zur Teilmenge:

$$M = \emptyset \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow P(M) = \{\emptyset\} \Rightarrow |P(M)| = 2^0 = 1.$$

- Ist M einelementig, d.h. $M = \{a\}$, so kann die Potenzmenge nur die leere Menge $\emptyset$ und M selbst als Elemente besitzen:
$$P(\{a\}) = \{\emptyset; \{a\}\} \Rightarrow |P(\{a\})| = 2^1 = 2.$$
- Für $M = \{a; b\}$ wird die Potenzmenge bereits vierelementig:
$$P(\{a; b\}) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\} \Rightarrow |P(\{a; b\})| = 2^2 = 4.$$
- Für $M = \{a; b; c\}$ ist $P(\{a; b; c\})$ achtelementig:
$$P(\{a; b; c\}) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; \{a; b; c\}\}$$
$$\Rightarrow |P(\{a; b; c\})| = 2^3 = 8.$$
- Wir nehmen nun allgemein die Richtigkeit des Gesetzes für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ an und versuchen daraus die Gültigkeit für $n + 1$ herzuleiten.

  Es sei $M = \{a_1;\ a_2; ...;\ a_n;\ a_{n+1}\}$ eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Dann gibt es nach unserer Induktionsannahme genau 2^n Teilmengen, die das Element a_{n+1} nicht enthalten. Hinzu kommen noch einmal 2^n Teilmengen, die a_{n+1} als Element besitzen. Das sind insgesamt $2^n + 2^n = 2.2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen.

□

Aufgabe 2.16. (1) Formulieren Sie die Aussage $A \neq B$ formal in Zeichen.

(2) Auf der Grundmenge G aller Dreiecke seien folgende Mengen erklärt:
A $= \{x \mid x$ ist gleichseitiges Dreieck$\}$
B $= \{x \mid x$ ist gleichschenkliges Dreieck$\}$
C $= \{x \mid x$ ist rechtwinkliges Dreieck$\}$
D $= \{x \mid x$ ist Dreieck mit wenigstens einem 45°-Winkel$\}$
Stellen Sie graphisch die Beziehungen zwischen diesen Mengen dar.

(3) Welche Mengen werden durch folgende Aussageformen erzeugt, wenn als Grundbereich die Menge der ganzen Zahlen gewählt wird?
a) $H_1(x) : -3 \leq x \leq 3; \quad H_2(x) : -3 < x < 3;$
b) $H_3(x) : -3 < x + 2 \leq 3; \quad H_4(x) : -3 \leq x + 2 < 3;$
c) $H_5(x) : -6 \leq 2x \leq 6; \quad H_6(x) : -6 < 2x < 6.$

2.3. **Operationen (Verknüpfungen) mit Mengen.** Mengen lassen sich durch verschiedene Mengenoperationen miteinander verknüpfen, so daß sich stets wieder eine Menge ergibt (sogenannte *innere Verknüpfungen*).

Die Durchschnittsmenge

Die Menge $A \cap B$ (gelesen: A geschnitten B) aller Elemente, die sowohl einer Menge A als auch einer Menge B angehören, ist der *Durchschnitt* von A und B.
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Beispiel 2.17. (1) $M_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; \quad M_2 = \{2; 4; 6; 8; 10\} \quad \Rightarrow$
$$M_1 \cap M_2 = \{2; 4; 6\}.$$
(2) $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}; \quad M_2 = \{2; 4\} \quad \Rightarrow$
$$M_1 \cap M_2 = \{2; 4\} = M_2.$$

(3) $M_1 = \{-1; -2; -3\}; \quad M_2 = \{1; 2; 3\} \quad \Rightarrow$

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset.$$

Sind A und B durch die mengenbildenden Eigenschaften $H_1(x)$ bzw. $H_2(x)$ erklärt, d.h.

$$A = \{x \mid x \in G \wedge H_1(x)\}, \quad B = \{x \mid x \in G \wedge H_2(x)\},$$

so fordert die Durchschnittsmenge die Erfüllung beider Eigenschaften:

$$A \cap B = \{x \mid x \in G \wedge H_1(x) \wedge H_2(x)\}.$$

Haben beide Mengen keine gemeinsamen Elemente, so ist ihr Durchschnitt leer; die Mengen heißen in diesem Fall *elementenfremd* oder *disjunkt*.

Aufgabe 2.18. A, B, C seien Mengen. Es gilt stets:
(1) $A \cap A = A, \quad \emptyset \cap A = A \cap \emptyset = \emptyset$;
(2) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B, \quad A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$;
(3) die Mengendurchschnittsverknüpfung ist *kommutativ* und *assoziativ*:
$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Erst die Assoziativität ermöglicht eine Verallgemeinerung der Durchschnittsverknüpfung auf mehr als zwei Mengen.

Erklärung 2.19. Der Mengenterm

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in G \wedge x \in A_i, \forall i = 1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$$

heißt *generalizierter Durchschnitt* der Mengen $A_1, A_2, ..., A_n$.

Beispiel 2.20. Hochwertige technische Erzeugnisse werden einer Vielzahl von Kontrollen unterworfen, bevor sie in den Vertrieb kommen. Interpretieren wir A_i als die Menge der Produkte, welche die i-te Kontrolle fehlerfrei passiert haben, so wird nach $n(\in \mathbb{N})$ Prüfungen gerade die Menge $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ für den Vertrieb freigegeben, da genau diese Erzeugnisse sämtliche Prüfungen überstehen konnten.

Die Vereinigungsmenge

Die Menge $A \cup B$ (gelesen: A vereinigt B) der Elemente, die wenigstens einer der Mengen A und B angehören, heißt die *Vereinigung* der Mengen A und B.

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Für ein Element x der Vereinigung $A \cup B$ ist stets genau ein der folgenden drei Sachverhalte erfüllt:

I) x gehört nur zu $A : x \in A \wedge x \notin B$;
II) x gehört nur zu $B : x \notin A \wedge x \in B$;
III) x gehört zu $A \cap B : x \in A \wedge x \in B$.

Zusatz 2.21. *Ein Element gehört* **nicht** *der Vereinigung $A \cup B$ an, wenn es weder Element der einen noch der anderen Menge ist:*

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B.$$

Erklärt man A und B durch die Eigenschaften $H_1(x)$ bzw. $H_2(x)$ für Elemente x einer Grundmenge G, so verlangt die Vereinigungsmenge die Erfüllung wenigstens einer der beiden Eigenschaften:

$$A \cup B = \{x \mid x \in G \wedge (H_1(x) \vee H_2(x))\}.$$

Beispiel 2.22. (1) $M_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \quad M_2 = \{2; 4; 6; 8; 10\} \Rightarrow$
$M_1 \cup M_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\}$;

(2) $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}, \quad M_2 = \{2; 4\} \Rightarrow$
$M_1 \cup M_2 = M_1$.

Aufgabe 2.23. A, B, C seien Mengen. Es gilt stets:

(1) Die Vereinigungsverknüpfung ist *kommutativ* und *assoziativ*:

$$A \cup B = B \cup A; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

(2) $A \cup A = A; \quad \emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$;

(3) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A; \quad A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$;

(4) $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$.

Erklärung 2.24. Der Mengenterm $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ heißt *generalizierte Vereinigung* der Mengen $A_1, ..., A_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \exists i \in (1, 2, ..., n) : x \in A_i.$$

Nun läßt sich jede Menge als generalizierte Vereinigung der Einermengen ihrer Elemente schreiben:

$$M = \{a_1; a_2; ...; a_n; ...\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\} \cup ...$$

Aufgabe 2.25. A, B, C seien Mengen. Es gelten folgende Aussagen (die *Distributivgesetze*):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aufgabe 2.26. Beweisen Sie:

$$A \cap (A \cup B) = A; \quad A \cup (A \cap B) = A; \quad A \cup (A \cap B) \cup [A \cap (B \cup C \cup A)] = A.$$

Erklärung 2.27. Die *Differenz* (die Restmenge) $A \setminus B$ (gelesen: A ohne B) zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A, nicht aber zu B gehören.

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \ \ (A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A \cap B\}).$$

Beispiel 2.28. (1) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \quad B = \{2; 4; 6; 8; 10\} \Rightarrow$

$$A \setminus B = \{1; 3; 5\}, \quad B \setminus A = \{8; 10\}.$$

(2) $A = \{1; 2; 3; 4\}, \quad B = \{2; 4\} \Rightarrow$

$$A \setminus B = \{1; 3\}, \quad B \setminus A = \emptyset.$$

Aufgabe 2.29. A, B, C seien Mengen.

(1) Es gilt stets

$$A \setminus A = \emptyset; \quad \emptyset \setminus A = \emptyset; \quad A \setminus \emptyset = A; \quad \emptyset \setminus \emptyset = \emptyset.$$

(2) Die Verknüpfung *Differenz* ist weder kommutativ, noch assoziativ:

$$A \setminus B \neq B \setminus A, \quad (A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C).$$

Den Zusammenhang zwischen Enthaltensein, Differenz und Komplementärmenge zeigen die folgenden Beziehungen (Grundmenge G):

$$\begin{array}{lll} M \subset G & \Rightarrow & \overline{M} = G \setminus M; \\ M = G & \Rightarrow & \overline{M} = G \setminus G = \emptyset; \\ M = \emptyset & \Rightarrow & \overline{M} = G \setminus \emptyset = G. \end{array}$$

Aufgabe 2.30. A, B, C seien Mengen. Mit hilfe von Mengenbildern (Venn-Diagrammen) überprüfe man, ob die folgenden Gesetze der Mengenlehre gültig sind:

(1) Satz vom Widerspruch: $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

(2) Satz vom ausgeschlossenen Dritten: $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

(3) Gesetz von de Morgan: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(4) Gesetz von de Morgan: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(5) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

(6) Es sei G eine Grundmenge und es sei $A \subseteq G \Rightarrow$
$A \cap (G \setminus A) = \emptyset, \quad A \cup (G \setminus A) = G, \quad G \setminus (G \setminus A) = A$.

(7) $A \subseteq G, \quad B \subseteq G \quad \Rightarrow \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(8) $A \subseteq G, \quad B \subseteq G \quad \Rightarrow \quad A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B, \quad A \setminus B = A \cap \overline{B}, \quad A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

(9) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A, \quad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

(10) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

(11) $A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \setminus B \subset C, \quad A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$.

2.4. **Paarmengen, Produktmengen, Abbildungen.** Zusammenfassungen von Objekten auf Grund bestimmter Eigenschaften definieren Mengen; Beziehungen zwischen Objekten führen zu den Begriffen der Abbildung und der Funktion.

Bisher haben wir Elemente von Mengen nur als vereinzelte Objekte, wie z.B. Zahlen oder Variable, kennengelernt.

Ausgehend von zwei Mengen A und B und einer vorgegebenen Beziehung zwischen den Elementen von A und B untersuchen wir je ein $x \in A$ und ein $y \in B$ daraufhin, ob zwischen diesen die betreffende Beziehung besteht. Ist dies der Fall, so bringen wir diese Eigenschaft mathematisch dadurch zum Ausdruck, daß wir diese beiden Elemente zu einem *geordneten Elementenpaar* (x, y) zusammenfassen.

Erklärung 2.31. Unter einem *geordneten Paar* wird eine Zweiermenge verstanden, die erst durch Angabe der beiden Elemente und deren Reihenfolge eindeutig bestimmt ist.

Wir weisen ausdrücklich auf den Unterschied zwischen geordnetem Elementenpaar (x, y) und zweielementiger Menge $\{x, y\}$ (Zweiermenge) hin:

Für das geordnete Paar (x, y) fordern wir

(a) $(x, y) \neq (y, x)$ für $x \neq y$;

(b) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$,

während für eine Menge von zwei Elementen bekanntlich

$$\{a; b\} = \{b; a\};\ \{a; b\} = \{c; d\} \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$$

gilt.

Erklärung 2.32. Die Menge $A \times B$ (gelesen: A kreuz B) aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$ heißt die *Produktmenge* (das kartesische Produkt, die Kreuzmenge) der Mengen A und B

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

x und y nennt man *Koordinaten* des geordneten Paares $(x, y) \in A \times B$.

Da es bei der Paarbildung auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, ist diese Mengenverknüpfung sicher **nicht** kommutativ:

$$A \times B \neq B \times A.$$

Durch Zurückführung auf den Paarbegriff erklärt man rekursiv

$$(a_1, a_2, a_3) := ((a_1, a_2), a_3)$$

für das Tripel,

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) := ((a_1, a_2, a_3), a_4)$$

für das Quadrupel, und allgemein für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n) := ((a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n)$$

für das n-tupel. Ein Tripel ist also ein Paar, dessen erstes Element selbst ein Paar ist, entsprechend ist ein Quadrupel ein Paar, dessen erstes Element ein Tripel ist usw.

Demnach ist **scharf zu trennen** zwischen

$$(A \times B) \times C = \{((x, y), z) \mid (x, y) \in A \times B \wedge z \in C\}$$

und

$$A \times (B \times C) = \{(x, (y, z)) \mid x \in A \wedge (y, z) \in B \times C\}.$$

Als Folge der Negation $((x, y), z) \neq (x, (y, z))$ gilt das Nichtbestehen der Assoziativität

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C).$$

Die Mengen A und B in $A \times B$ können auch übereinstimmen. Besonders wichtig ist der Fall $A = B = \mathbb{R}$. Statt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ schreibt man auch $\mathbb{R}^2$ (gelesen: $\mathbb{R}$ zwei).

Aufgabe 2.33. Bestimmen Sie $M_1 \times M_2$ bzw. $M_2 \times M_1$, falls

(1) $M_1 = \{2; 3\}, \quad M_2 = \{3; 4; 5\}$;

(2) $M_1 = \{2; 3\}, \quad M_2 = \{2; 3\}$;

(3) $M_1 = \{a; e; i\}, \quad M_2 = \{n; m\}$.

Aufgabe 2.34. Mit Hilfe der Definitionen zeige man die Gültigkeit folgender *Distributivgesetze*:

(1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

(3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(4) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(5) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Erklärung 2.35. Sind zwei Mengen A und B gegeben, so heißt jede Teilmenge $\mathcal{R}$ der Produktmenge $A \times B$ eine *Abbildung* aus A in B.

Beispiel 2.36. (1) $M_1 = \{a; b; c; d; e; f\}, \quad M_2 = \{5; 6; 7; 8\} \quad \mathcal{R} = \{(a, 5); (b, 6); (c, 7)\}$.
Es gilt: $\mathcal{R} \subset M_1 \times M_2$.
(2) $M_1 = \{a; b; c\}, \quad M_2 = \{5; 6; 7\} \quad \mathcal{R} = \{(a, 5); (b, 6); (c, 7)\}$.
Es gilt: $\mathcal{R} \subset M_1 \times M_2$.

Alle an erster Stelle bzw. alle an zweiter Stelle stehenden Elemente der geordneten Paare der Teilmenge $\mathcal{R}$ bilden ihrerseits je eine neue Menge, die als *Vorbereich* $V_\mathcal{R}$ von $\mathcal{R}$ bzw. als *Nachbereich* $N_\mathcal{R}$ von $\mathcal{R}$ bezeichnet wird.

Im Beispiel (1) besteht der Vorbereich von $\mathcal{R}$ aus den Elementen a, b und c; der Nachbereich von $\mathcal{R}$ aus den Elementen 5, 6, 7. Dabei gilt: $V_\mathcal{R} \subset M_1,\ N_\mathcal{R} \subset M_2$.

Im Beispiel (2) besteht der Vorbereich von $\mathcal{R}$ aus den Elementen a, b und c; der Nachbereich von $\mathcal{R}$ aus den Elementen 5, 6, 7. Dabei gilt: $V_\mathcal{R} = M_1,\ N_\mathcal{R} = M_2$.

Ist $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, so gilt $V_\mathcal{R} \subseteq A \wedge N_\mathcal{R} \subseteq B$. Die Menge A heißt dann *Quellmenge*, und die Menge B *Zielmenge* der Abbildung $\mathcal{R}$. Die Elemente des Vorbereiches werden *Urbilder* oder *Originale*, die Elemente des Nachbereiches *Bilder* genannt.

In Abhängigkeit von den Relationen, die zwischen dem Vorbereich von $\mathcal{R}$ und der Menge A einerseits und dem Nachbereich von $\mathcal{R}$ und der Menge B andererseits bestehen, unterscheidet man vier verschiedene Möglichkeiten der Abbildung zweier Mengen aufeinander:

$V_\mathcal{R} \subset A \ \wedge\ N_\mathcal{R} \subset B$	Abbildung *aus A in B*;
$V_\mathcal{R} \subset A \ \wedge\ N_\mathcal{R} = B$	Abbildung *aus A auf B*;
$V_\mathcal{R} = A \ \wedge\ N_\mathcal{R} \subset B$	Abbildung *von A in B*;
$V_\mathcal{R} = A \ \wedge\ N_\mathcal{R} = B$	Abbildung *von A auf B*.

Erklärung 2.37. Eine Abbildung $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ heißt *rechtseindeutig* (oder nur eindeutig), wenn sie keine zwei Paare mit gleicher erster, aber verschiedener zweiter Koordinate enthält, d.h. *jedes Urbild besitzt genau ein Bild*:

$$\forall x \in V_\mathcal{R},\ \forall y \in N_\mathcal{R},\ \forall z \in N_\mathcal{R} \,:\, (x, y) \in \mathcal{R} \ \wedge\ (x, z) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow y = z.$$

Erklärung 2.38. Eine Abbildung $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ heißt *linkseindeutig*, wenn sie keine zwei Paare mit gleicher zweiter, aber verschiedener erster Koordinate enthält, d.h. *jedes Bild hat genau ein Urbild*:

$$\forall x \in V_\mathcal{R},\ \forall y \in N_\mathcal{R},\ \forall z \in V_\mathcal{R} \,:\, (x, y) \in \mathcal{R} \ \wedge\ (z, y) \in \mathcal{R} \ \Rightarrow x = z.$$

Erklärung 2.39. Eine Abbildung $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ heißt *eineindeutig*, wenn jedes Urbild genau ein Bild (Rechtseindeutigkeit) und auch umgekehrt jedes Bild genau ein Urbild (Linkseindeutigkeit) besitzt.

Erklärung 2.40. Wird die einer Abbildung $\mathcal{R}$ zugrunde liegende Zuordnung umgekehrt, wird also die Rolle von Urbild und Bild vertauscht, so entsteht eine neue Abbildung. Sie wird als *Umkehrabbildung* oder inverse Abbildung $\mathcal{R}^{-1}$ bezeichnet.

$$(y, x) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R} \ \wedge \ V_{\mathcal{R}^{-1}} = N_{\mathcal{R}} \ \wedge \ N_{\mathcal{R}^{-1}} = V_{\mathcal{R}}.$$

Der Vorbereich einer Abbildung wird auch *Definitionsmenge* (Urbildmenge, Originalmenge, Definitionsbereich, Argumentenbereich), und der Nachbereich auch *Bildmenge* genannt.

Ordnet f dem Element $x \in A$ das Element (das eindeutigbestimmte Element) $y \in B$ zu, so bringen wir diese (rechtseindeutige) Zuordnung durch $y = f(x)$ (oder $f : x \mapsto y$) zum Ausdruck.

Bei analytischen Anwendungen heißt $y = f(x)$ die *Funktionsgleichung*.

Die Zuordnungsvorschrift f ist die *Funktion*.

Wichtig! $f(x)$ bzw. y ist **nicht** die Funktion, sondern der *Funktionswert* an der Stelle x.

Erklärung 2.41.
(i) Eine Abbildung f von A in B mit $x \mapsto f(x)$ heißt *injektiv*, wenn unterschiedlichen Urbildern stets auch unterschiedliche Bilder zugeordnet werden:
$$\forall\, x_1,\, x_2 \in A \text{ mit } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$
d.h. ein Bild gehört niemals zu zwei verschiedenen Urbildern.
(ii) Eine Abbildung von A auf B mit $x \mapsto f(x)$ heißt *surjektiv*, wenn jedes Bild **mindestens** ein Urbild hat.
(iii) Eine Abbildung f von A auf B, die gleichzeitig injektiv und surjektiv ist, heißt *bijektiv*.

Bijektionen von A auf B sind **stets** eineindeutig (umkehrbareindeutig).

Zum Vergleich zweier Mengen in Bezug auf ihren Reichtum an Elementen dient der Begriff der *Mächtigkeit*, der es vor allem gestattet, auch unendliche Mengen miteinander zu vergleichen.

Erklärung 2.42. Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn es mindestens eine eineindeutige Abbildung der beiden Mengen aufeinander gibt.

Beim Vergleich endlicher Mengen kann als Kriterium an Stelle des Begriffs der Mächtigkeit auch die Anzahl der Elemente herausgezogen werden. Das ist bei unendlichen Mengen, bei denen sich keine exakte Anzahlbestimmung durchführen läßt, nicht möglich. Es kann hierbei sogar passieren, daß *ein Teil gleichmächtig dem Ganzen ist*, denn eine unendliche Menge kann die gleiche Mächtigkeit wie eine ihrer echten Teilmengen haben.

Aufgabe 2.43.
(1) Die Menge der natürlichen Zahlen läßt sich eineindeutig auf die Menge der geraden (ungeraden) natürlichen Zahlen abbilden.

Beweis.
$$\begin{array}{cccccccc}
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & ... & 2n & ... \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & ... & \updownarrow & ... \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ... & n & ... \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & ... & \updownarrow & ... \\
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & ... & 2n-1 & ...
\end{array}$$

(2) Beweisen Sie die Gleichmächtigkeit der Mengen A, B:
  a) $A = \{$beiderseits abgeschlossene echte Strecke$\}$,
     $B = \{$beiderseits abgeschlossene echte Strecke$\}$.
  b) A und B sind Kreise.
  c) $A = \{$offene echte Strecke$\}$,
     $B = \{$Halbkreis$\}$.

Erklärung 2.44. Eine Menge, die zur Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist, heißt *abzählbar unendlich.*

Unendliche Mengen, die im sinne dieser Definition nicht abzählbar sind, werden *überabzählbar* genannt.
Eine unendliche überabzählbare Menge ist $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2.45. (1) Bilden Sie den Durchschnitt $A \cap B$, die Vereinigung $A \cup B$ und die Differenz $A \setminus B$ der Mengen A und B unter der Bedingung, daß $A \subset B$ gilt.

(2) Bilden Sie Durchschnitt, Vereinigung und Differenz der Mengen:
  (a) $A = \{3; 4; 6; 7; 8\}$, $B = \{2; 4; 5; 6; 7\}$;
  (b) $A = \{a; b; c\}$, $B = \emptyset$;
  (c) $A = \emptyset$, $B = \{1; 3; 5; 7\}$.

(3) Gegeben sind die Mengen

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 2/x \wedge x \leq 20\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3/x \wedge x < 20\},$$

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 5/x \wedge x \leq 30\}.$$

Bilden Sie $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

(4) Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3x/36\}, \quad M_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 8 \wedge 2/x\};$$

$$M_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 12\}, \quad M_4 = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 4x/48\}.$$

Geben Sie an, welche Relationen zwischen den einzelnen Mengen bestehen.

(5) Aus der Produktmenge $M_1 \times M_2$ mit $M_1 = \{a; b; c\}$ und $M_2 = \{1; 2; 3\}$ sind folgende Teilmengen herausgegriffen worden:

$$\begin{array}{ll} F_1 = \{(a; 1); (b; 1); (c; 1)\}, & F_2 = \{(a; 3); (b; 2); (c; 1)\}; \\ F_3 = \{(a; 1); (b; 2); (c; 3)\}, & F_4 = \{(a; 1); (b; 2); (c; 2)\}; \\ F_5 = \{(a; 1); (c; 3)\}, & F_6 = \{(a; 2); (b; 2)\}. \end{array}$$

Untersuchen Sie um welche Abbildung (aus - in, aus - auf, von - in, von - auf) es sich jeweils handelt und welche der Abbildungen eindeutig bzw. eineindeutig sind.

Es seien $f_1 : V_{f_1} \to N_{f_1}$, $f_2 : V_{f_2} \to N_{f_2}$ zwei Abbildungen mit $N_{f_1} \cap V_{f_2} = M \neq \emptyset$. Es seien $A := \{x \mid x \in V_{f_1} \wedge f_1(x) = y \in M\}$, $B := \{z \mid y \in M \wedge f_2(y) = z \in N_{f_2}\}$.
Dann gilt $A \subseteq V_{f_1}$ und $B \subseteq N_{f_2}$.

Erklärung 2.46. Die Verknüpfung von f_1 mit f_2 (in dieser Reihenfolge) heißt gemäß $f_2 \circ f_1 : A \to B$ mit $x \mapsto (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$ die *Verkettung* (Komposition) der Abbildungen f_1 und f_2.

Ist $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung (Funktion) von A auf B und ist $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrabbildung zu f, so gilt stets:

$$\forall y \in B : f \circ f^{-1}(y) = y, \quad \forall x \in A : f^{-1} \circ f(x) = x.$$

Bezeichnet $i_M : M \to M$ mit $x \mapsto x \ \forall x \in M$ die *identische* Abbildung auf M, so ist $f \circ f^{-1} = i_B$ bzw. $f^{-1} \circ f = i_A$.

Erklärung 2.47. Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, welche die Eigenschaft hat unverändert zu bleiben, falls man die Koordinaten jedes Paares vertauscht, heißt *symmetrisch*:

$$\forall x \in A \wedge y \in B : (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}.$$

Genau die symmetrischen Abbildungen sind gleich ihren Umkehrungen.

Aufgabe 2.48. Beweisen Sie, daß folgende Relationen gültig sind:

(1) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

(4) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

(5) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - ... + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$
$= \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$;

(6) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{3}{5}$, wenn $n \geq 3$ ist;

(7) $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} < 1 - \dfrac{1}{n}$, wenn $n \geq 2$ ist;

(8) $2^n > n^2 + 2$, wenn $n \geq 5$ ist;

(9) $2^n > 2n$, wenn $n \geq 3$ ist;

(10) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, wenn $n \in \mathbb{N}$, $x \in [-1, \infty)$;

(11) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} < 1$;

(12) $\dfrac{1}{2}\, n^2 < 1 + 2 + 3 + ... + n < \dfrac{1}{2}\,(n+1)^2$;

(13) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$;

(14) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}\,(4n^2 - 1)n$;

(15) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$;

(16) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}, \ x \neq 1$;

(17) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x},\ x \neq m\pi,\ m \in \mathbb{Z};$

(18) $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(\frac{1}{2}(2n+1)x)}{2\sin(\frac{x}{2})},\ x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z};$

(19) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})},\ x \neq 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z};$

(20) $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|,\ n \in \mathbb{N}.$

3. Kombinatorik

Die Kombinatorik dient zur Lösung einer besonderen Gattung von Aufgaben, deren Eigenart sich am leichtesten an Beispielen klarmachen läßt.

(1) Zwölf Personen sollen namentlich in eine Liste eingetragen werden. Die Eintragung kann in sehr verschiedener Reihenfolge vorgenommen werden, etwa nach dem Alter oder der Größe der Personen, nach der alphabetischen Ordnung ihrer Namen oder nach andersartigen Gesichtspunkten. Auf wieviel verschiedene Arten ist diese Einordnung möglich?

(2) Ein Kind hat 10 Perlen, und zwar 2 rote, 3 schwarze und 5 weiße. Die Perlen gleicher Farbe haben jedesmal auch gleiche Größe und gleiche Form, so daß sie nicht voneinander unterschieden werden können. Auf wieviel verschiedene Arten kann das Kind diese 10 Perlen von unten nach oben auf eine lotrecht gehaltene Nadel reihen?

(3) Aus einem Kartenspiel, welches 32 verschiedene Karten enthält, bekommt ein Spieler bei jedem Spiele 10 Karten zugeteilt. Wieviel verschiedene Zusammenstellungen kann der Spieler nach und nach erhalten, wenn er bei jedem neuen Spiel eine neue Zusammenstellung bekommt und das Spiel hinreichend lange fortsetzt?

(4) Wieviel verschiedene Wörter von je 5 Buchstaben kann man aus den 25 Buchstaben des Alphabets zusammensetzen, wenn man ein und denselben Buchstaben in das nämliche Wort mehrmals aufnehmen darf und auch solche Zusammenstellungen wie z.B. pkktk, welche in keiner Sprache vorkommen, ja sich gar nicht aussprechen lassen, als Wörter gelten läßt?

(5) Wieviel Steine würde ein Dominospiel enthalten, wenn die Nummern nicht wie gewöhnlich von 0 bis 6, sondern von 0 bis 12 gingen?

Bei der Beschäftigung mit diesen und ähnlichen Aufgaben handelt es sich um mehr als eine Spielerei, weil diejenigen Schlußweisen und Sätze, auf welchen ihre Lösung beruht, in vielen wichtigen Teilen der Mathematik Anwendung finden.

In jedem der angeführten Beispiele wird nach der Anzahl der verschiedenen *Zusammenstellungen* gefragt, welche sich aus gewissen gegebenen Dingen unter bestimmten, von Fall zu Fall verschiedenen Bedingungen bilden lassen. Stets denkt man sich eine wohl abgegrenzte Mehrheit von Dingen in Betracht gezogen, von denen genau angegeben ist, welche als gleich und welche als verschieden angesehen werden sollen.

Jedes einzelne der Dinge, welche bei einer Aufgabe der Kombinatorik in Betracht gezogen werden, heißt ein *Element*.

Beispielsweise hat man unter "Elementen" bei der 1. Aufgabe die Namen der 12 Personen, bei der 3. Aufgabe die 32 Karten der Spiels und bei der 5. Aufgabe die Nummern von 0 bis 12 zu verstehen.

Zur Bezeichnung von Elementen benutzt man Ziffern oder auch Buchstaben. Verschiedene Elemente werden stets durch verschiedene Zeichen, gleiche durch das nämliche Zeichen dargestellt.

Man spricht von Zusammenstellungen *ohne Berücksichtigung der Anordnung*, oder von solchen *mit Berücksichtigung der Anordnung.* Beispielsweise ist es für einen Kartenspieler in der Regel gleichgültig, in welcher Reihenfolge er die ihm zugeteilten Karten erhält. Dagegen ist es beim Druck eines verschiedene Buchstaben enthaltenden Wortes nicht einerlei, in welcher Reihenfolge der Setzer diese Buchstaben zusammenfügt.

3.1. **Permutationen.**

Erklärung 3.1. Wenn eine endliche Anzahl von Elementen vorgelegt ist, so nennt man jede Zusammenstellung, welche dadurch entsteht, daß man die sämtlichen gegebenen Elemente in irgendeiner Anordnung nebeneinander setzt, eine *Permutation* der gegebenen Elemente (von dem lateinischen Worte *permutare* = umsetzen; Permutation = Ergebnis einer Umsetzung).

Zwei Permutationen der gleichen Elemente können sich überhaupt nur durch die Anorgnung der Elemente unterscheiden. Sie gelten immer als verschieden, sobald die Reihenfolge in ihnen nicht genau die nämliche ist.

Erste Grundaufgabe: Anzahl der Permutationen voneinander verschiedener Elemente.
Es seien n voneinander verschiedene Elemente gegeben. In wieviel verschiedenen Anordnungen kann man dieselben in eine Reihe nebeneinander stellen, oder wenigstens gestellt denken?

Ist nur ein Element $\{1\}$ vorhanden, so gibt es nur die eine Anordnung: $\mathcal{P} = 1$.
Sind zwei Elemente $\{1; 2\}$ gegeben, so gibt es zwei Permutationen: $\mathcal{P}_1 = 12$ und $\mathcal{P}_2 = 21$.
Sind drei elemente $\{1; 2; 3\}$ gegeben, so gibt es 6 Permutationen:

$$\mathcal{P}_1 = 123,\ \mathcal{P}_2 = 231,\ \mathcal{P}_3 = 312,\ \mathcal{P}_4 = 132,\ \mathcal{P}_5 = 321,\ \mathcal{P}_6 = 213.$$

Bei 4 Elementen $\{1; 2; 3; 4\}$ gibt es 24 Permutationen:

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{P}_1 = 1234 & \mathcal{P}_2 = 1243 & \mathcal{P}_3 = 1324 & \mathcal{P}_4 = 1342 \\
\mathcal{P}_5 = 1423 & \mathcal{P}_6 = 1432 & \mathcal{P}_7 = 2134 & \mathcal{P}_8 = 2143 \\
\mathcal{P}_9 = 2314 & \mathcal{P}_{10} = 2341 & \mathcal{P}_{11} = 2413 & \mathcal{P}_{12} = 2431 \\
\mathcal{P}_{13} = 3124 & \mathcal{P}_{14} = 3142 & \mathcal{P}_{15} = 3214 & \mathcal{P}_{16} = 3241 \\
\mathcal{P}_{17} = 3412 & \mathcal{P}_{18} = 3421 & \mathcal{P}_{19} = 4123 & \mathcal{P}_{20} = 4132 \\
\mathcal{P}_{21} = 4213 & \mathcal{P}_{22} = 4231 & \mathcal{P}_{23} = 4312 & \mathcal{P}_{24} = 4321
\end{array}$$

Allgemein gilt für eine beliebige Anzahl n von Elementen der folgende

Satz 3.2. *Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist gleich dem Produkte* $1.2.3...n$ *aller natürlichen Zahlen von* 1 *bis* n.

Beweis. I. Die Behauptung ist richtig für $n = 1, 2, 3$. (Das haben wir direkt gezeigt.)

II. Es läßt sich nun zeigen: Wenn die Behauptung für irgendeine Anzahl von Elementen, etwa für $n = k$ Elemente, richtig ist, so ist sie auch für die nächst größere Anzahl $n = k + 1$ von Elementen richtig.

Sind $k+1$ verschiedene Elemente gegeben, so kann man ihre Permutationen in $k+1$ Arten einteilen, indem man jedesmal die mit dem gleichen Element beginnenden Permutationen zu einer Art vereinigt. Die Permutationen jeder einzelnen Art werden dann dadurch erhalten, daß man auf das die Art kennzeichnende Anfangselement alle Permutationen der k übrigen Elemente folgen läßt. Die Anzahl der Permutationen einer Art ist daher jedesmal gleich der Anzahl der Permutationen von k verschiedenen Elementen, also nach Annahme gleich $1.2.3...k$. Folglich erhalten die $k+1$ verschiedenen Arten zusammen $1.2.3...k.(k+1)$ Permutationen.

Aus I. und II. zusammen folgt, daß der ausgesprochene Satz für *jede* Anzahl von Elementen gültig ist.

$\square$

Wichtig! Ein etwas anderes Beweisverfahren ist das folgende: Man bezeichnet mit P_n die (noch unbekannte) Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen. Dann ist $P_{k+1} = (k+1)P_k$. Da nun direkt festgestellt wurde, daß $P_1 = 1$ ist, so können wir die Gleichungen $P_1 = 1,\ P_2 = 2P_1 = 2.1,\ P_3 = 3P_2 = 3.2.1, ..., P_{n-1} = (n-1)P_{n-2},\ P_n = nP_{n-1}$ hinschreiben, aus denen sich sofort die zu erweisende Gleichung $P_n = 1.2.3...n$ ergibt. Es gilt nämlich:

$$P_1.P_2.P_3...P_{n-1}.P_n = 1.2P_1.3P_2...(n-1)P_{n-2}.nP_{n-1} \quad \Rightarrow$$
$$P_n = 1.2.3...(n-1).n,$$

da $P_1.P_2...P_{n-1} \neq 0$ ist.

Dieses Verfahren, das in der Formel $P_{k+1} = (k+1)P_k$ seine Hauptstütze hat, nennt man *Rekursionsverfahren*, die Formel dann eine *Rekursionsformel.*

Doch, es ist nicht immer so einfach, aus einer Rekursionsformel das allgemeine Gesetz zu erschließen. Sehr häufig muß man sich mit der Möglichkeit der rekutsiven Berechnung der späteren Werte mit Hilfe der Anfangswerte begnügen.

Für das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen, oberhalb 1 liegenden, ganzen Zahl n einschließlich hat man wegen seines häufigen Vorkommens ein abkürzendes Zeichen $n!$ (gelesen: n-Fakultät) eingeführt. Außerdem gilt als **Festsetzung**, daß die Zeichen 0! und 1! beide die Zahl 1 bedeuten sollen. Für negative und für nicht ganzzahlige Werte von n hat das Zeichen $n!$ **keine** Bedeutung.

Man sagt, die Permutationen von mehreren gegebenen Elementen seien *lexikographisch* (natürlich) geordnet, wenn von irgendzwei verschiedenen Permutationen stets diejenige vorangeht, deren erstes Element das niedrigere ist; falls jedoch die ersten Elemente gleich sind, diejenige, deren zweites Element das niedrigere ist; falls auch noch die zweiten Elemente übereinstimmen, diejenige, deren drittes Element das niedrigere ist, usf.

In der lexikographischen Anordnung der Permutationen steht an erster Stelle diejenige Permutation, welche die gegebenen Elemente in der natürlichen Anordnung enthält.

3.1.1. *Die Inversion.*

Erklärung 3.3. Es sei eine endliche Anzahl verschiedener Elemente gegeben, zwischen denen eine von vornherein gegebene Anordnung besteht, und es werde eine bestimmte Permutation dieser Elemente ins Auge gefaßt. Wenn irgend zwei Elemente in dieser Permutation umgekehrte Stellung haben wie in der natürlichen Rangordnung, so daß das höhere Element dem niedrigeren vorangeht, so sagt man, daß diese Elemente in jener Permutation eine *Inversion* oder einen *Fehlstand* bilden (Inversion = Umkehrung der natürlichen Anordnung).

Satz 3.4. *Wenn man aus einer Permutation P von lauter verschiedenen Elementen eine andere Permutation P' dadurch ableitet, daß man irgend zwei Elemente miteinander vertauscht, aber sonst keine Änderung vornimmt, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl.*

Beweis. Bei Vertauschung von zwei benachbarten Elementen ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen stets um eine Einheit:

$$a_1\, a_2 \ldots a_k\, a_i \ldots a_n \quad \mapsto \quad a_1\, a_2 \ldots a_i\, a_k \ldots a_n.$$

Zweitens werde vorausgesetzt, daß die Elemente i und k in P nicht nebeneinander stehen, sondern durch eine Gruppe von α Elementen $e_1, e_2, \ldots, e_\alpha$ voneinander getrennt seien:

$$i\, e_1\, e_2 \ldots e_\alpha\, k \;\mapsto\; k\, e_1\, e_2 \ldots e_\alpha\, i.$$

Wir führen den Bestandteil $i\, e_1\, e_2 \ldots e_\alpha\, k$ der Permutation P schrittweise in den Bestandteil $k\, e_1\, e_2 \ldots e_\alpha\, i$ der Permutation P' über, und zwar so, daß bei jedem einzelnen Schritt immer nur zwei benachbarte Elemente vertauscht werden:

$$i\, e_1\, e_2\, e_3 \ldots e_\alpha\, k \;\mapsto\; e_1\, i\, e_2\, e_3 \ldots e_\alpha\, k \;\mapsto\; e_1\, e_2\, i\, e_3 \ldots e_\alpha\, k \;\mapsto\; \ldots$$

Nach $\alpha + 1$ Schritten ergibt sich $e_1\, e_2 \ldots e_\alpha\, k\, i$, und hieraus entsteht nach α Schritten

$$e_1\, e_2 \ldots e_\alpha\, k\, i \;\mapsto\; e_1\, e_2 \ldots k\, e_\alpha\, i \;\mapsto\; \ldots \;\mapsto\; e_1\, k\, e_2 \ldots e_\alpha\, i \;\mapsto\; k\, e_1\, e_2 \ldots e_\alpha\, i$$

der Bestandteil $k\, e_1\, e_2 \ldots e_\alpha\, i$ der Permutation P'. Der erwähnte allmähliche Übergang läßt sich in $2\alpha + 1$ Schritten ausführen.

Da die Anzahl der vorhandenen Inversionen bei jedem Schritt um eine Einheit zu- oder abnimmt, so ist, wenn jene Anzahl p-mal um eine Einheit zugenommen und q-mal um eine Einheit abgenommen hat, die Gesamtänderung gleich $p - q$. Das ist aber, da $p + q = 2\alpha + 1$ und $p - q = 2\alpha + 1 - 2q = 2(\alpha - q) + 1$ ist, ebenfalls eine ungerade Zahl.

□

Eine Permutation von lauter verschiedenen Elementen, zwischen denen eine von vornherein gegebene Anordnung besteht, heißt *gerade* oder *ungerade*, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen enthält. (Die Zahl 0 gilt nach allgemein angenommener Übereinkunft als gerade Zahl.) Diejenige Permutation, welche die gegebenen Elemente in der natürlichen Anordnung enthält, ist den geraden Permutationen zuzurechnen.

Die Anzahl der geraden Permutationen von n verschiedenen Elementen ist, wenn $n > 1$ ist, immer ebenso groß wie die der ungeraden, nämlich gleich $\frac{1}{2}(n!)$.

Zweite Grundaufgabe: Anzahl der Permutationen von Elementen, die nicht alle verschieden sind.

Es seien n Elemente gegeben, welche nicht alle voneinander verschieden sind, sondern so in p Arten zerfallen, daß die Elemente jeder einzelnen Art verschieden sind. Die erste dieser Arten enthalte α_1, die zweite α_2, ..., die letzte α_p Elemente, wobei $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$ ist. Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen die Anzahl der Permutationen?

Es seien beispielsweise die Elemente $a, a; b, b, b; c, c, c, c, c$ gegeben. Wenn man an den gleichen Elementen irgendwelche unterschiedlichen Merkmale anbringt, so erhält man 10 verschiedene Elemente, welche beziehentlich durch $a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ bezeichnet werden mögen. Diese liefern 10! Permutationen. Nimmt man nun die unterscheidenden Merkmale, welche man an den beiden Elementen a, der ersten Art angebracht hatte, wieder fort, so fallen je zwei der erwähnten Permutationen in eine zusammen, z.B. $b_2\, c_3\, a_1\, b_1\, c_1\, c_2\, b_3\, a_2\, c_4\, c_5$ und $b_2\, c_3\, a_2\, b_1\, c_1\, c_2\, b_3\, a_1\, c_4\, c_5$.

Für die Elemente $a, a; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ ist daher die Anzahl der Permutationen gleich $\frac{10!}{2!}$. Nimmt man sodann auch die unterscheidenden Merkmale, welche man an den Elementen b, b, b der zweiten Art angebracht hatte, wieder fort, so fallen je 3! Permutationen in eine zusammen, nämlich jedesmal alle diejenigen, welche dadurch ausenander hervorgehen, daß man bloß die Elemente b_1, b_2, b_3 untereinander vertauscht. Für die Elemente $a, a; b, b, b; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ ist daher die Anzahl der Permutationen gleich $\frac{10!}{2!\,3!}$.

Nimmt man endlich die an den Elementen der letzten Art angebrachten unterscheidenden Merkmale auch noch fort, so fallen von den noch übrigen Permutationen je 5! in eine zusammen. Für die Elemente $a, a; b, b, b; c, c, c, c, c$ wird daher die Anzahl der Permutationen gleich $\frac{10!}{2!\,3!\,5!}$.

Ergebnis: Wenn n Elemente so in p Arten zerfallen, daß die Elemente jeder einzelnen Art einander gleich, Elemente verschiedener Arten jedoch verschieden sind, und die erste dieser Arten α_1, die zweite α_2, ..., die p-te α_p Elemente enthält, so ist die Anzahl der Permutationen stets gleich einer ganzen positiven Zahl:

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p)!}{\alpha_1!\, \alpha_2! ... \alpha_p!} = \frac{n!}{\alpha_1!\, \alpha_2! ... \alpha_p!}$$

Aufgabe 3.5. (1) Ein Stadtteil von der Form eines Rechtecks ist auf seinen 4 Seiten von α Straßen durchzogen, welche dem einen und von β Straßen, welche dem anderen Paar von Gegenseiten des begrenzenden Rechtecks parallel laufen. Auf wieviel verschiedenen Wegen kann man, ohne Umwege zu machen, von einer der vier äußersten Ecken des Stadtteils zu der diagonal gegenüberliegenden äußersten Ecke gelangen?

Antwort: $\frac{\alpha+\beta+2}{(\alpha+1)!(\beta+1)!}$

(2) Wieviel verschiedene 6-stellige Zahlen kann man aus den Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5$ zusammenstellen?

Antwort: $5(5!)$

(3) Welche ist die Anzahl der 5-stelligen ungeraden Zahlen, die man aus den Ziffern $2, 3, 4, 6, 8$ zusammenstellen kann?

(4) Aus wieviel Elementen kann man 6 (bzw. 120) Permutationen zusammenstellen?

(5) Rechnen Sie aus: $\dfrac{n!}{(n-1)!}$; $\dfrac{n!}{(n+1)!}$; $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

(6) Welche Zahl ist größer: $2(n!)$ oder $(2n)!$; $\frac{1}{2}(2n)!$ oder $n!$?

3.2. **Kombinationen.**

Erklärung 3.6. Wenn mehrere Elemente gegeben sind und k eine positive ganze Zahl bezeichnet, welche jedoch die Anzahl der Elemente nicht übersteigt, so nennt man jede Zusammenstellung, die man erhält, indem man irgend k der gegebenen Elemente herausgreift und in irgendeiner Anordnung nebeneinander stellt (oder sich dies wenigstens ausgeführt denkt), eine *Kombination k-ter Ordnung* (oder auch k-ter Klasse) der gegebenen Elemente.

Unter den Kombinationen erster Klasse von irgendwelchen gegebenen Elementen sind natürlich diese Elemente selbst zu verstehen.

Man spricht von Kombinationen mit Berücksichtigung der Anordnung und von Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung.

Dritte Grundaufgabe: Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung.

Man soll, unter der Voraussetzung, daß k eine ganze positive, nicht oberhalb n gelegene Zahl bezeichnet, die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen Elementen erhalten, und zwar

- mit Berücksichtigung der Anordnung;
- ohne Berücksichtigung der Anordnung.

I. Die Anordnung wird berücksichtigt.

Die Kombinationen zur ersten Klasse von n verschiedenen Elementen $1, 2, 3, ..., n$ stimmen mit diesen Elementen überein. Ihre Anzahl ist gleich n.

Die Kombinationen derselben n Elemente zur zweiten Klasse mit Berücksichtigung der Anordnung sind

$$\begin{array}{llllll} 12 & 13 & 14 & ... & 1(n-1) & 1n \\ 21 & 23 & 24 & ... & 2(n-1) & 2n \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ n1 & n2 & n3 & ... & n(n-2) & n(n-1) \end{array}$$

Ihre Anzahl ist gleich $n(n-1)$.

Ist $n > 2$, so lassen sich Kombinationen der nämlichen Elemente zu dreien bilden. Die Kombinationen lauten:

$$\begin{array}{llll} 123 & 124 & ... & 12n \\ 132 & 134 & ... & 13n \\ ... & ... & ... & ... \\ 1n2 & 1n3 & ... & 1n(n-1) \\ 213 & 214 & ... & 21n \\ ... & ... & ... & ... \\ n(n-1)1 & n(n-1)2 & ... & n(n-1)(n-2) \end{array}$$

Die Anzahl der Zeilen ist gleich $n(n-1)$, und jede von ihnen enthält $n-2$ Kombinationen. Die Gesamtzahl aller Kombinationen dritter Ordnung ist $n(n-1)(n-2)$.

Allgemein gilt folgender

Satz 3.7. *Die Anzahl der Kombinationen zu je k von n verschiedenen Elementen mit Berücksichtigung der Anordnung wird durch das Produkt $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ der Zahl n und der $k-1$ nächst kleineren ganzen Zahlen dargestellt.*

Beweis durch die Methode der vollständigen mathematischen Induktion.

Die Behauptung ist richtig für $k = 1, 2, 3$.

Wenn unter der Voraussetzung, daß n oberhalb 1 liegt, k eine bestimmte der Zahlen $1, 2, ..., (n-1)$ bezeichnet und die Behauptung für die Kombinationen k-ter Ordnung als richtig angenommen wird, so ergibt sich daraus auch ihre Richtigkeit für die Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung.

Denn hat man eine Kombination k-ter Ordnung, so gibt es jedesmal $n-k$ Elemente, welche in dieser Kombination noch nicht vorkommen. Fügt man von diesen Elementen je eines am Ende der betrachteten Kombination hinzu, so erhält man $n-k$ Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung. Und wenn man so mit allen Kombinationen k-ter Ordnung verfährt, so erhält man nach und nach alle Kombinationen $(k + 1)$-ter Ordnung, und zwar jede nur einmal. Also ist die Anzahl der Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung $(n-k)$-mal so groß wie die der Kombinationen k-ter Ordnung, d.h. $n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)$.

□

II. Die Anordnung wird nicht berücksichtigt.

Wird auf die Anordnung keine Rücksicht genommen, so fallen von den Kombinationen, die im vorigen Fall zu untersuchen waren, jedesmal alle dijenigen in eine zusammen, welche die gleichen Elemente in verschiedener Anordnung enthalten. Da aber k verschiedene Elemente auf $k!$ verschiedene Arten in eine Reihe nebeneinander gestellt werden können, so ergibt sich der folgende

Satz 3.8. *Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung wird durch den Ausdruck* $\frac{n(n-1)(n-k+1)}{.}..1.2...k$ *gegeben.*

Beispiel 3.9. Die Anzahl aller verschiedenen Zusammenstellungen von je 10 Karten, welche ein Spieler aus einem Spiel von 32 verschiedenen Karten erhalten kann, ist

$$\frac{32.31...24.23}{1.2...9.10} = 64\,512\,240.$$

Unter der Voraussetzung, daß α eine beliebige, k dagegen eine natürliche Zahl bedeutet, setzt man

$$\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{1.2...k} =: \binom{\alpha}{k}$$

(gelesen: α über k) und nennt diesen Ausdruck einen *Binomialkoeffizienten.*

Allgemein bedeutet $\binom{\alpha}{k}$ einen Bruch, dessen Nenner das Produkt der k ersten ganzen positiven Zahlen und dessen Zähler ebenfalls ein Produkt von k Faktoren ist, von denen der erste gleich α und jeder folgende um eine Einheit kleiner als der vorangehende ist.

Hiernach bedeutet das Zeichen $\binom{\alpha}{1}$ **stets** die Zahl α; ferner gilt **als Festsetzung**, daß das Zeichen $\binom{\alpha}{0}$ **stets** die Zahl 1 bedeuten soll, so daß speziell auch $\binom{0}{0} = 1$ zu setzen ist.

Beispiel 3.10. (1) $\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{1.2.3} = -4.$

(2) $\binom{\frac{1}{2}}{4} = \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1.2.3.4} = -\frac{5}{128}.$

(3) Wenn n und k nicht negative ganze Zahlen sind und k nicht größer als n ist, so gilt die folgende *Symmetrieeigenschaft*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Beweis.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{1.2...k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)[(n-k)(n-k-1)...2.1]}{k!\,[(n-k)(n-k-1)...2.1]}$$
$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(k+1)}{(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

□

(4) Es gilt ausnahmslos die folgende *Summeneigenschaft*:

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

Beweis.

Für $k = 0$ geht die Gleichung über in $\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} = \binom{\alpha+1}{1}$, d.h. $1 + \alpha = \alpha + 1$, und ist also richtig.

Ist aber k eine positive ganze Zahl, so ist

$$\binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{1.2...k.(k+1)} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

und folglich

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k}\left(1 + \frac{\alpha-k}{k+1}\right) = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha+1}{k+1}$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{1.2.3...k.(k+1)} = \binom{\alpha+1}{k+1}.$$

□

(5) Es ist ausnahmslos

$$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + ... + \binom{\alpha+n}{n} = \binom{\alpha+n+1}{n}.$$

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $n = 0$.

Nehmen wir nun ihre Richtigkeit für $n = k$ schon als bewiesen an, so daß also $\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + ... + \binom{\alpha+k}{k} = \binom{\alpha+k+1}{k}$ ist, so folgt, daß

$\binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha+1}{1} + ... + \binom{\alpha+k}{k} + \binom{\alpha+k+1}{k+1} = \binom{\alpha+k+1}{k} + \binom{\alpha+k+1}{k+1} = \binom{\alpha+k+2}{k+1}$ ist.

Unsere Behauptung ist also auch für $n = k + 1$ richtig; sie gilt infolgedessen allgemein.

□

Bemerkung 3.11. Das Symbol $\binom{n}{k}$ wurde vom Schweizer Mathematiker *Leonard Euler* eingeführt und trägt auch seinen Namen: *das Eulersche Symbol*.

3.3. **Der binomische Lehrsatz.** Ein *Binom* ist eine zweigliedrige Summe $a+b$.

Der binomische Lehrsatz gibt an, wie n Faktoren eines Binoms in eine Summe entwickelt werden können.

Es gilt:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0 = & & & & & & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 = & & & & & a & + & b & & & & \\
(a+b)^2 = & & & & a^2 & + & 2ab & + & b^2 & & & \\
(a+b)^3 = & & & a^3 & + & 3a^2b & + & 3ab^2 & + & b^3 & & \\
(a+b)^4 = & & a^4 & + & 4a^3b & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3 & + & b^4 & \\
(a+b)^5 = & a^5 & + & 5a^4b & + & 10a^3b^2 & + & 10a^2b^3 & + & 5ab^4 & + & b^5 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

Es ist sofort ersichtlich, daß die Anzahl der Summanden stets um 1 größer ist als der Exponent. Schließlich ist die Summe der Exponenten von a und b in jedem Teilprodukt gleich dem Exponenten des Binoms. Auch die Berechnung der Koeffizienten unterliegt einer Gesetzmäßihkeit.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

Jeder Koeffizient ist aus der Summe der beiden darüberstehenden berechnet. Diese dreieckförmige Anordnung heißt *Pascalsches Zahlendreieck*.

Unter Verwendung der Eulerschen Symbole nimmt das Pascalsche Zahlendreieck folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...
\end{array}$$

Satz 3.12. *(Der binomische Lehrsatz)*

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Beweis mit Hilfe der vollständigen mathematischen Induktion.

Die Gleichung ist richtig für $n = 1, 2, 3$.

Wenn der binomische Lehrsatz für $n = k$ richtig ist,

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + ... + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k,$$

so ist er es für $n = k + 1$ ebenfalls. Wir multiplizieren beiderseits mit $(a + b)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k \\
&+\binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k}{k-2}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \\
&= a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + ... + \binom{k+1}{k}ab^k + b^{k+1} \\
&= (a+b)^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Anwendungen des binomischen Lehrsatzes

(1) Setzt man im binomischen Lehrsatz $a = b = 1$, so erhält man $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Gleichung

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(2) Setzt man im binomischen Lehrsatz $a = 1$ und $b = -1$, so erhält man $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Gleichung

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

(3) Aus (1) und (2) folgt durch Addition $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Gleichung

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = 2^{n-1}.$$

(4) Aus (1) und (2) folgt durch Subtraktion $(\forall n \in \mathbb{N})$ die Gleichung

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... = 2^{n-1}.$$

(5) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt die Gleichung

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + ... + \binom{n}{n}^n = \binom{2n}{n}.$$

Beweis. $(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + ... + \binom{2n}{n}x^n + ... + \binom{2n}{2n}x^{2n}$,

$(1+x)^n(1+x)^n = \{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + ... + \binom{n}{n}x^n\}\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + ... + \binom{n}{n}x^n\}$.

Wir vergleichen die Koeffizienten vor den gleichen Potenzen von x in diesen Gleichungen. Die Koeffizienten vor x^n sind:

$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}\binom{n}{n}$.

□

Vierte Grundaufgabe: Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung.

Man soll die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen ermitteln, und zwar

- mit Berücksichtigung der Anordnung;
- ohne Berücksichtigung der Anordnung.

I. Die Anordnung wird berücksichtigt.

Aus n Elementen $1, 2, ..., n$ lassen sich genau n Kombinationen zur ersten Klasse bilden.

Zur zweiten Klasse lassen sich bei Zulassung von Wiederholungen und bei Berücksichtigung der Anordnung die folgenden n^2 Kombinationen bilden:

$$\begin{array}{ccccc} 11 & 12 & 13 & ... & 1n \\ 21 & 22 & 23 & ... & 2n \\ 31 & 32 & 33 & ... & 3n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n1 & n2 & n3 & ... & nn \end{array}$$

Satz 3.13. *Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen mit Berücksichtigung der Anordnung ist gleich n^k.*

Beweis durch die vollständige mathematische Induktion.

Die Behauptung ist richtig für $n = 1, 2$.

Unter der Annahme, daß die Behauptung für irgendein k schon bewiesen ist, läßt sich zeigen, daß die Anzahl der Kombinationen $(k + 1)$-ter Ordnung gleich n^{k+1} ist. Beachten Sie, daß sich der Induktionsschluß hier auf den Buchstaben k bezieht und daß die Anzahl n der verschiedenen Elemente fest bleibt!

Man erhält in der Tat diese letzteren sämtlich und jede von ihnen nur einmal, wenn man zu jeder der nach Voraussetzung vorhandenen n^k Kombinationen k-ter Ordnung nach und nach ein jedes der gegebenen n Elemente am Ende hinzusetzt. Die Anzahl der Kombinationen $(k + 1)$-ter Ordnung ist somit $n^k.n = n^{k+1}$.

□

II. Die Anordnung wird nicht berücksichtigt.

Man denke sich zwischen den gegebenen Elementen eine bestimmte Anordnung festgesetzt und in jeder Kombination die darin vorkommenden Elemente so nebeneinander gestellt, wie sie in der natürlichen Anordnung aufeinander folgen. Dann gibt es folgende Kombinationen zu zweien mit unbeschränkter Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung:

$$\begin{array}{ccccc} 11 & 12 & 13 & ... & 1n \\ & 22 & 23 & ... & 2n \\ & & 33 & ... & 3n \\ & & & ... & ... \\ & & & ... & nn \end{array}$$

Ihre Anzahl ist $n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 1 = \dfrac{n(n + 1)}{2} = \dbinom{n + 1}{2}$.

Satz 3.14. *Die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung von n verschiedenen, unbeschränkt oft wiederholbaren Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung ist gleich $\dbinom{n + k - 1}{k}$.*

Beweis. Der Satz ist für $n = 1$ und $n = 2$ richtig.

Unter der Annahme, daß die Behauptung für irgendein k schon bewiesen ist, erhält man $\binom{n+k-1}{k}$ Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung, welche mit 1 anfangen, $\binom{n+k-2}{k}$ Kombinationen, welche mit 2 anfangen (und sich aus den $n - 1$ Elementen $2, 3, ..., n$ bilden lassen), $\binom{n+k-3}{k}$

Kombinationen, welche mit 3 anfangen, ..., $\binom{n+k-n}{k} = \binom{k}{k} = 1$ Kombination, welche mit n anfängt.

Die Anzahl aller Kombinationen $(k+1)$-ter Ordnung ist somit

$$\binom{n+k-1}{k} + \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-3}{k} + \ldots + \binom{k}{k} = \binom{n+k}{k+1}.$$

□

Aufgabe 3.15. (1) In Einer Ebene seien n Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch ein und denselben Punkt laufen. Wie groß ist

a) die Anzahl ihrer Schnittpunkte;

b) die Anzahl der geraden Verbindungslinien, welche sich außer den gegebenen Geraden selbst zwischen diesen Schnittpunkten ziehen lassen, wenn niemals zwei dieser Verbindungslinien in eine zusammenfallen? Antwort: *a)* $\binom{n}{2}$; *b)* $3\binom{n}{4}$

(2) In einer Ebene seien n verschiedene Punkte gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.

a) Wie groß ist die Anzahl ihrer geraden Verbindungslinien?

b) Wie groß kann die Anzahl derjenigen Schnittpunkte dieser Verbindungslinien, welche, außer den ursprünglich gegebenen Punkten, selbst noch vorhanden sind, höchstens sein? Antwort: *a)* $\binom{n}{2}$; *b)* $3\binom{n}{4}$

(3) Wieviel Steine würde ein Dominospiel enthalten, wenn die Nummern nicht wie gewöhnlich von 0 bis 6, sondern von 0 bis n gingen? Antwort: $\binom{n+2}{2}$

(4) In einer Ebene seien n Punkte gegeben. Es sei $n \geq 4$ und es werde vorausgesetzt, daß keine 3 dieser Punkte auf ein und derselben Geraden und keine 4 auf ein und demselben Kreise liegen. Dann bestimmen je 3 Punkte einen Kreis. Wieviel verschiedene Kreise werden so erhalten? Antwort: $\binom{n}{3}$

4. Arithmetik im Bereich der reellen Zahlen

In seiner Tätigkeit muß der Mensch häufig mit Zahlen umgehen. Dabei muß er ihre Struktur und die ihnen innewohnenden Gesetzmäßigkeiten kennen.

Der folgende Abschnitt stellt die Grundregeln und Rechengesetze für rationale Zahlen zusammen, ohne deren Kenntnis keine mathematische Anwendung möglich ist. Es handelt sich dabei um elementares mathematisches Grundwissen, das in der Mittelstufe einer jeden allgemeinbildenden Schulform behandelt wird.

4.1. **Grundregeln (Axiome) und elementare Rechenregeln.** Das Rechnen im Bereich der rationalen (bzw. der reellen) Zahlen stützt sich auf ein **vollständiges** und in sich **widerspruchsfreies** System elementarer **Grundregeln** (*Axiome* genannt), deren Gültigkeit nicht bewiesen wird, sondern als **unmittelbar einleuchtend** unterstellt wird.

Bemerkung 4.1. Um Axiome "beweisen" zu können, müßte man noch einfachere Grundgesetze kennen, deren "Beweis" noch einfachere Grundregeln fordert usw.

Die im folgenden vorgestellten sechs Gruppen von Grundgesetzen gehören bereits der elementarsten Kategorie an.

Es sei $\mathbb{M} = \{a, b, c, ...\}$ eine unendliche Menge, dessen Elemente *Zahlen* genannt werden.

I. *Grundgesetze der Gleichheit und der Anordnung*

(1) Die Zahlen bilden eine **geordnete Menge**, d.h. zwischen je zweien von ihnen, etwa $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$, besteht stets **eine und nur eine** der drei Beziehungen

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b.$$

Diese Anordnung gehorcht den folgenden Gesetzen:

(2) Es ist stets $a = a \quad \forall\, a \in \mathbb{M}$ (reflexive Beziehung);

(3) Aus $a = b$ folgt $b = a \quad \forall\, a, b \in \mathbb{M}$ (symmetrische Beziehung);

(4) Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{M}$ (transitive Beziehung);

(5) Aus $a \leq b$ und $b < c$ oder aus $a < b$ und $b \leq c$ folgt $a < c \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{M}$.

Man schreibt $a \neq b$ (gelesen: a ungleich b), wenn a nicht gleich b ist; $a \geq b$ (gelesen: a größer oder gleich b, mindestens gleich b, nicht kleiner als b), wenn a nicht kleiner als b ist; $a \leq b$ (gelesen: a kleiner oder gleich b, höchstens gleich b, nicht größer als b), wenn a nicht größer als b ist. Jede dieser Angaben schließt also genau eine der drei Anordnungsbeziehungen aus und läßt es unentschieden, welche der beiden anderen gültig ist.

Zusatz 4.2. *Aus $a = b$ zusammen mit $a = a'$ und $b = b'$ folgt $a' = b'$.*

Beweis. $a = a' \Rightarrow a' = a$ (Axiom I.3); $\quad a' = a \wedge a = b \Rightarrow a' = b$ (Axiom I.4); $a' = b \wedge b = b' \Rightarrow a' = b'$ (Axiom I.4).

□

Die Beziehung des Kleiner-Seins ist **transitiv**. Sie ist aber offenbar weder reflexiv noch symmetrisch.

In der Menge $\mathbb{M}$ führen wir nun die Operationen *Summe* und *Produkt* zweier Elemente ein.

II. *Grundgesetze der Addition*

(1) Zu je zwei Zahlen $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$ gibt es stets **genau** eine dritte Zahl $c \in \mathbb{M}$, die die *Summe* von a und b genannt und mit $a + b$ bezeichnet wird (Existenz der Summe).
Die *Addition* gehorcht den folgenden Gesetzen:

(2) dem Gesetz der Eindeutigkeit der Addition:
Aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt stets $a + b = a' + b'$.

(3) dem Kommutativgesetz der Addition:
Es ist stets $a + b = b + a$.

(4) dem Assoziativgesetz der Addition:
Es ist stets $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(5) dem Monotoniegesetz der Addition:
Aus $a < b$ folgt stets $a + c < b + c$.

III. *Grundgesetz der Subtraktion*

(1) Zu je zwei Zahlen $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$ gibt es stets eine dritte Zahl $c \in \mathbb{M}$, für die $a + c = b$ ist (Existenz der Differenz).

Satz 4.3. *Aus* $a + c = a + c'$ *folgt rückwärts* $c = c'$.

Beweis. Aus $c < c'$ folgt $a + c < a + c'$, d.h. $a + c \neq a + c'$.
Aus $c' < c$ folgt, daß $a + c' < a + c$ ist, d.h. $a + c' \neq a + c$.
Für eine von c verschiedene Zahl c' kann also die Summe $a + c'$ nicht denselben Wert haben wie $a + c$.

□

Man nennt c die *Differenz* von b und a ($c := b - a$).

Satz 4.4. (*Die Existenz der Zahl Null*) *Es gibt in* $\mathbb{M}$ *eine ganz bestimmte Zahl, die, bei der Addition als Summand verwendet, keine Änderung hervorruft:*

$$a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{M}.$$

Diese Zahl wird darum auch die bezüglich der Addition neutrale Zahl genannt und mit 0 *bezeichnet.*

Beweis. Es sei $a \neq a'$. Es gibt eine (eindeutig bestimmte) Zahl x, für die $a + x = a$ ist und eine (eindeutig bestimmte) Zahl x', für die $a' + x' = a'$ ist. Es folgt nach dem Assoziations- und dem Kommutationsgesetz, daß

$$a + a' = (a + x) + a' = a + (x + a') = a + (a' + x) = (a + a') + x$$

und

$$a + a' = a + (a' + x') = (a + a') + x'$$

ist. Nun folgt aus $(a + a') + x = (a + a') + x'$, daß $x = x'$ ist.

□

Nun endlich kann man die Zahlen in *positive* und *negative* teilen:
Eine Zahl heißt *positiv*, wenn sie größer als Null ist, und *negativ*, wenn sie kleiner als Null ist.

Für $0 - a$ schreibt man kürzer $-a$ und nennt diese Zahl die zu a *entgegengesetzte* Zahl.

Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{M}$ gibt es **genau** eine **Gegenzahl** nämlich $-a \in \mathbb{M}$, so daß

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Satz 4.5. *Ist* $a > 0$, *so ist* $-a < 0$; *ist* $a < 0$, *so ist* $-a > 0$.

Beweis. Da nach der Definition von $-a$ nämlich $a + (-a) = 0$ ist, so kann $-a$, wenn $a > 0$ ist, weder $= 0$ noch > 0 sein. Es muß also $-a < 0$ sein:

$$a > 0 \Rightarrow a + (-a) > 0 + (-a) \Rightarrow 0 > (-a).$$

Ganz entsprechend schließt man, daß $a < 0 \Rightarrow -a > 0$.

□

IV. *Grundgesetze der Multiplikation*

(1) Zu je zwei Zahlen $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$ gibt es etets eine dritte Zahl $c \in \mathbb{M}$, die das *Produkt* von a und b genannt wird (Existenz des Produktes).

Die *Multiplikation* gehorcht den folgenden Gesetzen:

(2) dem Eindeutigkeitsgesetz der Multiplikation:
Aus $a = a'$ und $b = b'$ folgt stets $ab = a'b'$.

(3) dem Kommutativgesetz der Multiplikation:
Es ist stets $ab = ba$.

(4) dem Assoziativgesetz der Multiplikation:
Es ist stets $(ab)c = a(bc)$.

(5) dem Distributivgesetz:
Es ist stets $(a + b)c = ac + bc$.

(6) dem Monotoniegesetz der Multiplikation:
Aus $a < b$ folgt, wenn c positiv ist, stets $ac < bc$.

Satz 4.6. *Für jede Zahl $a \in \mathbb{M}$ gilt $a.0 = 0.a = 0$.*

Beweis. Da $b + 0 = b$ ist, gilt
$a(b + 0) = ab \;\Rightarrow\; ab + a.0 = ab \;\Rightarrow\; a.0 = 0.$

□

Satz 4.7. *Das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv, dasjenige einer positiven und einer negativen Zahl ist negativ, und dasjenige zweier negativer Zahlen ist positiv.*

Beweis. Ist $b > 0 \wedge c > 0$, so ist $bc > 0.c = 0$.
Ist $a < 0 \wedge c > 0$, so ist $ac < 0.c = 0$.
Ist $a < 0 \wedge b < 0$, so folgt zunächst, daß $[a + (-a)].b = 0.b = 0$, also $ab + (-a)b = 0$ oder $ab = -(-a)b$ ist.
Da $a < 0$ ist, so ist $-a > 0$ und $(-a)b < 0$. Es folgt, daß $-(-a)b > 0$ und $ab > 0$ ist.

□

Satz 4.8. *Ein Produkt zweier Zahlen ist dann und nur dann gleich 0, wenn wenigstens einer der beiden Faktoren gleich 0 ist.*

Der Beweis folgt aus den Sätzen 4.6 und 4.7.

V. *Grundgesetz der Division*

(1) Zu je zwei Zahlen $a \in \mathbb{M}$ und $b \in \mathbb{M}$, deren erste nicht gleich 0 ist, gibt es stets eine dritte Zahl $c \in \mathbb{M}$, für die $ac = b$ ist (Existenz des Quotienten).

Satz 4.9. *Aus $ac = ac'$ folgt rückwärts, falls nur $a \neq 0$ ist, daß auch $c = c'$ ist.*

Beweis. Wäre $c \neq c'$, so wäre die durch $c' = c + c''$ eindeutig bestimmte Zahl $c'' \neq 0$, und es wäre daher $ac' = a(c + c'') = ac + ac''$, also $ac' \neq ac$, da ja $ac'' \neq 0$ ist (Satz 4.8).

□

Es ist also auch die Division stets und mit eindeutigem Ergebnis ausführbar, falls nur der Nenner nicht gleich Null ist.
Die Division durch Null bleibt, wie man sagt, eine **sinnlose** oder **nicht definierte** Operation.
Sie ist unter allen Umständen auszuschließen!
Man nennt c den*Quotienten* von b und a und bezeichnet ihn mit $\frac{b}{a}$ oder $b : a$.

Satz 4.10. (*Die Existenz der Eins*) *Es gibt eine ganz bestimmte Zahl, die, bei der Multiplikation als Faktor verwendet, keine Änderung hervorruft:*

$$1.a = a.1 = a \ \forall a \in \mathbb{M}.$$

Diese Zahl wird darum die bezüglich der Muktiplikation neutrale Zahl genannt und mit 1 *bezeichnet.*

Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{M} \setminus \{0\}$ gibt es **genau** eine **reziproke** Zahl nämlich $\frac{1}{a} \in \mathbb{M}$, so daß

$$a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.\,a = 1.$$

Jede Zahl der Art $1 + 1 + 1 + ... + 1$ wird eine *natürliche* Zahl genannt.

Die Differenz zweier natürlichen Zahlen ist eine *ganze* Zahl.

Jede *rationale* Zahl kann als Quotient zweier ganzen Zahlen, dessen Nenner $\neq 0$ ist, dargestellt werden.

VI. *Die Grundgesetze der ganzen Zahlen*

(1) *Archimedisches Grundgesetz*:
Sind a und b zwei positive Zahlen, so ist stets $a + a + ... + a > b$, wenn die Summe linkerhand eine geeignete Anzahl von Summanden enthält.

(2) Hat eine Menge von ganzen Zahlen die Eigenschaft, daß alle ihre Elemente größer als eine Zahl sind, so enthält sie eine kleinste Zahl.

(3) Hat eine Menge von ganzen Zahlen die Eigenschaft, daß alle ihre Elemente kleiner als eine Zahl sind, so enthält sie eine größte Zahl.

Durch die Zusammenstellung dieser Grundgesetze pflegt man auch den Zahlenbegriff selbst als definiert anzusehen:

Gehorchen die Elemente einer Menge $\mathbb{M}$ den vorstehenden Grundgesetzen I bis VI, so nennt man sie *Zahlen*, die Menge $\mathbb{M}$ selbst ein *Zahlensystem*.

4.2. **Graphische Darstellung. Absoluter Betrag.** Rationale Zahlen können in die Punktmenge einer Geraden abgebildet werden.

Da ein Punkt auf einer Geraden in **zwei entgegengesetzten** Laufrichtungen fortschreiten kann, so empfielt es sich zunächst, diese beiden Richtungen dadurch voneinander zu unterscheiden, daß man die eine als **positive** und die andere als **negative** Richtung bezeichnet. Dabei ist es meißt gleichgültig, welche der beiden Richtungen man als positive Richtung wählt.

Man wählt auf der zu orientierenden Geraden g zwei verschiedene Punkte O und E und vereinbart, daß die Richtung von O nach E als die positive angesehen werden soll. Wählt man nun die Strecke (OE) als **Längeneinheit** und trägt diese von O aus nach beiden Seiten wiederholt ab, so erhält man eine Schar von Punkten, die wir als die Bilder der ganzen Zahlen ansehen wollen, und zwar O als Bild der Zahl Null, E als Bild von 1, die weiteren ("nach rechts") folgenden Punkte als Bilder der natürlichen Zahlen $2, 3, 4, 5, ...$ und die "nach links" folgenden Punkte als Bilder der Zahlen $-1, -2, -3, -4, -5, ...$ Den Punkt O nennt man den **Nullpunkt** und den Punkt E den **Einheitspunkt**.

Es sei nun $r = \frac{a}{b}$ eine beliebige rationale Zahl, wobei a eine ganze und b eine natürliche Zahl ist. Teilen wir dann die Strecke zwischen dem Nullpunkt und dem Punkte a elementargeometrisch in b gleiche Teile, so sehen wir den (vom Nullpunkt aus) ersten der Teilpunkte als Bild der Zahl r an. Durch diese Festsetzung wird jeder rationalen Zahl genau ein Punkt der Geraden g zugeordnet.

Die Bildpunkte der rationalen Zahlen bezeichnen wir als die **rationalen Punkte** der Geraden.

Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen, rationalen Zahlen gibt es stets eine dritte rationale Zahl, die zwischen denen liegt (z.B. das arithmetische Mittel dieser Zahlen). Dieser Vorgang, beliebig fortgesetzt, führt zu der Schlußfolgerung, daß zwischen zwei voneinander verschiedenen rationalen Zahlen unendlich viele weitere Zahlen liegen.

Der Bereich der rationalen Zahlen bildet eine **dichte Menge**; die rationalen Punkte sind **überall dicht** auf der Zahlengerade gelegen.

Ausdrücklich sei hervorgehoben, daß **keineswegs** umgekehrt jeder Punkt der Zahlengerade Bild einer gewissen rationalen Zahl ist! Man stellte bereits vor mehr als 2000 Jahren mit Erstaunen fest, daß es neben den rationalen Zahlen beliebig viele weitere Zahlen gibt, die nicht als Bruch darstellbar, also *irrational* sind, z.B. die Zahl $\sqrt{2}$. Der Bereich der rationalen Zahlen hat also noch **Lücken**.

Um einen "lückenlosen" Zahlenbereich zu erhalten, wird eine Erweiterung vorgenommen. Man erhält dann den Bereich der **reellen Zahlen**. Dieser Bereich bildet eine **stetige Menge**.

Sind irgend zwei **rationale** Zahlen gegeben, so sind insbesondere die vier elementare Grundoperationen der **Arithmetik** Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division mit ihnen immer ausführbar, und das Ergebnis der Rechnung ist **immer** eine rationale Zahl. In dieser Beziehung bildet die Menge der rationalen Zahlen ein **abgeschlossenes Ganzes**, einen *Rationalitätsbereich*.

Eine Menge, die den Axiomen $I - VI$ genügt, heißt *Körper*. Sowohl die rationalen Zahlen als auch die reellen Zahlen bilden bzgl. der Operationen " + " und " . " einen Körper.

Die Aufgabe des Wurzelausziehens (und viele andere Aufgaben) ist im Körper der rationalen Zahlen im allgemeinen nicht lösbar. Geometrisch zeigt sich diese Unvollkommenheit darin, daß , wenn man eine bestimmte Strecke als Maßeinheit wählt und mit ihr eine zweite Strecke messen will, im Körper der rationalen Zahlen keine Zahl zu existieren braucht, durch die diese Länge angegeben werden kann - etwa die Seite und die Diagonale eines Quadrates.

Das System der *reellen* Zahlen ist eine wohlbestimmte Menge, zu deren Elementen insbesondere die rationalen Zahlen gehören und mit deren Elementen nach genau denselben Regeln gerechnet werden darf wie mit diesen der rationalen Zahlen.

Sind a und b zwei beliebige reelle Zahlen und ist $a < b$, so bezeichnet man natürlich die Gesamtheit aller reellen Zahlen x, die der Bedingung $a \leq x \leq b$ genügen, als das *Intervall* $[a, b]$. Die Intervalle lassen sich als lückenlose Teilstrecken der Zahlengeraden (mit oder ohne Endpunkte) darstellen.

Oft benutzt man offene Intervalle, die symmetrisch um eine Stelle x_0 liegen, also links und rechts von der Stelle x_0 ein gleiches Stück der Zahlengeraden miteinschließen. Man nennt ein solches Intervall eine *ε-Umgebung* von x_0 und schreibt dafür $U_\varepsilon(x_0)$. Es gilt also

$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Eine ε-Umgebung hat die Länge 2ε.

Durch eine reelle Zahl a wird die Zahlengerade in zwei *Halbgeraden* (Strahlen) geteilt:

$\{x : \ x \geq a\}_{\mathbb{R}} = [a, \infty); \quad \{x : \ x \leq a\}_{\mathbb{R}} = (-\infty, a]$.

Bemerkung 4.11. Das System der reellen Zahlen kann auf **keine** Weise durch Hinzufügung neuer Elemente so erweitert werden, daß auch für die Elemente des erweiterten Systems die sämtlichen Grundgesetze der Arithmetik gültig bleiben.

Will man doch vom System der reellen Zahlen zu noch umfassenderen und darum vielleicht noch leistungsfähigeren Systemen aufsteigen, so kann dies **nur** durch den Verzicht auf die Gültigkeit einiger der Grundgesetze erkauft werden.

Ein solches erweitertes Zahlensystem ist das System der *complexen* Zahlen.

Der (absolute) Betrag einer reellen Zahl

Erklärung 4.12. Der (absolute) Betrag $|a|$ einer reellen Zahl a ist diejenige nichtnegative reelle Zahl, für die gilt

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn} \quad a > 0; \\ 0, & \text{wenn} \quad a = 0; \\ -a, & \text{wenn} \quad a < 0. \end{cases}$$

Satz 4.13. *Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt stets*

$$\begin{array}{llll} (a) & |a| \geq 0; & (b) & \pm a \leq |a|; \\ (c) & |a| = |-a|; & (d) & |ab| = |a||b|; \\ (e) & \left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|}, \ a \neq 0; & (f) & \left|\dfrac{b}{a}\right| = \dfrac{|b|}{|a|}, \ a \neq 0. \end{array}$$

Unter dem absoluten **Abstand** zweier Zahlen a, b versteht man den Betrag ihrer Differenz $|a - b|$ bzw. $|b - a|$. Insbesondere ist $|a - b| = |b - a|$.

$|a|$ ist also der Abstand von a bzw. $-a$ zum Nullpunkt.

Geometrisch ist $|a - b|$ die positiv gerechnete Länge des Intervalles zwischen a und b auf der Zahlengeraden (oder die absolute Abweichung voneinander).

Satz 4.14. *Für je zwei Zahlen a und b gelten die Dreiecksungleichungen*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Aufgabe 4.15. (1) Es seien $a_1, a_2, ..., a_n$ reelle Zahlen. Es gilt stets

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|.$$

(2) Für $n = 0, 1, 2, ...$ ist stets $2^n > n$.

(3) Für die natürlichen Zahlen $n \geq 5$ ist $2^n > n^2$.

(4) Für nichtnegative Zahlen a und b und jedes natürliche n ist $a^n + b^n \leq (a + b)^n$.

(5) Wenn $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ ist und die Nenner b und d positiv sind, so ist $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

(6) Es sei $n \geq 2$ und die Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ seien sämtlich positiv, dann ist
$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) > 1 + (a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

(7) Es sei $n \geq 2$ und die Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n$ seien sämtlich positiv, aber < 1, dann ist
$(1 - a_1)(1 - a_2)...(1 - a_n) > 1 - (a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

(8) Ist $0 < a < 1$ und n eine beliebige natürliche Zahl, so ist stets
$1 + a + a^2 + ... + a^n < \dfrac{1}{1 - a}$.

Ist $n \geq 2$ und $a > 0$ oder $0 > a > -1$, so ist
$(1 + a)^n > 1 + na$ (Bernoullische Ungleichung).

(9)

(10) Für $n = 2, 3, ...$ ist stets
$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist gleichbedeutend mit jeder der folgenden Aussagen:

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} < \frac{(n+1)^n}{n^n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n}\frac{n^n}{(n-1)^n} < \frac{(n+1)^n}{n^n} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{n-1}{n} < \frac{(n^2-1)^n}{(n^2)^n} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

Daß diese letzte Ungleichung richtig ist, folgt aus der Bernoullischen Ungleichung für $a = -\frac{1}{n^2}$.

Weiter ist nun für $n = 2, 3, ...$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + ... + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$

Da aber für $2 \le k \le n$

$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!\,n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \le \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}$

gilt, so ist für $n \ge 2$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$

□

(11) Für $n = 2, 3, ...$ ist stets
$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Beweis. $\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}.$

□

5. Die Zahlenfolgen

5.1. Grundbegriffe.

Erklärung 5.1. Wenn sich auf Grund irgendeiner wohlbestimmter Vorschrift nacheinander eine erste Zahl x_1, eine zweite Zahl x_2, eine dritte Zahl x_3, ... bilden läßt, so sagt man, daß diese Zahlen $x_1, x_2, x_3, ...$ in dieser den natürlichen Zahlen entsprechenden Anordnung eine *Zahlenfolge* bilden.

Bricht die Bildung dieser Zahlen nach einer bestimmten Anzahl von Schritten ab, so spricht man von einer *endlichen Zahlenfolge*; wenn jeder natürlichen Zahl n eine wohlbestimmte Zahl x_n entspricht, redet man von einer *unendlichen Zahlenfolge*.

Man spricht von der Folge $\{x_n\}$ mit den *Gliedern* x_n.

Die einfachste und häufigste Rechenvorschrift ist diese, wenn eine fertige Formel gegeben ist, in der außer bekannten Zahlen nur der Buchstabe n auftritt (man bezeichnet n als den laufenden Buchstaben) und die die Glieder der Folge liefert, wenn man für n nacheinander die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, ...$ einsetzt.

Beispiel 5.2.

$$
\begin{array}{lll}
1) & x_n = \dfrac{1}{n}\ : & 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}, ...; \\
2) & x_n = 2^n\ : & 2, 4, 8, ...2^n, ...; \\
3) & x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\ : & 1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, ...; \\
4) & x_n = \dfrac{n+1}{n}\ : & 2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, ...; \\
5) & x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\ : & 2, \dfrac{9}{4}, \dfrac{64}{27}, \dfrac{625}{256}, ...
\end{array}
$$

In diesen Fällen kann jedes geforderte Glied der Folge sofort angegeben werden.

Nicht so, wenn die Bildungsvorschrift so gefaßt ist, daß ein bestimmtes Glied der Folge erst dann berechnet werden kann, wenn die vorangehenden Glieder schon sämtlich oder teilweise bekannt sind.

Ein Beispiel für die *rekursive Bildungsweise* bietet die Vorschrift:

(1) $x_1 = 1,\ x_2 = 1, ...,\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n \geq 3.$

Die Folge ist: $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$

(2) $x_1 = 0,\ x_2 = 1, ...,\ x_n = \frac{1}{2}\,(x_{n-1} + x_{n-2}),\ n \geq 3.$

Die Folge ist: $0, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{11}{16}, ...$

Erklärung 5.3. - Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *beschränkt* genannt werden, wenn es eine positive Zahl K gibt, so daß stets $|\,x_n| \leq K$ oder $-K \leq x_n \leq K$ gilt. K heißt dann eine *Schranke* für die Glieder der Folge.

- Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *nach links* oder *nach unten* beschränkt heißen, wenn sich eine Zahl K_1 angeben läßt, so daß stets $x_n \geq K_1$ ist. K_1 heißt dann eine *linke Schranke* für die Glieder der Folge.
- Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *nach rechts* oder *nach oben* beschränkt heißen, wenn es eine Zahl K_2 gibt, so daß stets $x_n \leq K_2$ ist. K_2 heißt dann eine *rechte Schranke* für die Glieder der Folge.

Erklärung 5.4. - Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *monoton wachsend* oder *zunehmend* heißen, wenn stets $x_n \leq x_{n+1}$ ist, dagegen *monoton fallend* oder *abnehmend*, wenn stets $x_n \geq x_{n+1}$ ist. Beide Arten werden auch kurz als monotone Folgen bezeichnet.

- Eine Zahlenfolge heißt *konstant* oder *identisch konstant*, wenn alle ihre Glieder ein und denselben Wert haben. Ist dieser gleich c, so sagt man auch, die Folge sei identisch gleich c.

Veranschaulicht man die Glieder einer Zahlenfolge $\{x_n\}$ als Punkte auf der Zahlengeraden, so sagt man von den Bildern der Elemente x_n, daß sie eine *Punktfolge* bilden. Dabei kann es eintreten, daß ein und derselbe Punkt Bild mehrerer Glieder der Folge ist, nämlich immer dann, wenn verschiedene Glieder der Folge denselben Wert haben.

Die Beschränktheit einer Folge drückt sich dann dadurch aus, daß alle Punkte x_n zwischen den Punkten $-K$ und K liegen; das monotone Anwachsen dadurch, daß ein Punkt x_n niemals links von einem solchen mit kleinerer Nummer liegt.

Erklärung 5.5. Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ soll *arithmetisch* genannt werden, wenn man durch Subtraktion eines vorangehenden Gliedes von dem nächstfolgenden stets die gleiche, aber von 0 verschiedene Differenz erhält, wenn also die Folge mit den Gliedern $\{x_{n+1} - x_n\}$ identisch konstant, aber nicht gleich Null ist.

Eine arithmetische Folge $\{x_n\}$ ist hierhach durch das Anfangsglied x_0 und die konstante Differenz $d = x_{n+1} - x_n$ vollständig bestimmt: $x_0, x_0 + d, x_0 + 2d, ..., x_0 + nd, ...$.

Es ist also stets $x_n = x_0 + nd,\ n = 0, 1, 2, ...$.

Die Summe der ersten $n + 1$ Glieder der arithmetischen Folge ist gleich

$$x_0 + x_1 + ... + x_n = \frac{n+1}{2}(x_0 + x_n) = \frac{n+1}{2}(2x_0 + nd).$$

Erklärung 5.6. Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$, deren Glieder sämtlich von Null verschieden sind, soll *geometrisch* genannt werden, wenn man durch Division eines späteren Gliedes durch das nächstvorangehende immer den gleichen Quotienten erhält, wenn also die Folge mit den Gliedern $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ identisch konstant ist.

Eine geometrische Folge $\{x_n\}$ ist hiernach ebenfalls durch das Anfangsglied x_0 und den konstanten Quotienten $q = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ vollständig bestimmt: $x_0, x_0q, x_0q^2, ..., x_0q^n, ...$.

Es ist also stets $x_n = x_0q^n,\ n = 0, 1, 2, 3, ...$.

Die Summe der ersten $n + 1$ Glieder der geometrischen Folge ist gleich $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,x_0$, wenn $q \neq 1$ ist, und gleich $(n + 1)x_0$, wenn $q = 1$ ist.

5.2. **Nullfolgen.** Es stellen sich als wichtig solche Eigenschaften der Zahlenfolgen heraus, die wesentlich durch die Glieder mit hohen Stellenzahlen - die **fernen** oder **weit rechts gelegenen** Glieder - bedingt werden und die also nur bei unendlichen Zahlenfolgen auftreten können.

So ist z.B. die Eigenschaft einer Folge beschränkt zu sein ganz unabhängig davon, welche Werte etwa die ersten 1000 oder 10 000 Glieder haben.

Solche Eigenschaften bezeichnet man als *infinitäre Eigenschaften* einer Zahlenfolge.

Die Wichtigste infinitäre Eigenschaft einer Folge ist diejenige, eine Nullfolge zu sein.

Beispiel 5.7. (1) Die Zahlenfolge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ ist monoton fallend. Die Glieder erreichen jeden nur irgend denkbaren Grad von Kleinigkeit, wenn n groß genug genommen wird. Sie werden beliebig klein.

Man wähle irgendeine Zahl, die man für sehr klein hält, etwa $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{1000}$, oder 10^{-10}, oder 10^{-100}, und frage, ob es möglich ist, ein Glied der Folge anzugeben, das noch kleiner ist als die gewählte Zahl und dessen nachfolgende Glieder auch sämtlich kleiner sind als diese Zahl.

Wählt man etwa 10^{-10}, so ist das Glied mit der Nummer $n = 10^{11}$ schon kleiner als diese Zahl, und ebenso sind es alle nachfolgenden Glieder.

Haben die Glieder einer Folge diese Eigenschaft, so nennt man die Folge eine *Nullfolge.*

(2) Bei der Folge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ haben die Beträge der Glieder dieselbe Eigenschaft. Auch diese Folge nennt man eine *Nullfolge*.

(3) Die Folge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ oder die Folge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}\right\}$ hat gleichfalls die beschriebene Eigenschaft. Denn da $2^n \geq n+1$, also $\dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n+1}$ ist, und da die Folge $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ eine Nullfolge ist, so ist die betrachtete Folge auch so eine.

Erklärung 5.8. Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ heißt eine *Nullfolge*, wenn nach Wahl einer jeden beliebig kleinen positiven Zahl ε sich immer eine Nummer n_0 so angeben läßt, daß $|x_n| < \varepsilon$ ist für alle $n \geq n_0$.

Bemerkung 5.9. Wie klein man auch $\varepsilon > 0$ wählt, es läßt sich doch stets n_0 so angeben, daß alle Punkte x_n mit $n \geq n_0$ zwischen den Punkten $-\varepsilon$ und ε liegen.

Da der absolute Betrag einer Zahl x den Abstand des Punktes x vom Nullpunkt der Zahlengeraden angibt, so kann die Erklärung der Nullfolge auch so gefaßt werden:

Eine Folge $\{x_n\}$ ist eine Nullfolge, falls bei gegebenem $\varepsilon > 0$ sich eine Nummer n_0 so angeben läßt, daß für $n \geq n_0$ die Abstände der Punkte x_n vom Nullpunkt immer kleiner ε sind (oder daß für $n \geq n_0$ die Punkte x_n sämtlich in der ε-Umgebung des Nullpunktes liegen).

5.3. **Die Intervallschachtelung.**

Erklärung 5.10. Zwei Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ bilden eine *Intervallschachtelung* (in Zeichen (a_n/b_n)) genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist monoton wachsend.
(ii) Die Zahlenfolge $\{b_n\}$ ist monoton fallend.
(iii) Für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \leq b_n$.
(iv) Die Zahlenfolge $\{b_n - a_n\}$ ist eine Nullfolge.

Von den Intervallen I_n, die sich auf der Zahlengeraden vom Punkte a_n bis zum Punkte b_n erstrecken ($n = 0, 1, 2, \ldots$), gehört jedes folgende dem vorangehenden an, und ihre Längen $l_n = b_n - a_n$ bilden eine Nullfolge.

Die geometrische Anschauung scheint gebieterisch zu verlangen, daß bei gegebener Intervallschachtelung stets ein Punkt müsse aufgezeigt werden können, der allen Intervallen angehört.

Cantor - Dedekindsches Axiom. Ist auf einer Geraden eine Intervallschachtelung gegeben, so gibt es stets einen Punkt, der allen Intervallen der Schachtelung angehört.

Man sagt, daß dieser Punkt von der Schachtelung erfaßt wird.

Satz 5.11. *Ist (a_n/b_n) eine Intervallschachtelung, so gibt es genau eine reelle Zahl ξ mit der Eigenschaft $a_n \leq \xi \leq b_n$ für alle natürlichen Zahlen n.*

Beweis. Gäbe es neben ξ noch eine davon verschiedene Zahl ξ', für die ebenfalls bei jedem $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq \xi' \leq b_n$ ist, so setze man $|\xi' - \xi| = \varepsilon$. Es wäre dann $\varepsilon > 0$, aber aus

$a_n \leq \xi' \leq b_n$ und $-b_n \leq -\xi \leq -a_n$ folge, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ $a_n - b_n \leq \xi' - \xi \leq b_n - a_n$, d.h. $-l_n \leq \xi' - \xi \leq l_n$, oder $\varepsilon = |\xi' - \xi| \leq l_n$ wäre - entgegen der Voraussetzung, daß $\{l_n\}$ eine Nullfolge sein sollte. $\square$

Es ist demnach ξ, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

Gibt es keine rationale Zahl, die allen Intervallen einer gegebenen Schachtelung (a_n/b_n) angehört, so sagt man, diese Schachtelung definiere oder erfasse eine *irrationale Zahl*. Als ihr Bild sieht man denjenigen Punkt P an, der auf der Zahlengeraden nach dem Cantor - Dedekindschen Axiom durch die Schachtelung (a_n/b_n) erfasst wird.

Zusammengefaßt: In der Angabe der Intervallschachtelung soll die Angabe oder Festlegung der durch sie erfassten (rationalen oder irrationalen) Zahl gesehen werden.

Eine Irrationale Zahl kann man tatsächlich ziffernmäßig überhaupt nicht vollständig angeben!

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen *das System der reellen Zahlen.*

Aufgabe 5.12. Beweisen Sie, daß $\left(\dfrac{n-1}{2n} / \dfrac{n+1}{2n}\right)$ eine Intervallschachtelung ist. Welche reelle Zahl wird durch diese Intervallschachtelung erfaßt?

5.4. **Beispiele von Nullfolgen.** Es sollen die nachstehenden Zahlenfolgen $\{x_n\}$ daraufhin untersucht werden, ob sie Nullfolgen sind oder nicht.

(1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}$.

Lösung. Für jedes $n = 0, 1, 2, ...$ ist $|\,x_n| = \frac{1}{(n+1)^n} \leq \frac{1}{n+1}$. Wählt man $\varepsilon > 0$, so ist sicher $|\,x_n| < \varepsilon$ sobald $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ ist. Das letztere bedeutet, daß $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Es genügt, für n_0 eine natürliche Zahl zu nehmen, die $\geq \frac{1}{\varepsilon}$ ist, um zu erreichen, daß $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfällt für jedes $n \geq n_0$. $\{x_n\}$ is eine Nullfolge.

(2) $x_n = \dfrac{5n^2 + 3n + 4}{n^3 + 1}$.

Lösung. Es ist für jedes $n = 0, 1, 2, ...$ $|\,x_n| = \frac{5n^2+3n+4}{n^3+1}$. Für $n \geq 4$ gilt

$|\,x_n| < \frac{5n^2+n.n+n}{n^3+1} < \frac{7n^2}{n_3+1} < \frac{7n^2}{n^3} = \frac{7}{n}$. Wählt man nun wieder ganz beliebig ein $\varepsilon > 0$, so ist $|\,x_n| < \varepsilon$, falls $n \geq 4$ und weiterhin n so groß genommen wird, daß $\frac{7}{n} < \varepsilon$, d.h. $n > \frac{7}{\varepsilon}$ ist. Nimmt man also für n_0 irgendeine natürliche Zahl, die ≥ 4 und $> \frac{7}{\varepsilon}$ ist, so ist man sicher, daß $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfällt für jedes $n \geq n_0$. $\{x_n\}$ ist eine Nullfolge.

(3) $x_n = a^n$.

Lösung. Hier ist $|\,x_n| = |\,a|^n$.

Ist $|\,a| \geq 1$, so sind alle Glieder der Folge ≥ 1. Diese ist dann sicher keine Nullfolge, denn wählt man etwa $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so ist der Betrag keines Gliedes der Folge $< \varepsilon$.

Ist $a = 0$, so ist die Folge identisch gleich Null und also sicher eine Nullfolge. Dann ist der Betrag jedes Gliedes $< \varepsilon$, wie auch $\varepsilon > 0$ gewählt wird.

Ist $0 < |\,a| < 1$, so ist die Entscheidung nicht ganz so einfach. In diesem Fall ist $\frac{1}{|\,a|} > 1$, so daß , wenn $\frac{1}{|\,a|} = 1 + p$ gesetzt wird, $p > 0$ ist. Daher ist

$$|\,x_n| = \frac{1}{(1+p)^n} = \frac{1}{1+np+\binom{n}{2}p^2+...+p^n} < \frac{1}{np},$$

wenigstens für jedes $n \geq 1$. Es wird also $|\,x_n|$ kleiner als ein irgendwie gewähltes, positives ε ausfallen, sobald nur $\frac{1}{np} < \varepsilon$ ist. Da dies für jedes $n > \frac{1}{p\varepsilon}$ der Fall ist, so braucht man für n_0 eine natürliche Zahl $> \frac{1}{p\varepsilon}$ zu wählen, um $|\,x_n| < \varepsilon$ zu sein für jedes $n \geq n_0$.

Die Zahlenfolge $\{x_n\} = \{a^n\}$ ist also eine Nullfolge, wenn $|\,a| < 1$ ist; sie ist keine Nullfolge, wenn $|\,a| \geq 1$ ist.

Eine ganz andere Frage ist diese, wie schnell die Glieder der Folge $\{a^n\}$ klein werden.

(4) $x_n = na^n$.

Lösung. Auch hier läßt sich zeigen, daß die Folge für $|\,a| < 1$ eine Nullfolge ist. Denn setzt man wieder (für $a \neq 0$) $|\,a| = \frac{1}{p+1}$, $p > 0$, so ist für $n \geq 2$

$$|\,x_n| = \frac{n}{(1+p)^n} = \frac{n}{1+np+\binom{n}{2}p^2+...+p^n} < \frac{n}{\binom{n}{2}p^2} = \frac{2}{(n-1)p^2}.$$

Daher wird $|\,x_n|$ kleiner als ein irgendwie gewähltes, positives ε ausfallen, wenn $\frac{2}{(n-1)p^2} < \varepsilon$, d.h. $n > \frac{2}{\varepsilon p^2} + 1$ ist.

(5) $x_n = n^2a^n$.

Lösung. Ist $|\,a| = \frac{1}{1+p}$ und $p > 0$, so ist für $n \geq 3$ $|\,x_n| < \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)p^3}$. Man bemerke, daß für $n \geq 3$ sicher $1 < \frac{n}{2}$ und also $n-1 > \frac{n}{2}$ ist, so daß für $n \geq 3$ erst recht $|\,x_n| < \frac{12}{(n-2)p^3}$ sein wird. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ genügt es also, für n_0 eine natürliche Zahl $> \frac{12}{\varepsilon p^3} + 2$ zu wählen, damit $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfällt für $n \geq n_0$.

Auch $\{n^2a^n\}$ ist eine Nullfolge, falls $|\,a| < 1$ ist.

(6) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

Lösung. Diese Folge ist offenbar keine Nullfolge, denn $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, ..., x_{2k+1} = 0, x_{2k+2} = 1, ...$ und von keiner Stelle an sind die $|\,x_n|$ sämtlich $< \varepsilon$, falls man sich das $\varepsilon < 1$ gewählt denkt.

(7) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.

Lösung. Wir wissen schon, daß für $n = 2, 3, ...$ stets $4 \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist (vgl. Kapitel 4, Aufgabe (11)). Daher ist für $n = 1, 2, 3, ...$ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq 4$ und $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \geq \frac{1}{4}$. Wählt man also etwa $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so ist außer x_0 kein Glied der Folge seinem Betrag nach $< \varepsilon$. Sie ist daher keine Nullfolge.

(8) $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2+1}$.

Lösung. Da die Folge mit den Gliedern $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1,2,3,...$ in Kapitel 4, Aufgabe (10), als monoton wachsend erkannt war, so ist jedes ihrer Glieder mindestens gleich dem ersten, also $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \le \frac{1}{2}$ ($\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 2$). Daher ist für $n \ge 1$

$$|\,x_n| = \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n^2+1} < \left(\tfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n .$$

Die Folge $\{\frac{1}{2^n}\}$ ist aber eine Nullfolge. Bei beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ läßt sich eine Stelle n_0 so angeben, daß $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ausfällt für jedes $n \ge n_0$. Für denselben n ist auch $|\,x_n| < \varepsilon$. Die Folge ist also eine Nullfolge.

5.5. **Sätze über Nullfolgen.**

Satz 5.13. *Ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge, so ist auch $\{|\,x_n|\}$ eine Nullfolge und umgekehrt.*

Beweis. Sowohl die Folge $\{x_n\}$ wie die Folge $\{|\,x_n|\}$ ist dann und nur dann eine Nullfolge, wenn nach Wahl eines $\varepsilon > 0$ sich n_0 so angeben läßt, daß für $n \ge n_0$ stets $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfällt.
□

Satz 5.14. *Jede Nullfolge ist eine beschränkte Zahlenfolge.*

Beweis. Ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge, so entspricht etwa der Wahl $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ eine Stelle n_0, so daß $|\,x_n| < \varepsilon_0$ ausfällt für jedes $n \ge n_0$. Ist dann q der größte der Werte $|\,x_1|, |\,x_2|, ..., |\,x_{n_0-1}|$, so ist, wenn $q+\varepsilon_0 = K$ gesetzt wird, dies K eine Schranke der Zahlenfolge $\{x_n\}$, da $|\,x_n| < K$ ist für jedes n.
□

Satz 5.15. *Ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge und $\{c_n\}$ irgendeine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch die Folge mit den Gliedern $x'_n = c_n x_n$, $n = 0,1,2,...$, eine Nullfolge.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $K > 0$, so daß stets $|\,c_n| < K$ ist. Wird dann ein $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so ist auch $\frac{\varepsilon}{K} > 0$. Wählt man diese Zahl als Kleinheitsgrad für die x_n, so entspricht ihr eine Stelle n_0, von der ab $|\,x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ ausfällt. Dan ist für $n \ge n_0$

$$|\,x'_n| = |\,c_n||\,x_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Also ist auch $\{x'_n\}$ eine Nullfolge. Hiernach bilden mit $\{x_n\}$ zugleich auch die Zahlenfolgen $\{(-1)^n x_n\}$, $\{(1+(-1)^n)x_n\}$, $\{cx_n\}$, $\{a^n x_n\}$ (mit $|\,a| < 1$) Nullfolgen.
□

Satz 5.16. *Von der Folge $\{x_n\}$ sei schon bekannt, daß sie eine Nullfolge ist, und es sei $\{x'_n\}$ eine zu untersuchende Zahlenfolge. Ist dann eine Ungleichung der Form $|\,x'_n| \le K|\,x_n|$, in der K eine feste positive Zahl bedeutet, stets oder wenigstens für alle $n \ge m$ erfüllt, so ist auch $\{x'_n\}$ eine Nullfolge.*

Beweis. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so läßt sich nach Voraussetzung ein n_0 so angeben, daß $|\,x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ ausfällt für $n \ge n_0$. Wir dürfen annehmen, daß dies $n_0 > m$ ist. Dann ist aber für $n \ge n_0$ stets $|\,x'_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$, also $\{x'_n\}$ eine Nullfolge.
□

Satz 5.17. *Sind $\{x_n\}$ und $\{x'_n\}$ zwei Nullfolgen, so sind auch die Folgen $\{y_n\}$, $\{y'_n\}$, $\{z_n\}$ mit den Gliedern $y_n = x_n + x'_n$, $y'_n = x_n - x'_n$, $z_n = x_n x'_n$, $n = 0,1,2,...$ Nullfolgen.*

Beweis. Es ist stets $|y_n| < |x_n| + |x'_n|$. Wählt man nun ein $\varepsilon > 0$, so ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Dieser Zahl entspricht nach Voraussetzung je eine Stelle n_1 bzw. n'_1, von der ab $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ bzw. $|x'_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt. Wird dann n_0 beliebig oberhalb n_1 und n'_1 gewählt, so ist für jedes $n \geq n_0$ $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also $\{y_n\}$ eine Nullfolge.

Für $\{y'_n\}$ verläuft der Beweis wörtlich ebenso, und für $\{z_n\}$ ergibt sich die Behauptung sofort aus Satz 5.11., da die Faktoren x'_n nach Satz 5.10. eine jedenfalls beschränkte Zahlenfolge bilden.

□

Bemerkung 5.18. Zwei Nullfolgen **dürfen** im allgemeinen **nicht** gliedweise durcheinander dividiert werden. (Etwa $x_n = \frac{1}{4^n}$, $x'_n = \frac{1}{2^n}$ da $\frac{x_n}{x'_n} = 2^n$ keine Nullfolge ist!)

Satz 5.19. *Sind $\{x'_n\}$ und $\{x''_n\}$ zwei gegebene Nullfolgen und ist $\{x_n\}$ eine zu untersuchende Zahlenfolge, deren Glieder für jedes n die Bedingung $x'_n \leq x_n \leq x''_n$ erfüllen, so ist $\{x_n\}$ auch eine Nullfolge.*

Beweis. Wird ein $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so läßt sich nach Voraussetzung je eine Stelle n' und n'' so angeben, daß $|x'_n| < \varepsilon$ ist für $n \geq n'$ und $|x''_n| < \varepsilon$ für $n \geq n''$. Ist dann n_0 eine beliebige oberhalb n' und n'' gelegene Stelle, so ist für $n \geq n_0$ $-\varepsilon < x'_n$ und $x''_n < \varepsilon$, also wegen $x'_n \leq x_n \leq x''_n$ auch $-\varepsilon < x'_n \leq x_n \leq x''_n < \varepsilon$, d.h. $|x_n| < \varepsilon$.

Auch die Folge $\{x_n\}$ ist eine Nullfolge.

□

Ist $k_1, k_2, ..., k_n, ...$ irgend eine Folge von natürlichen Zahlen, in der jede natürliche Zahl genau einmal auftritt, so nennt man die Folge $\{k_n\}$ eine *Umordnung* der Folge der natürlichen Zahlen. Ist dann $\{x_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge, so nennt man die Folge $\{y_n\}$, für die $y_n = x_{k_n}$ ist, eine *Umordnung* der Folge $\{x_n\}$.

Ist $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ eine im engeren Sinn monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so sagt man, $\{p_n\}$ sei eine *Teilfolge* der Folge der natürlichen Zahlen. Ist dann $\{x_n\}$ eine Zahlenfolge, so nennt man die Folge $\{y_n\}$, für die $y_n = x_{p_n}$ ist, eine *Teilfolge* der Folge $\{x_n\}$.

Treten in der Teilfolge $\{p_n\}$ unendlich viele natürliche Zahlen nicht auf und sind $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ diese nicht in der Folge $\{p_n\}$ auftretenden positiven ganzen Zahlen, so sagt man, man habe die Folge $\{n\}$ in die beiden Teilfolgen $\{p_n\}$ und $\{q_n\}$ zerlegt. Z.B. $p_n = 2n$, $q_n = 2n - 1$.

Setzt man, wenn $\{x_n\}$ eine beliebige Zahlenfolge ist, neben $y_n = x_{p_n}$ noch $z_n = x_{q_n}$, so sagt man, man habe die Folge $\{x_n\}$ in die beiden Teilfolgen $\{y_n\}$ und $\{z_n\}$ zerlegt.

Satz 5.20. (i) *Jede Umordnung einer Nullfolge ist wieder eine Nullfolge.*
(ii) *Jede Teilfolge einer Nullfolge ist wieder eine Nullfolge.*

Beweis. (*i*) Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein n_0, so daß $|x_n| < \varepsilon$ ist für alle $n > n_0$. Unter den Nummern, die die (endlich vielen) Glieder $x_1, x_2, ..., x_{n_0}$ in der Folge $y_n = x_{k_n}$, die eine Umordnung der Folge $\{x_n\}$ ist, tragen, sei n' die größte. Dann ist für $n > n'$ stets $|y_n| < \varepsilon$, also $\{y_n\}$ eine Nullfolge.

(*ii*) Ist $\varepsilon > 0$ gegeben und n_0 wieder so bestimmt, daß für $n > n_0$ stets $|x_n| < \varepsilon$ ist, so ist für denselben n auch $|y_n| < \varepsilon$, da $y_n = x_{p_n}$ und $p_n > n > n_0$ ist.

□

Satz 5.21. *Eine beliebige Zahlenfolge $\{x_n\}$ sei in die beiden Teilfolgen $\{y_n\}$ und $\{z_n\}$ zerlegt. Sind dann diese beiden Folgen Nullfolgen, so ist auch $\{x_n\}$ selbst eine Nullfolge.*

Beweis. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so läßt sich nach Voraussetzung je eine Stelle n' und n'' so angeben, daß für $n \geq n'$ $|y_n| < \varepsilon$ bzw. für $n \geq n''$ $|z_n| < \varepsilon$ ausfällt. Ist nun

$\{y_n\}$ mit der Teilfolge $\{x_{p_n}\}$ und $\{z_n\}$ mit der Teilfolge $\{x_{q_n}\}$ von $\{x_n\}$ identisch und wird n_0 oberhalb der beiden Zahlen $p_{n'}$ und $q_{n''}$ gewählt, so ist für $n \geq n_0$ stets $|\, x_n| < \varepsilon$. Also ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge.

□

5.6. **Anwendungsbeispiele der geometrischen Folge.**

(1) In einem Betrieb soll innerhalb eines Planjahres durch Steigerung der Arbeitsproduktivität eine monatliche Produktionserhöhung um $1,5\%$ erreicht werden. Im Monat Januar betrug die Produktion 1400 Stück.
Wie hoch ist die Jahresproduktion? (18 257,7)
Welche Produktion wird im Monat Dezember erreicht? (1649,13)

(2) **Durchschnittliches Wachstumstempo**. Aus der Definition geht hervor, daß die prozentuale Änderung der Glieder einer geometrischen Folge konstant ist. Die geometrische Folge kann daher als mathematisches Modell für ökonomische Vorgänge dienen, denen eine gleichbleibende prozentuale Entwicklung zugrunde liegt.

Wir bezeichnen die jährlich erzielten Umsätze eines Handelsbetriebes mit a_i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$. Bei den einzelnen statistischen Werten treten nun mit Sicherheit Abweichungen gegenüber einer gleichmäßigen prozentualen Entwicklung auf.

Der Quotient $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$ entspricht daher dem durchschnittlichen Wachstumstempo im betrachteten Zeitraum.

Die Berechnung des durchschnittlichen jährlichen Wachstumstempos $\overline{WT}$ erfolgt nach $\overline{WT} = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}.100\%$ oder $\overline{WT} = q.100\%$, $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$.

Bezeichnen wir als Anfangswert einer zeitlichen Entwicklung den direkt vor der Planperiode liegenden Wert mit a_0, dann ergibt sich für $\overline{WT}$ bei n Wachstumszeiträumen $\overline{WT} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}.100\%$.

Der Einzelhandelsumsatz entwickelte sich im Zeitraum von 1973 bis 1977 wie in der Tabelle angegeben. Wie groß waren das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo und die Zuwachsrate? Mit welchem Umsatz konnte bei gleichbleibendem Wachstumstempo im Jahre 1980 gerechnet werden?

Jahr	1973	1974	1975	1976	1977
Einzelhandelsumsatz in Mill. DM	74619	79150	81905	85675	89434

Lösung. Mit den Umsätzen der Jahre 1973 und 1977 erhalten wir
$\overline{WT} = \sqrt[4]{\frac{89434}{74619}}.100\% = 1,0463.100\% = 104,63\%.$

Der 1980 erwartete Umsatz ergab sich mit dem im Basisjahr 1977 erreichten Betrag $(a_1 = 89434)$ und $q = 1,0463$ zu $a_4 = 89434.(1,0463)^3 = 102440,4$.

Das durchschnittliche jährliche Wachstumstempo des Einzelhandelsumsatzes betrug im Zeitraum von 1973 bis 1977 $104,63\%$, die Zuwachsrate $4,63\%$. Im Jahre 1980 konnte bei gleichbleibender Entwicklung mit einem Umsatz von 102,44 Milliarden DM gerechnet werden.

(3) **Zinseszinsrechnung**. Bankkreditzinsen sind für eine effektive Ausnutzung von Produktions- und Zirkulationsfonds von großer Bedeutung.

Zur Herleitung der *Grundformel der Zinseszinsrechnung* nehmen wir an, daß ein Guthaben b_0 zu einem Zinssatz p verzinst wird. Die Jahreszinsen $z = b_0 \frac{p}{100}$ werden diesem Grundbetrag oder Barwert b_0 zugeschrieben und im folgenden Jahr ebenfalls verzinst. In Fortsetzung dieser Überlegung erhalten wir die Guthaben nach dem ersten, zweiten, ..., n-ten Jahr $b_1, b_2, ..., b_n$:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 + b_0 . \tfrac{p}{100} &&= b_0\left(1+\tfrac{p}{100}\right) &&= b_0.q; \\ b_2 &= b_1 + b_1 . \tfrac{p}{100} &&= b_1\left(1+\tfrac{p}{100}\right) &&= b_0.q^2; \\ \ldots \\ b_n &= b_{n-1} + b_{n-1} . \tfrac{p}{100} &&= b_{n-1}\left(1+\tfrac{p}{100}\right) &&= b_0.q^n. \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß die Beträge $b_1, b_2, ..., b_n$ eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied b_0 und dem konstanten Quotienten q bilden. Mit den Bezeichnungen b_n - Endbetrag, p - Zinssatz, $\frac{p}{100}$ - Zinsrate, $(1 + \frac{p}{100}) = q$ - Aufzinsungsfaktor, n - Verzinsungsdauer in Jahren, erhalten wir die Grundformel der Zinseszinsrechnung

$$b_n = b_0 q^n.$$

Die Berechnung des Endbetrages b_n bei bekanntem Grundbetrag b_0, Zinssatz p und Anzahl der Jahre n heißt *Aufzinsen*.

Zur Bestimmung des Grundbetrages b_0 bei gegebenen Endbetrag b_n, Zinssatz p und Anzahl der Jahre n stellen wir $b_n = b_0 q^n$ um und erhalten $b_0 = b_n q^{-n}$. Mit dem *Abzinsungs-* oder *Diskontierungsfaktor* $v = \frac{1}{q}$ wird $b_0 = b_n v^n$. Dieser Berechnungsvorgang heißt *Diskontierung*.

Ein nach n Jahren fälliger Betrag b_n wird zu p Prozent Zinseszins auf die Gegenwart diskontiert.

(i) Auf welchen Endbetrag wachsen 10000 DM an, die bei $3\frac{1}{4}$ % fünf Jahre auf Zinseszins stehen? (11734,11)

(ii) Diskontieren Sie einen nach 10 Jahren fälligen Betrag von 20000 DM bei 5% Zinseszins auf Gegenwart. (12278,26)

6. Grenzwerte von Zahlenfolgen

6.1. Der Begriff des Grenzwertes.

Erklärung 6.1. Wenn eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ zu einer bestimmten Zahl ξ in der Beziehung steht, daß die Folge $\{x_n - \xi\}$ eine Nullfolge ist, so sagt man, die Folge $\{x_n\}$ *konvergiere* oder sie sei konvergent; die Zahl ξ nennt man den *Grenzwert* oder den *Limes* dieser Folge und sagt auch, die Folge strebe gegen ξ oder ihre Glieder näherten sich dem Werte ξ.

Eine solche Tatsache drückt man durch die Symbole $x_n \to \xi$ (genauer: $x_n \to \xi$ für $n \to \infty$) oder $\lim x_n = \xi$ (genauer: $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$) aus.

Da nun die Forderungen $\xi - \varepsilon < x_n < \xi + \varepsilon$ und $|x_n - \xi| < \varepsilon$ für beliebige Zahlen $\varepsilon > 0$ gleichbedeutend sind, kann man sagen:

Es strebt $\{x_n\}$ gegen ξ, falls nach Wahl einer beliebigen positiven Zahl ε sich eine Nummer n_0 so angeben läßt, daß alle x_n mit $n \geq n_0$ in der ε- Umgebung der Stelle ξ liegen.

Beispiel 6.2. (1) Ist $\{x_n\}$ eine beliebige Nullfolge, deren Glieder sämtlich ≥ 0 sind, und ist α eine beliebige positive Zahl, so bilden auch die Zahlen $y_n = (x_n)^\alpha$ eine Nullfolge.

Lösung. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so ist auch $\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, und da $\{x_n\}$ eine Nullfolge ist, muß sich n_0 so bestimmen lassen, daß für $n \geq n_0$ stets $|x_n| < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$

ausfällt. Dann ist aber für denselben n auch $|\,y_n| = y_n = x_n^\alpha < \varepsilon$. Also ist $\{y_n\}$ eine Nullfolge.

(2) Ist $a > 1$ eine beliebige Grundzahl der Logarithmen, so bilden die Zahlen $x_n = \dfrac{\log_a n}{n}$ eine Nullfolge.

Lösung. Es sei $\varepsilon > 0$. Die Forderung, daß $|\,x_n| = \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$ sein soll, bedeutet dasselbe wie diejenige, daß $\log_a n < \varepsilon n$ oder $n < a^{\varepsilon n}$, oder $n(a^{-\varepsilon})^n < 1$ sein soll. Setzt man $b := a^{-\varepsilon}$, so ist $0 < b < 1$, und es läßt sich n_0 so bestimmen, daß für $n \geq n_0$ stets $nb^n < 1$ ausfällt (vgl. mit Kapitel 5, Beispiel für Nullfolgen Nr.4). Für dieselben n ist dann auch $|\,x_n| < \varepsilon$. Also ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge.

(3) Die Zahlen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1,\ n = 1, 2, ...,$ bilden eine Nullfolge.

Lösung. Für die Zahlen x_n ist $(1 + x_n)^n = n$. Denkt man sich für $n \geq 2$ die linke Seite dieser Gleichung nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt, so erkennt man, da $x_n > 0$ ist, daß $1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x_n^3 + ... + x_n^n = n$, oder $\frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \leq n$, oder $|\,x_n| \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ ist. Ist also ein $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so wird hiernach $|\,x_n| < \varepsilon$ ausfallen, sobald n so groß genommen wird, daß $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ ist. Es reicht hierzu aus, $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$ zu nehmen. Ist n_0 eine spezielle natürliche Zahl, die dieser Forderung genügt, so ist für $n \geq n_0$ stets $|\,x_n| < \varepsilon$. Also ist $\{x_n\}$ eine Nullfolge.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$

Lösung. $\lim_{n\to\infty}\{\frac{n+1}{n} - 1\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{4n+3} = \frac{3}{4}.$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2.$ (8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{3n^2+2} = \frac{4}{3}.$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$

Lösung. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \ \wedge\ \forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$

Lösung. $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ \Rightarrow$

$\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \ \Rightarrow$

$|\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} < \frac{1}{2(2\sqrt{n})^2} = \frac{1}{8n} < \frac{1}{n}.$

(11) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$

Lösung. $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}})}$

$\Rightarrow\ |\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} - 1| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}})} < \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$

(12) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0.$

Lösung. I. Fall. $a > 1 \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} > 1 \ \Rightarrow \exists\, \lambda_n > 0 :\ \sqrt[n]{a} = 1 + \lambda_n$

$\Rightarrow\ a = (1+\lambda_n)^n \ \Rightarrow\ a \geq 1 + n\lambda_n$ (Bernoullische Ungleichung)
$\Rightarrow\ \lambda_n \leq \frac{a-1}{n} \ \Rightarrow\ 0 < \lambda_n = \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$.
Laut Satz 5.19. ist $\{\lambda_n\}$ eine Nullfolge.

II. Fall. $0 < a < 1 \ \Rightarrow\ \exists\, b > 1 :\ a = \frac{1}{b} \ \Rightarrow$
$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$.

(13) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Man bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2 - (a+1)a_n + a}{a_n - a}$.

(14) Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Man bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+a_n} - \sqrt{1-a_n}}{a_n}$.

(15) *Die Eulersche Zahl e .*
Die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend (vgl. Kapitel 4, Aufgabe 4.15 (10)), die Folge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist dagegen monoton fallend (vgl. Kapitel 4, Aufgabe 4.15 (11)). Da ersichtlich stets $a_1 \leq a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \leq b_1$ ist und da $b_n - a_n = \frac{1}{n}\, a_n < \frac{1}{n}\, b_1 = \frac{4}{n}$ ist und diese Differenzen somit eine Nullfolge bilden, so ist (a_n/b_n) eine Intervallschachtelung. Die durch sie erfaßte Zahl pflegt man mit e zu bezeichnen. Man hat nun $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Für $n = 6$ lehrt dies, daß $2,52 < e < 2,95$ ist.
Man nennt die Zahl $e = 2,7182818...$ die Eulersche Zahl.

Bemerkung 6.3. Ist $\{x_n\}$ irgendeine Nullfolge, deren Glieder sämtlich > 0 sind, so ist jedesmal die Folge der Zahlen $(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}$ konvergent und hat jedesmal den Grenzwert e.

(16) Ist $\alpha \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl, so strebt die Folge $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ gegen e^α.
Beweis. Es ist nämlich $\{\frac{\alpha}{n}\}$ eine Nullfolge, so daß für $n \to \infty$
$(1+\frac{\alpha}{n})^n = [(1+\frac{\alpha}{n})^{\frac{n}{\alpha}}]^\alpha$ gegen e^α strebt .

Die praktische Bedeutung der Eulerschen Zahl e wird durch das folgende Beispiel deutlich.

Kontinuierliche Verzinsung. Eine Größe werde mit dem nominellen Zinssatz $c > 0$ unterjährig mit n Perioden verzinst. Der Aufzinsungsfaktor beträgt $x_n = (1+\frac{c}{n})^n$. Wenn wir kontinuierliche Verzinsung mit dem nominellen Zinssatz c vornehmen wollen, müßen wir die Anzahl n der Perioden gegen Unendlich wachsen lassen. Was passiert dabei mit der Folge $\{x_n\}$ der Aufzinsungsfaktoren?
Antwort. Wird ein Kapital mit dem nominellen Zinssatz c eine Periode lang kontinuierlich verzinst, dann beträgt der Aufzinsungsfaktor $q = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{c}{n})^n = e^c$.
Es gilt auch $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{c}{n})^n = e^{-c},\ c > 0$.

Jede Zahlenfolge, die nicht konvergiert, heißt *divergent.*

Erklärung 6.4. Wenn eine Folge $\{x_n\}$ die Eigenschaft hat, daß nach Wahl einer beliebigen (großen) positiven Zahl G sich immer eine Nummer n_0 so angeben läßt, daß für alle $n \geq n_0$ stets $x_n > G$ ist, so sagt man, die Folge $\{x_n\}$ divergiere oder strebe gegen $+\infty$, oder sie sei *bestimmt divergent* mit dem Grenzwert $+\infty$, und bezeichnet dies durch die Symbolik $x_n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Ganz entsprechend erklärt man $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Wenn eine Folge $\{x_n\}$ nicht konvergiert, aber auch nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, so sagt man von ihr, sie sei *unbestimmt divergent.*

Beispiel 6.5. (1) Ist $\alpha > 0$, so strebt $n^\alpha \to \infty$.

Denn ist $G > 0$ beliebig gewählt und $n_0 > G^{\frac{1}{\alpha}}$, so ist für $n \geq n_0 \quad n^\alpha > (G^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = G$.

(2) Es strebt, wie auch die Grundzahl $a > 1$ gewählt sein mag, $\log_a n \to \infty$, da $\log_a n > G$ sobald $n > a^G$ ist.

(3) Ist $a > 1$, so strebt $a^n \to \infty$.

Denn setzt man $a = 1 + p$, so ist $p > 0$ und $a^n = (1+p)^n \geq 1 + np > np$. Es ist also, wie auch $G > 0$ gewählt werden mag, $a^n > G$, sobald $n > \frac{G}{p}$ ist.

(4) Ist $\{x_n\}$ eine Folge, die gegen $+\infty$ divergiert, und wird $y_n = -x_n$ gesetzt, so strebt y_n gegen $-\infty$.

(5) Strebt x_n gegen 0 und sind alle $x_n > 0$, so strebt $\dfrac{1}{x_n}$ gegen $+\infty$.

Sind dagegen alle $x_n < 0$, so strebt $\dfrac{1}{x_n}$ gegen $-\infty$.

(6) Die Folge $(-1)^n$, $n = 1, 2, 3, ...$, ist unbestimmt divergent, ebenso die Folge $1, 0, 1, 0, 1, ..., 1, 0, ...$

Denn die Konvergenz einer Folge bedeutet, daß nach Wahl eines positiven ε von einer passenden Nummer ab alle Glieder der Folge in einem gewissen Intervall der Länge 2ε liegen.

Satz 6.6. *Eine Zahlenfolge kann nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren.*

Eine konvergente Zahlenfolge bestimmt also ihren Grenzwert völlig eindeutig.

Satz 6.7. *Eine konvergente Zahlenfolge $\{x_n\}$ ist notwendig beschränkt. Ist stets $|\,x_n| \leq K$, $K > 0$, so gilt auch für den Grenzwert ξ die Ungleichung $|\,\xi| \leq K$.*

Beweis. Da jede Nullfolge beschränkt ist, so ist die Folge $\{x_n - \xi\}$ beschränkt. Ist etwa stets $|\,x_n - \xi| \leq K_0$, so ist wegen $x_n = (x_n - \xi) + \xi$ und $|\,x_n| \leq |\,x_n - \xi| + |\,\xi|$ auch stets $|\,x_n| \leq K_0 + |\,\xi|$. Die Folge $\{x_n\}$ ist also beschränkt.

Ist nun K irgendeine Schranke der Folge, also stets $|\,x_n| < K$, so kann nicht $|\,\xi| > K$ sein. Denn unter dieser Annahme wäre $|\,\xi| - K > 0$, und es müßte für ein hinreichend großes $n \quad |\,x_n - \xi| < |\,\xi| - K$ sein. Hieraus würde aber folgen, daß $|\,\xi| - |\,x_n| \leq |\,x_n - \xi| < |\,\xi| - K$, oder $|\,x_n| > K$ wäre, was der Bedeutung von K widerspricht.

□

6.2. **Das Rechnen mit Grenzwerten.**

Satz 6.8. *Sind $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei konvergente Folgen und strebt $x_n \to \xi$ sowie $y_n \to \eta$, so ist auch die Folge der Zahlen*

a) $\{x_n + y_n\}$ *konvergent, und* $x_n + y_n \to \xi + \eta$;

b) $\{x_n - y_n\}$ *konvergent, und* $x_n - y_n \to \xi - \eta$;

c) $\{x_n\, y_n\}$ *konvergent, und* $x_n\, y_n \to \xi\, \eta$;

d) $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ *konvergent, und* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{\xi}{\eta}$ *falls alle* $y_n \neq 0$ *und* $\eta \neq 0$ *sind.*

Beweis. Zum Beweis benutze man die Nullfolgen $\{x_n - \xi\}$ und $\{y_n - \eta\}$ und die Sätze über Nullfolgen.

Beweis von *c*). Es ist nämlich $x_n\, y_n - \xi\, \eta = (x_n - \xi)y_n + (y_n - \eta)\xi$. Der Ausdruck rechter Hand entsteht nun aus den Nullfolgen $\{x_n - \xi\}$ und $\{y_n - \eta\}$, indem diese gliedweis mit beschränkten Faktoren multipliziert und nachher addiert werden, und ist also selbst Glied einer Nullfolge.

□

Satz 6.9. *Sind* $\{y_n\}$ *und* $\{z_n\}$ *zwei konvergente Zahlenfolgen, die beide denselben Grenzwert* ξ *haben, ist* $\{x_n\}$ *eine zu untersuchende Zahlenfolge und erfüllen die Glieder dieser Folge für jedes* n *die Bedingung* $y_n \leq x_n \leq z_n$*, so strebt* $x_n \to \xi$*.*

Beispiel 6.10. (1) Die Zahlenfolge $\{f(n)\}$ mit $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

Lösung. Die Zahlenfolge $f(1); f(2); f(3); ...$, ausgeschrieben

$$\frac{1}{1.3};\ \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5};\ \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7}; ...,$$

kann auf Grund der Zerlegung

$$\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1}\right)$$

auch in der Form

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right); \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right); \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right); ...$$

oder, nach Zusammenfassen der Glieder, in der Gestalt

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right);\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right);\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{7}\right); ...$$

dargestellt werden. Allgemein gilt also für das n-te Glied

$$a_n = f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

und deshalb $\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{2}$.

(2) Ist $\{x_n\}$ eine beliebige Nullfolge, so daß ihre Glieder sämtlich $\neq 0$ sind, so strebt

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} \to \frac{\log_b a}{\log_b e} = \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Lösung. Die Zahl e bildet die Basis der *natürlichen Logarithmen*.

Da die Behauptung für $a = 1$ offenbar richtig ist, dürfen wir weiterhin $a \gtrless 1$ annehmen. Da die Zahlen $y_n = a^{x_n} - 1$ wieder eine Nullfolge bilden (Die Folge

$x_n = \frac{\log_b y_{n+1}}{\log_b a}$ ist eine Nullfolge!), deren Glieder sämtlich > -1 und $\neq 0$ sind (da $a^{x_n} > 0 \wedge a^{x_n} \neq 1$ gilt), strebt also

$$\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \frac{y_n}{\log_b y_{n+1}} \log_b a = \frac{\log_b a}{\log_b (y_{n+1})^{\frac{1}{y_n}}} \longrightarrow \frac{\log_b a}{\log_b e} = \ln a.$$

Bemerkung 6.11. Strebt $x_n \to \xi$ und sind alle Glieder x_n sowie der Grenzwert ξ positiv, so strebt $\log_b x_n \to \log_b \xi$, zu welcher Grundzahl $b > 1$ auch die Logarithmen genommen werden, da:

$$\log_b x_n - \log_b \xi = \log_b \frac{x_n}{\xi} = \log_b \left(1 + \frac{x_n - \xi}{\xi}\right) \longrightarrow \log_b 1 = 0.$$

Eine konvergente Folge mit positiven Gliedern und positivem Grenzwert "darf" also auch logarithmiert werden.

(3) $x_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = n(\sqrt[n]{a}-1) \longrightarrow \ln a.$

(4) $x_n = \dfrac{\ln n}{n} \wedge a = e \Rightarrow \dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = \dfrac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{\ln n} \longrightarrow 1.$

Bemerkung 6.12. Exponentialfunktionen mit der Basis e dienen in der Ökonomie zur Modellierung von Wachstumsvorgängen:

- Exponentielles Wachstum $f(t) = a.e^{kt}$, $t \in \mathbb{R}^+$, a, $k =$ konst.
- Beschränktes exponentielles Wachstum
  $f(t) = G - ae^{-kt}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $G = \lim_{t\to\infty} f(t)$, a, $k =$ konst.
- Beschränkte exponentielle Abnahme
  $f(t) = G + ae^{-kt}$, $t \in \mathbb{R}^+$, $G = \lim_{t\to\infty} f(t)$, a, $k =$ konst.
- Logistisches Wachstum
  $f(t) = \dfrac{aG}{a + e^{-Gkt}}$ oder $f(t) = \dfrac{G}{1 + be^{-Gkt}}$,
  $t \in \mathbb{R}^+$, $G = \lim_{t\to\infty} f(t)$, a, b, $k =$ konst, $k > 0$.

Logarithmusfunktionen zur Basis e treten beim Logarithmieren der Wachstumsfunktionen auf und dienen zum Beispiel als statistische Elastizitätsfunktionen zur Gewinnung ökonomischer Analysen.

6.3. **Die beiden Konvergenzprobleme.** Ein erheblicher Teil aller Untersuchungen der höheren Analysis beruht auf Grenzwertbetrachtungen, die ihrerseits wieder auf die Untersuchung von Zahlenfolgen gestützt werden können. Hierbei sieht man sich vor allem zwei Fragen gegenüber, nämlich

- erstens der Frage, ob eine irgendwie vorgelegte Zahlenfolge konvergiert oder ob sie (bestimmt oder unbestimmt) divergiert; und
- zweitens der Frage, welchem Grenzwert eine als konvergent erkannte Zahlenfolge zustrebt.

Zwei Fragen, die man kurz als die Frage nach dem Konvergenzverhalten einer beliebigen bzw. als die Frage nach dem Grenzwert einer als konvergent erkannten Zahlenfolge bezeichnet.

Jeder Satz, der ein Mittel an die Hand gibt, über das Konvergenzverhalten vorgelegter Zahlenfolgen zu entscheiden, heißt ein *Konvergenzkriterium* bzw. *Divergenzkriterium*.

Satz 6.13. Das erste Hauptkriterium (für monotone Folgen) *: Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist stets konvergent. Eine monotone und nicht beschränkte Zahlenfolge ist stets bestimmt divergent, und zwar divergiert sie gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$, je nachdem die Folge wächst oder fällt.*

Beweis. I. Ist die Folge $\{x_n\}$ monoton wachsend, so ist stets $x_n \leq x_{n+1}$, die Folge also sicher nach links beschränkt.

Ist nun die Folge nicht beschränkt, so kann sie keine rechte Schranke besitzen. Wählt man also eine beliebige positive Zahl G, so gibt es stets ein Glied, etwa das Glied x_{n_0}, für das $x_{n_0} > G$ ist. Wegen des monotonen Anwachsens der Glieder ist dann erst recht auch für alle $n \geq n_0 \quad x_n > G$. Die Folge divergiert gegen $+\infty$.

Ganz entsprechend erkennt man, daß eine monoton fallende und nicht beschränkte Folge gegen $-\infty$ divergiert.

II. Ist die Folge $\{x_n\}$ monoton wachsend und beschränkt, etwa stets $x_1 \leq x_n \wedge |x_n| \leq K$, $K > 0$, so liegen alle Glieder der Folge in dem Intervall J_0, das sich von $-K$ bis $+K$ erstreckt. Auf dieses Intervall wenden wir die *Halbierungsmethode* an.

Wir bezeichnen mit J_1 die Hälfte von J_0, in der unendlich viele glieder der Folge liegen, mit J_2 die Hälfte von J_1, in der unendlich viele Glieder von $\{x_n\}$ liegen, usw.

Die Intervalle der so entstandenen Schachtelung haben alle die Eigenschaft, daß : liegt in J_k z.B. der Punkt x_{n_k}, so liegen auch alle Punkte x_n mit $n \geq n_k$ in J_k, denn sie liegen nach Voraussetzung rechts von x_{n_k}, aber nach der Konstruktion von J_k nicht rechts vom rechten Endpunkt dieses Intervalls.

Durch passende Wahl der Zahlen $n_1, n_2, n_3, ..., n_k, ...$ kann man demnach erreichen, daß für $k = 1, 2, 3, ..., n, ...$ die folgende Aussage gilt:

In J_k liegen alle x_n mit $n \geq n_k$, aber rechts von J_k ist kein x_n mehr gelegen.

Ist nun ξ durch diese Intervallschachtelung bestimmt, so läßt sich zeigen, daß $x_n \to \xi$ strebt. Wird nämlich die positive Zahl ε beliebig gewählt, so bestimme man die Nummer p so, daß die Länge von J_p kleiner als ε ist. Neben ξ liegen dann auch alle x_n mit $n \geq n_p$ in J_p, so daß also für alle $n \geq n_p \quad |x_n - \xi| < \varepsilon$ ausfällt und x_n gegen ξ strebt.

Ist $\{x_n\}$ eine monoton fallende und beschränkte Zahlenfolge, so ist die Folge $\{y_n\}$ der Zahlen $y_n = -x_n$ monoton wachsend und beschränkt und also konvergent. Dann ist auch die Folge der Zahlen $-y_n = x_n$ konvergent.

□

Beispiel 6.14. Die folgenden Zahlenfolgen sind auf Konvergenz (Divergenz) zu untersuchen.

(1) Es sei $x_n = \dfrac{\ln n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$

Wegen $x_{n+1} - x_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \ln[\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}] = \frac{1}{n(n+1)} \ln[\frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})^n]$ und $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e = 2,718... < 3$ ist die Folge monoton fallend, da

$x_{n+1} - x_n < \frac{1}{n(n+1)} \ln \frac{3}{n} \leq 0$ ist, wenn $n \geq 3$ ist.

Es gilt also $0 \leq x_n = \frac{\ln n}{n} < \frac{\ln 3}{3}$, $n \geq 3$.

Die Folge ist auch begrenzt, also konvergent.

(2) Es sei $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$

Wegen $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ ist die Folge monoton wachsend.

Wegen $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$, $k = 1, 2, ..., n$ ist $x_n \leq \frac{n}{n+1} < 1$.

Wegen $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{n+n}$, $k = 1, 2, ..., n$ ist $x_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ und also $\frac{1}{2} \leq x_n < 1$, d.h. $\{x_n\}$ ist beschränkt.

Also sie ist konvergent.

(3) Die Folge $x_n = \dfrac{1 - 2 + 3 - 4 + ... + (-1)^{n-1}n}{n}$ ist divergent.

I. Es sei $n = 2k \Rightarrow x_n = \frac{(-1)k}{2k} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -\frac{1}{2}$.

II. Es sei $n = 2k-1 \Rightarrow x_n = \frac{(-1)(k-1)+2k-1}{2k-1} = \frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{k}} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \frac{1}{2}$.

Die Zahlenfolge $\{x_n\}$ "konvergiert" also gegen zwei verschiedene Grenzwerte. Sie ist also divergent.

Erklärung 6.15. Eine reelle Zahl ξ heißt *Häufungswert* oder *Häufungspunkt* einer Menge von reellen Zahlen, wenn in jeder (noch so kleinen) Umgebung der Stelle ξ unendlich viele Elemente der Menge liegen, wenn es also nach Wahl einer beliebigen positiven Zahl ε immer noch unendlich viele Elemente x der Menge gibt, die der Bedingung $\xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon$ oder $|x - \xi| < \varepsilon$ genügen.

Satz 6.16. *Jede beschränkte unendliche Punktmenge besitzt mindestens einen Häufungspunkt (Satz von Bolzano - Weierstraß).*

Aufgabe 6.17. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

Lösung. Man setze $b_n = \sqrt[n]{n}$ ein. Es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Man setze $c_n = \sqrt[n]{2n}$ ein. Es folgt

$c_n = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} \ \wedge\ 1 < \sqrt[n]{2} \leq 2 \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{2} = 1 + \lambda_n \ \wedge\ \lambda_n > 0 \ \Rightarrow$

$2 = (1+\lambda_n)^n \geq 1 + n\lambda_n \ \Rightarrow\ \lambda_n \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \ \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} c_n = 1 \ \Rightarrow\ b_n \leq x_n = \sqrt[n]{n+1} \leq c_n \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

(2) $\{x_n\} = \{\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ ...\} \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Lösung. $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1}, ..., x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}, ...$

$\Rightarrow\ x_n^2 = 2 + x_{n-1}$.

I. $\{x_n\}$ ist eine beschränkte Zahlenfolge.

Man nutze die Methode der volständigen mathematischen Induktion:

(i) $x_1 = \sqrt{2} \ \Rightarrow\ 1 < x_1 < 2$;

(ii) Man setze voraus, daß $1 < x_k < 2$ ist;

(iii) $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2 \ \wedge\ x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} > \sqrt{2} > 1$.

$$\Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad 1 < x_n < 2.$$

II. $\{x_n\}$ ist eine monoton wachsende Folge.

Man nutze die Methode der vollständigen Induktion:

(i) $x_2 - x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}} > 0 \;\Rightarrow\; x_2 > x_1;$

(ii) Man setze voraus, daß $x_k > x_{k-1}$ ist;

(iii) $x_{k+1}^2 = 2 + x_k \;\wedge\; x_k^2 = 2 + x_{k-1} \;\Rightarrow\; x_{k+1}^2 - x_k^2 = x_k - x_{k-1} > 0$
$\Rightarrow\; (x_{k+1} + x_k)(x_{k+1} - x_k) > 0 \;\Rightarrow\; x_{k+1} > x_k.$

$$\Rightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} > x_n.$$

III. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2.$

Da $\{x_n\}$ monoton wachsend und beschränkt ist, konvergiert sie gegen einen Grenzwert ξ, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Es gilt
$x_{n+1}^2 = 2 + x_n \;\Rightarrow\; \xi^2 = 2 + \xi \;\Rightarrow\; \xi_1 = -1 \;\wedge \xi_2 = 2.$
Da aber $1 < x_n < 2,\; n = 1, 2, ...,$ ist, so ist auch $1 < \xi \leq 2 \;\Rightarrow\; \xi = 2.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1.$
Lösung. $x_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n = (1 - \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n})^n \longrightarrow_{n\to\infty} e^{-1}.e = 1.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - n!} = 1.$
Lösung. $(n+2)! + n! = n!\{(n+2)(n+1) + 1\} = n!\{n^2 + 3n + 3\};$
$(n+2)! - n! = n!\{(n+2)(n+1) - 1\} = n!\{n^2 + 3n + 1\}.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = 1.$
Lösung.
$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \;\wedge\; \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2} < ... < \sqrt{n^2+n} \;\Rightarrow$
$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} \quad \wedge$
$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n!)}{n} = 0.$
Lösung. $-1 \leq \sin(n!) \leq 1 \;\Rightarrow\; |\,x_n| = \frac{1}{n}|\sin(n!)| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(n^2 + n + 1)}{n - \sqrt{2}} = 0.$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{1 + \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{(n-1)n}\right\} = 2.$

(9)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + ... + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + ... + b_l} = \begin{cases} 0 & l > k; \\ \dfrac{a_0}{b_0} & l = k; \\ \infty & l < k. \end{cases}$$

Satz 6.18. Das zweite Hauptkriterium (für beliebige Zahlenfolgen) *: Eine beliebige Zahlenfolge $\{x_n\}$ ist jedesmal dann, aber auch nur dann konvergent, wenn sich nach Wahl* *einer jeden positiven Zahl ε immer eine Stelle $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so angeben läßt, daß $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$ ausfällt, sobald n und n' beide $\geq n_0$ sind (Satz von Cauchy).*

Beispiel 6.19. $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$.

Die Folge $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, ...$ ist beschränkt, $0 \leq x_n \leq 1$, aber nicht monoton. Es ist nämlich

$|x_1 - x_0| = 1,\ |x_2 - x_1| = \frac{1}{2}, ..., |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| = ... = \frac{1}{2^n}, ...$

und es ist sofort klar, daß der Abstand je zweier aufeinander folgender Glieder eine Nullfolge bildet. Außerdem

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : (\frac{1}{2})^{n_0} < \varepsilon \ \wedge\ |x_n - x_{n'}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \ \wedge\ \forall n' \geq n_0,$$

da zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern alle weiterhin folgenden liegen.

Aufgabe 6.20. (1) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folgen $\{x_n\}_1^\infty$:

$$\begin{array}{ll} x_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right); & x_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}; \\ x_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n; & x_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n; \\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}; & x_n = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}; \\ x_n = \dfrac{n}{n+1} + \sqrt{n}; & x_n = \dfrac{4 + \sqrt{n}}{n}. \end{array}$$

(2) Sind die Folgen $\{a_n\}_1^\infty$ beschränkt?

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2}; \qquad a_n = \frac{(n+2)^2}{n+1}.$$

(3) Sind die Folgen $\{a_n\}_1^\infty$ monoton?

$$a_n = \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}; \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) ... \left(1 + \frac{1}{3^n}\right).$$

(4) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen $\{x_n\}$:

$$\begin{array}{lll} x_n = \left(\dfrac{n^2 - 4n + 3}{n^2 + 3n + 2}\right)^n; & x_n = \left(\dfrac{n^2 - 5n + 6}{n^2 + 5n + 6}\right)^{2n}; & x_n = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n; \\ x_n = \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n; & x_n = \left(\dfrac{n+5}{n+4}\right)^n; & x_n = \left(\dfrac{n-3}{n+2}\right)^n; \\ x_n = \left(\dfrac{n^2 - 1}{n^2 - 2n - 3}\right)^n; & x_n = \left(\dfrac{2n^2 + n - 1}{2n^2 + 6n}\right)^n; & x_n = \left(\dfrac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 3n + 2}\right)^{\frac{n}{2}}; \\ x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+k}, k \in \mathbb{Z}; & x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{nk}, k \in \mathbb{Z}. & \end{array}$$

7. Unendliche Zahlenreihen

Es sei $\{a_n\}$ eine unendliche Zahlenfolge.

Eine *unendliche Zahlenreihe* ist ein Ausdruck der Gestalt

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \in \mathbb{R}.$$

Die (endlichen) Summen $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, heißen die *Partial-* oder *Teilsummen* der Reihe.

Besitzt die Folge der Teilsummen $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ einen Grenzwert S, so nennt man die Reihe *konvergent* und S ihre *Summe*, d.h. $S := \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Existiert dieser Grenzwert nicht, so heißt die Reihe *divergent*.

Es ist klar, daß eine unendliche Reihe dann und nur dann konvergiert, wenn eine Zahl S so gefunden werden kann, daß die Differenz $R_{n+1} := S - S_n$ eine Nullfolge bildet. Nennt man R_{n+1} den *Rest der Reihe*, so ist also die Reihe genau dann konvergent, wenn ihr Rest gegen Null strebt.

Beispiel 7.1. Man untersuche die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

auf Konvergenz und ermittle gegebenfalls ihre Summe.

Lösung. $a_n := \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Wir bilden die Teilsummen
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow$
$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 7.2. Bestimmen Sie Konvergenz und Summe der Reihen:

(1) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n.(n+1)} + ...$ $\quad S = 1$

(2) $\frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + ... + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ...$ $\quad S = \frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13} + ... + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + ...$ $\quad S = \frac{1}{12}$

(4) $\frac{1}{2.6} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{4.8} + ... + \frac{1}{(n+1)(n+5)} + ...$ $\quad S = \frac{77}{4.60}$

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$. $\quad S = \frac{3}{4}$

Erklärung 7.3. Die geometrischen Reihen: Eine unendliche Reihe der Gestalt

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

heißt eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied a und dem Quotienten q;
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Für das n-te, $(n+1)$-te und $(n+2)$-te Glied einer geometrischen Reihe gilt:
$a_n := aq^{n-1},\ a_{n+1} = aq^n,\ a_{n+2} = aq^{n+1} \Rightarrow a_n a_{n+2} = a^2 q^{2n} = a_{n+1}^2$.
Für die Teilsumme S_n einer geometrischen Reihe ergibt sich
$S_n = a + aq + ... + aq^{n-1} \ \Rightarrow\ qS_n = aq + aq^2 + ... + aq^n \ \Rightarrow$
$S_n - qS_n = a - aq^n = a(1 - q^n) \ \Rightarrow\ S_n = a\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.
Diese Formel heißt oft auch *Summe der endlichen geometrischen Reihe.*

Berühmtheit hat die **Schachbrettaufgabe** erlangt, nach welcher sich der Erfinder des Schachspieles, Sessa, von dem indischen König Scheram als Belohnung diejenige Summe von Weizenkörnern erbeten haben soll, die sich ergibt, wenn man aufs erste der 64 Felder ein Korn und auf jedes weitere Feld die jeweils doppelte Zahl von Körnern legt. Es ergibt sich die Teilsumme S_n einer geometrischen Reihe mit $a = 1,\ q = 2,\ n = 64 :\ S_n = 2^{64} - 1 \approx 10^{19}$, also eine in Größenordnung von 10 Trillionen liegende Zahl.

Satz 7.4. *Eine geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ *konvergiert genau dann, wenn* $|q| < 1$ *ist und hat dann zur Summe* $\dfrac{a}{1-q}$.

Beweis. $S_n = a\frac{1-q^n}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n$.
Da $\lim_{n\to\infty} q^n$ genau dann vorhanden ist, wenn $|q| < 1$ ist und $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ist, so bekommen wir für den gesuchten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

□

Für das Restglied der geometrischen Reihe ergibt sich
$R_{n+1} = S - S_n = \frac{a}{1-q} - a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q}$ und
$\lim R_{n+1} = \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |q| < 1$.

Beispiel 7.5. (*Achilles und die Schildkröte*) In der Antike wurde von Philosophen das folgende Problem diskutiert: Achilles und eine Schildkröte laufen um die Wette. Achilles legt in einer Sekunde $10m$ zurück, während die (für ihresgleichen sehr flinke) Schildkröte in einer Sekunde nur $1m$ bewältigt. Dafür hat sie $10m$ Vorsprung. Wann holt Achilles die Schildkröte ein?

Die antiken Philosophen haben das Problem auf eine unendliche Reihe zurückgeführt.

- Zunächst durchläuft Achiles die $10m$ lange Strecke, die die Schildkröte Vorsprung hat, und benötigt dazu 1 Sekunde.
  In dieser Zeit legt die Schildkröte $1m$ zurück. Sie hat jetzt $1m$ Vorsprung. Es ist eine Sekunde verstrichen.
- Dann durchläuft Achilles den $1m$-Vorsprung der Schildkröte und benötigt dazu $\frac{1}{10}$ Sekunde.
  In dieser Zeit legt die Schildkröte $0,1m$ zurück. Sie hat jetzt $0,1m$ Vorsprung. Es sind $1 + \frac{1}{10}$ Sekunde verstrichen.
- Dann durchläuft Achilles den $0,1m$-Vorsprung der Schildkröte und benötigt dazu $\frac{1}{100}$ Sekunde.

In dieser Zeit legt die Schildkröte $0,01m$ zurück. Sie hat jetzt $0,01m$ Vorsprung. Es sind $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ Sekunde verstrichen...

Diese Zerlegung des Aufholvorgangs in einzelne Perioden kann man beliebig lang fortsetzen. Nach der Periode n hat die Schildkröte immer noch $0,1^{n-1}m$ Vorsprung und es sind $S_n = 1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+...+\frac{1}{10^{n-1}}$ Sekunden vergangen. Daraus schlossen die antiken Philosophen, daß Achiles die Schildkröte niemals einholen kann, weil "bis dahin unendlich viele Zeitperioden mit einer positiven Dauer verstreichen müßten".

Natürlich hat Achilles die Schildkröte schließlich doch erwischt. Worin besteht aber der Fehler in der Schlußfolgerung der Antike? Die Antwort lautet: Es ist nicht richtig, daß unendlich viele Zeitperioden mit einer positiven Dauer notwendig als Summe eine unendlich lange Zeitperiode ergeben müssen!

Sehen wir uns an, wann Achilles die Schildkröte erwischt. Nach n Perioden sind $S_n = \frac{1-0,1^n}{1-0,1} = \frac{10}{9}(1-0,1^n) \le \frac{10}{9}$ Sekunden verstrichen. Die verstrichene Zeit übersteigt nie das Ausmaß von $\frac{10}{9}$ Sekunden, gleichgültig wie viele Perioden man auch durchläuft. Schließlich, nach unendlich vielen durchlaufenen Perioden erwischt Achilles seine Schildkröte und es sind $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{9}(1-0,1^n) = \frac{10}{9}$ Sekunden verstrichen.

Aufgabe 7.6. (1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}.$ $S=2$

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-2)^{n-1}}.$ $S=\frac{2}{3}$

(3) Jeder periodische unendliche Dezimalbruch kann als konvergente geometrische Reihe geschrieben werden:

a) $0,666...=\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+...=\sum_{n=1}^{\infty}6.10^{-n} \Rightarrow a=\frac{6}{10},\ q=\frac{1}{10} \Rightarrow$

$$S=\frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{3}.$$

b) $0,131313...=\frac{13}{100}+\frac{13}{10000}+...=\sum_{n=1}^{\infty}13.100^{-n} \Rightarrow S=\frac{13}{99}.$

c) $3,2777...=3,2+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+...=3,2+\sum_{n=2}^{\infty}7.10^{-n} \Rightarrow S=\frac{59}{18}.$

Die Summe ist stets eine **rationale** Zahl.

(4) Folgende geometrische Reihen sind divergent:

a) $1+3+9+27+...$ $q=3>1.$

b) $1-1+1-1+...$ $q=-1.$

c) $0,5+0,55+0,605+0,6655+...$ $q=1,1>1.$

(5) Wie groß ist der Fehler gegenüber der Summe folgender Reihe, wenn man diese nach 5 Gliedern abbricht?

$$27-9+3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+...$$

Lösung. $a = 27,\ q = -\frac{1}{3} \Rightarrow R_6 = S - S_5 = \frac{aq^5}{1-q} = -\frac{1}{12}$.

(6) *Barwert einer ewigen Rente*: Um eine vorschüssige Rente von a GE n-mal auszahlen zu können, benötigen wir ein Kapital in der Höhe des Barwerts $B_n = a\dfrac{1-v^n}{1-v}$, wobei v den Abzinsungsfaktor bezeichnet.

Wir stellen uns nun die Frage, welches Kapital B_∞ wir benötigen, um die Rente ewig auszahlen zu können.

Die Folge $\{B_n\}$ ist die Folge der Partialsummen einer geometrischen Reihe. Da $0 < v < 1$ ist, handelt es sich um eine konvergente geometrische Reihe und

$$B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{a}{1-v}.$$

(7) *Ewige Rente*: Welches Kapital ist nötig, um beim Zinssatz von 8% eine ewige Rente (vorschüssige!) in Höhe von 1000 GE finanzieren zu können?

Es ist $v = \frac{1}{1{,}08} = 0,925$ und daher $K_\infty = \frac{1000}{1-v} = 13500$ GE.

7.1. **Konvergenzkriterien.**

7.1.1. *A. Reihen mit lauter positiven Gliedern.*

Satz 7.7. Notwendiges Konvergenzkriterium. *Notwendig (aber* **nicht** *hinreichend) für die Konvergenz einer Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist, daß* $a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *bzw.* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *d.h. die Glieder der Reihe müssen eine Nullfolge bilden.*

Bemerkung 7.8. Konvergiert eine Reihe, so ist das Kriterium stets erfüllt.

Aber aus dem Bestehen der Bedingung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ kann nicht auf die Konvergenz der Reihe geschlossen werden.

Ist die Bedingung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nicht erfüllt, so ist die Reihe sicher **divergent**.

Satz 7.9. Majorantenkriterium. *Es seien* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *zwei unendliche Reihen, bei denen von einer Stelle* $n = k$ *ab jedes Glied der* a*-Reihe größer oder gleich dem entsprechenden Glied der* b*-Reihe ist, d.h.* $b_n \le a_n$, $\forall\, n \ge k$. *Dann gilt:*

(i) *aus Konvergenz von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *folgt Konvergenz von* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

(ii) *aus Divergenz von* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *folgt Divergenz von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Im Falle (i) heißt die a-Reihe eine konvergente *Majorante* für die b-Reihe; im Falle (ii) die b-Reihe ist eine divergente *Minorante* für die a-Reihe.

Die Schlüsse sind **nicht umkehrbar**!

Beispiel 7.10. Es soll die *harmonische Reihe*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz untersucht werden.

Lösung. **I. Beweismethode**. Wir schreiben die Reihe in der Form

$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+...+\frac{1}{32}\right)+...$

und vergleichen sie klammernweise mit der Reihe

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{32}+...+\frac{1}{32}\right)+...$

Die n-te Klammer ($n > 1$) der letzten Reihe hat 2^{n-1} gleiche Summanden 2^{-n}. Diese Reihe läßt sich auch in der Form

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)+...$

schreiben. Sie ist also **sicher divergent**, da die Glieder keine Nullfolge bilden (notwendiges Konvergenzkriterium!). Außerdem ist jedes Glied der harmonischen Reihe größer als das entsprechende Glied der Vergleichsreihe:

$\left(1+\frac{1}{2}\right)>\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right),...$

Also ist die letztere eine **divergente Minorante** für die hatmonische Reihe und folglich auch diese **divergent**!

II. Beweismethode. Wir bilden die Teilsummen $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$. Ist die Folge $\{S_n\}$ konvergent, so soll auch ihre Teilfolge $\{S_{2n}\}$ konvergent sein und gegen denselben Grenzwert streben. Demnach soll $\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ sein. Es ist aber

$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n} \ \geq\ \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, d.h. $S_{2n}-S_n \geq \frac{1}{2}$

und die Folge $\{S_{2n}-S_n\}$ ist keine Nullfolge.

Die harmonische Reihe ist **divergent**!

$\square$

Aufgabe 7.11. (1) Die Reihe $2+\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{4}+...+\dfrac{n+1}{n}+...=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ ist divergent.

(2) Die Reihe $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+...+\dfrac{1}{n^2}+...=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

Lösung. Wir nehmen die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ in Betracht. Da $\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$ ist, so ist die Reihe $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ und diese auch konvergent.

(3) Die Reihe $\dfrac{2}{1}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}+...+\dfrac{2}{2n-1}+...$ ist divergent.

Lösung. $a_n := \frac{2}{2n-1}=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}>\frac{1}{n}$, und die harmonische Reihe ist divergent.

Satz 7.12. Quotientenkriterium (*Kriterium von D'Alembert*).

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(\text{bzw. }\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\begin{cases}<1 & \Rightarrow\ \text{Konvergenz von } \sum_{n=1}^{\infty}a_n\\ =1 & \Rightarrow\ \text{keine Aussage}\\ >1 & \Rightarrow\ \text{Divergenz von } \sum_{n=1}^{\infty}a_n\end{cases}$$

Das Kriterium ist **hinreichend**.

Aufgabe 7.13. Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz.

(1) $1+\frac{4}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{10}{4!}+...+\frac{3n-2}{n!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n!}.$

Lösung. $a_n=\frac{3n-2}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{3n+1}{(n+1)!}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3n+1}{(n+1)(3n-2)}$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ $0<1$.

Die Reihe ist konvergent.

(2) $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$

(3) $\frac{5}{12}+\frac{25}{48}+\frac{125}{108}+...+\frac{5^n}{12n^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{12n^2}.$

Lösung. $a_n=\frac{5^n}{12n^2}$, $a_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{12(n+1)^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5n^2}{(n+1)^2}$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ $5>1$.

Die Reihe ist divergent.

Satz 7.14. Wurzelkriterium.

$$\sqrt[n]{a_n}\ \left(\text{bzw. }\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\right)\begin{cases}<1 & \Rightarrow\ \text{Konvergenz von }\sum_{n=1}^{\infty}a_n\\ =1 & \Rightarrow\ \text{keine Aussage}\\ >1 & \Rightarrow\ \text{Divergenz von }\sum_{n=1}^{\infty}a_n\end{cases}$$

Das Kriterium ist **hinreichend**.

Beispiel 7.15. (1) Die Reihe

$$1+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{8}\right)^4+...+\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n+...=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$$

konvergiert.

Lösung. $\sqrt[n]{a_n}=\frac{n+1}{2n}$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ $\frac{1}{2}<1$.

(2) Die Reihe

$$\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{3}{2}\right)^9+...+\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}$$

divergiert.

Lösung. $\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ ∞.

(3) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$ konvergiert.

Lösung. $\sqrt[n]{a_n}=\frac{2}{n}$ $\longrightarrow_{n\to\infty}$ $0<1$.

Aufgabe 7.16. (1) Untersuchen Sie folgende Reihen mit dem **notwendigen** Konvergenzkriterium auf Divergenz.

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+...$ *b)* $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\frac{8}{9}+...$

c) $\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 3+\frac{1}{4}\ln 4+\frac{1}{5}\ln 5+...$

(2) Prüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz oder Divergenz mit dem Quotientenkriterium.

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+...$ *b)* $\frac{3}{7}+\frac{8}{12}+\frac{13}{17}+\frac{18}{22}+...$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; *d)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n(n+1)}}$; *e)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$.

(3) Wenden Sie auf die folgenden Reihen das Wurzelkriterium an.

a) $1+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{12}\right)^3+\left(\frac{12}{15}\right)^4+...$ *b)* $\frac{1}{3}+\left(\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{7}{9}\right)^3+\left(\frac{10}{12}\right)^4+...$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{2.3^2}}+\frac{9}{\sqrt{3.3^3}}+\frac{13}{\sqrt{4.3^4}}+...$

Lösung. c) $a_n=\frac{4n-3}{\sqrt{n.3^n}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{4n-3}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{3^n}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt[n]{4n-3}}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \wedge \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n-3}=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}<1.$

d) $\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}\right)^4+\left(\frac{3}{6}\right)^9+\left(\frac{4}{7}\right)^{16}+...$ *e)* $1+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^3+\left(\frac{7}{4}\right)^4+...$

(4) Entscheiden Sie das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten folgender Reihen durch Vergleich mit bekannten Reihen.

a) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+...$

Hinweis. $n^n\geq 2^n \quad \forall n\geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n^n}\leq\frac{1}{2^n}$.

b) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...$

Hinweis. $n.n>n.(n-1) \quad \forall n>1 \Rightarrow \frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

Hinweis. 1) $0\leq\alpha\leq 1 \Rightarrow n^{\alpha}\leq n \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}}\geq\frac{1}{n}$.

2) $\alpha\geq 2 \Rightarrow n^{\alpha}\geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}}\leq\frac{1}{n^2}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Anleitung. $n^2+n<(n+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

7.1.2. *Alternierende Reihen.* Eine unendliche Reihe heißt *alternierend*, wenn ihre Glieder abwechselnd verschiedenes Vorzeichen haben:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n-1}a_n+...,$

wobei $a_n>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Das **notwendige** Konvergenzkriterium gilt auch hier.

Satz 7.17. Leibnizsches Konvergenzkriterium: *Hinreichend für die Konvergenz einer alternierenden Reihe ist, daß die Gliedfolge eine monotone Nullfolge bildet.*

Bemerkung 7.18. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ eine alternierende Reihe.

- Ist die Gliedfolge $\{a_n\}$ eine monotone Nullfolge, so ist die Reihe konvergent.
- Ist die Gliedfolge $\{a_n\}$ keine Nullfolge, so ist die Reihe divergent.

- Ist die Gliedfolge eine nicht-monotone Nullfolge, d.h. die Glieder streben nicht monoton gegen Null, so ist keine Aussage über Konvergenz / Divergenz der Reihe möglich.

In vielen Fällen führt eine Betrachtung der zugehörigen Reihe der absoluten Beträge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zum Ziel. Sollte sich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als konvergent erweisen, so konvergiert auch die vorgelegte alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ und heißt dann *absolut konvergent*.
Die absolute Konvergenz schließt also die einfache Konvergenz stets ein, nicht aber umgekehrt!
Konvergiert eine alternierende Reihe ohne absolut konvergent zu sein, so sagt man, daß sie *nicht-absolut konvergiert*.
Es gilt stets

Satz 7.19. Satz von Riemann: *Eine nicht-absolut konvergente alternierende Reihe kann stets so umgeformt werden, daß die neue Reihe einen beliebig vorgegebenen Summenwert besitzt.*

Alternierende Reihen, deren Summe von der Anordnung ihrer Glieder abhängt, nennt man *bedingt konvergent*.
Ergibt sich bei jeder Anordnung der Glieder der gleiche Summenwert, so heißt die Reihe *unbedingt konvergent*.
Jede unbedingt konvergente Reihe ist zugleich absolut konvergent und umgekehrt.

Aufgabe 7.20. (1) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ist bedingt konvergent.

(2) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{3n}$ ist divergent.

(3) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$ ist absolut konvergent.

(4) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ ist absolut konvergent.

(5) Beweisen Sie nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{2^n}$.

(6) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{|\sin n|^n}{n^2}$ ist absolut konvergent.

(7) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ist konvergent.

(8) Untersuchen Sie folgende Reihen mit dem Leibnizschen Kriterium.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n+1}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n-1}{4n}$; *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$.

(9) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}$ ist konvergent.

Anleitung: $\frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} - \frac{1}{(3n+4)(3n+7)}\right\}$.

(10) Die Reihe $1-1+1-1+1-...+1-1+...$ ist divergent.

(11) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent.

Anleitung: $S_n \geq \sqrt{n}$.

(12) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ ist divergent.

8. Komplexe Zahlen

Im Bereich der reellen Zahlen sind die vier Grundoperationen bis auf die Division durch Null stets ausführbar und liefern ein eindeutig bestimmtes Ergebnis. Beim Radizieren bestehen jedoch noch Einschränkungen. So ist z.B. die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl nicht definiert. Dies führt zum Aufbau des Bereichs der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Auf die Gleichung $x^2 - 10x + 40 = 0$ kam *Geronimo Cardano* (ein italienischer Mathematiker des 16. Jahrhunderts) bei der Aufgabe, die Zahl 10 so in zwei Summanden zu zerlegen, daß deren Produkt 40 ergibt. G. Cardano löste die Gleichung nach dem üblichen, damals schon bekannten Verfahren und gab als Lösung an: $x_1 = 5+\sqrt{-15}$, $x_2 = 5-\sqrt{-15}$. Diese für x_1 bzw. x_2 angegebenen "Werte" haben eigentlich keinen Sinn, denn die Quadratwurzel aus negativen Zahlen ist nicht erklärt. Wenn man aber so rechnet, als wäre $\sqrt{-15}$ eine ganz "normale" Zahl, dann findet man bei der Probe mit Hilfe des *Satzes von Vieta* : $x_1 + x_2 = 10 \wedge x_1x_2 = (5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40$. Das heißt, x_1 und x_2 "erfüllen" die in der Aufgabe gestellten Bedingungen.

Man nannte diese Zahlen (Quadratwurzel aus negativen Zahlen) *imaginär*, d.h. "eingebildet", "unwirklich".

Besondere Verdienste um das Klären des Wesens der imaginären Zahlen erwarben sich *L. Euler* im 18., *W. R. Hamilton* (ein irrischer Mathematiker) und *C. F. Gauß* im 19. Jahrhundert. Das Ergebnis war schließlich ein neuer Zahlenbereich, der Bereich der *komplexen Zahlen.* Diese als rein innermathematisch entstandene Theorie fand vielseitige Anwendungen: bei der Beschreibung von Wechselstromkreisen; bei Problemen des Strömungsverhaltens in Flüssigkeiten und Gasen; in der Quantentheorie und der Theorie der Elementarteilchen.

Aus unserem Wissen über die reellen Zahlen und über Teilbereiche derselben (z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$) können bereits einige große Vorstellungen von dem neu zu schaffenden Zahlenbereich gewonnen werden:

a) Die Elemente des neuen Bereichs werden im allgemeinen aus zwei "Komponenten" bestehen - einer reellen Zahl und einem bf imaginären Teil.

b) Da beim "üblichen Rechnen" mit den Elementen des neuen Bereichs auch **reelle** Zahlen als Ergebnisse auftreten können, werden diese im neuen Bereich vermutlich als **Teilbereich** enthalten sein.

c) Wenn die reellen Zahlen im neuen Bereich als Teilbereich enthalten sein können, dann müssen die von den reellen Zahlen her bekannten Rechengesetze auch im neuen Bereich gelten.

Die “imaginären” Zahlen ließen sich dann alle als “Produkte” der Form $\sqrt{-1}\,b,\ b \in \mathbb{R}^+$, schreiben; dann könnten die Elemente des neuen Bereiches alle in der Form $a \pm \sqrt{-1}\,b$ geschrieben werden, wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$ ist.

d) Die Frage nach einer **geometrischen Darstellbarkeit** der neuen Zahlen legt folgende Überlegung nahe:

Wenn jede dieser Zahlen in der Form $a + b\sqrt{-1}\ \ (a - b\sqrt{-1})$, geschrieben werden kann, dann ist sie durch das geordnete Paar (a, b) von reellen Zahlen eindeutig festgesetzt. Man kann (a, b) als Koordinaten eines Punktes in einem kartesischen Koordinatensystem auffassen und der Zahl $a + b\sqrt{-1}$ somit den Punkt mit den Koordinaten (a, b) zuordnen. So gehört zu jeder Zahl $a + b\sqrt{-1}$ genau ein Punkt und umgekehrt.

8.1. **Konstruktion des Bereiches der komplexen Zahlen.** Wir betrachten alle geordneten Paare reeller Zahlen (a, b) und wollen jedes solche Paar als eine **komplexe Zahl** auffassen. Wir müssen zeigen, wie man mit diesen Zahlen so rechnen kann, daß im Prinzip die gleichen Rechengesetze gelten wie für die reellen Zahlen.

Erklärung 8.1. *Addition* komplexer Zahlen:

$$(a, b) + (c, d) =: (a + c, b + d).$$

Die so definierte Addition ist *kommutativ* und *assoziativ*.

Die *Subtraktion* komplexer Zahlen wird als Umkehroperation zur Addition erklärt. Es ergibt sich

$$(a, b) - (c, d) =: (a - c, b - d).$$

Erklärung 8.2. *Multiplikatiom* komplexer Zahlen:

$$(a, b)(c, d) =: (ac - bd, ad + bc).$$

Die so erklärte Multiplikation ist *kommutativ* und *assoziativ*.

Die Addition und Multiplikation sind durch das *Distributivgesetz* miteinander verbunden.

Die *Division* komplexer Zahlen wird als Umkehroperation zur Multiplikation erklärt. Sie ist stets eindeutig ausführbar, sofern der Divisor nicht $(0, 0)$ ist.

Die Paare der Form $(a, 0)$ entsprechen den reellen Zahlen. Die reellen Zahlen bilden somit einen Teilbereich der komplexen Zahlen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Eine andere Teilmenge der komplexen Zahlen bilden die Paare der Form $(0, b)$. Man kann sie alle als Produkt einer reellen Zahl mit dem Paar $(0, 1)$ darstellen:

$$(b, 0).(0, 1) = (b.0 - 0.1, b.1 + 0.0) = (0, b).$$

Dies rechtfertigt, für das Paar $(0, 1)$ ein spezielles Symbol zu benutzen. Man verwendet dafür den Buchstaben i - die *imaginäre Einheit*.

Rechnen wir die Zahl $i^2 = i.i$ aus:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1.$$

Wir stellen fest: Im Bereich der komplexen Zahlen gibt es Elemente, **deren Quadrat eine negative reelle Zahl ist** (z.B. die Zahl i).

Nun können wir jedes Paar (a, b) in der Form $(a, 0) + (0, b)$ oder $a + i\,b$ darstellen. Man bezeichnet dabei a als *Realteil*, b als *Imaginärteil* der komplexen Zahl.

Es seien $z_1 = a_1 + i\,b_1,\ z_2 = a_2 + i\,b_2$ zwei komplexe Zahlen.
Addition: $z_1 + z_2 := (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$.
Subtraktion: $z_1 - z_2 := (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2)$.
Multiplikation: $z_1\,z_2 := (a_1 + i\,b_1)(a_2 + i\,b_2) = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1)$.
Division: $z_2 \neq 0,\quad \dfrac{z_1}{z_2} = z \quad\Leftrightarrow\quad z_2\,z = z_1$.
Es sei $z = x + i\,y$ die gesuchte komplexe Zahl $\dfrac{z_1}{z_2}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_1 + i\,b_1 = \ & (a_2 + i\,b_2)(x + i\,y) && = && (a_2\,x - b_2\,y) + i\,(a_2\,y + b_2\,x) \\ \Leftrightarrow\ & a_1 = a_2\,x - b_2\,y && \wedge && b_1 = a_2\,y + b_2\,x \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2} && \wedge && y = \frac{a_2\,b_1 - a_1\,b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Erklärung 8.3. Zwei komplexe Zahlen, $z = a + i\,b$ und $\bar{z} = a - i\,b,\ a, b \in \mathbb{R}$, die sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils unterscheiden, heißen *konjugiert-komplexe* Zahlen.

Die rationalen Verknüpfungen von zwei konjugiert-komplexen Zahlen liefern:
(i) $z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$;
(ii) $z - \bar{z} = 2\,i\,b$;
(iii) $z.\bar{z} = a^2 + b^2 =: |\,z\,|^2 \in \mathbb{R}$.
(iv) $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{a + i\,b}{a - i\,b} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + i\,\dfrac{2ab}{a^2 + b^2},\ z \neq 0$;
(v) $\left|\dfrac{z}{\bar{z}}\right| = 1,\ z \neq 0$.

Erklärung 8.4. Unter dem *Betrag einer komplexen Zahl* $z = a + i\,b$ versteht man den nichtnegativen Ausdruck $|\,z\,| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Satz 8.5.

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Es seien $z_1 = a_1 + i\,b_1,\ z_2 = a_2 + i\,b_2$ zwei komplexe Zahlen. Es gilt:
$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i\,(b_1 \pm b_2) \quad\Rightarrow\quad \overline{z_1 \pm z_2} = (a_1 \pm a_2) - i\,(b_1 \pm b_2) = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
$z_1\,z_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) \Rightarrow \overline{z_1\,z_2} = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) - i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
□

8.2. **Geometrische Darstellung komplexer Zahlen.** Es sei $\mathcal{E}$ eine gegebene Ebene und Oxy ein festgelegtes kartesisches Koordinatensystem in $\mathcal{E}$. Bei der Zuordnung

$$z = a + i\,b \in \mathbb{C} \ \rightleftarrows\ P(a, b) \in \mathcal{E},$$

d.h.

$$\{\text{komplexe Zahl}\} \quad\longmapsto\quad \{\text{Punkt der Ebene } \mathcal{E}\}$$

und umgekehrt

$$\{\text{Punkt der Ebene } \mathcal{E}\} \quad\longmapsto\quad \{\text{komplexe Zahl}\}$$

spricht man von der *komplexen Zahlenebene* $\mathcal{E}$, auch *Gaußsche Ebene* genannt. Die Koordinatenachsen des kartesischen Koordinatensystems in der Ebene $\mathcal{E}$ bezeichnet man als *reelle* (Abszissen-) bzw. *imaginäre* (Ordinaten-) Achse.

Zuweilen werden komplexe Zahlen auch als Pfeile dargestellt, deren Anfangspunkt der Nullpunkt O des Koordinatensystems ist.

Die Addition zweier komplexer Zahlen kann dann geometrisch wie die Addition zweier durch die Pfeile dargestellter Vektoren realiziert werden.

Der Betrag der komplexen Zahl $z = a + i\,b$ ist der Abstand von z vom Nullpunkt O des Koordinatensystems. Nach dem Satz von Pythagoras gilt $|\,z\,| = |\,a + i\,b\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bemerkung 8.6. Da die komplexen Zahlen den Punkten einer Ebene zugeordnet sind, **unterliegen sie keiner Ordnung**!

8.3. **Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen.** Aus der geometrischen Darstellung der komplexen Zahl $z = a + i\,b$ ist unmittelbar ersichtlich, daß folgendes gilt:

$$a = |\,z|\,\cos\varphi, \quad b = |\,z|\,\sin\varphi, \quad \varphi := \angle(l^{\rightarrow}, OM^{\rightarrow}).$$

Die komplexe Zahl z läßt sich in der *trigonometrischen* Form

$$z = |\,z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

darstellen, d.h. die komplexe Zahl z ist durch ihren Betrag $|\,z|$ sowie durch den Winkel φ, den der Pfeil $\overrightarrow{OM}$ mit der positiven Richtung der reellen Achse einschließt, bestimmt. Man bezeichnet φ als das *Argument* von z. Dabei wird $0 \le \varphi < 2\pi$ vorausgesetzt.

Die Zahl $z = 0$ besitzt den Betrag 0. Ihr ist **kein** Argument zugeordnet.

Beispiel 8.7. (1) Gegeben ist $z = 3 + 4i$. Gesucht ist die trigonometrische Darstellung von z.

Lösung. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Aus $a = |z|\,\cos\varphi$ und $b = |z|\,\sin\varphi$ folgt $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ und $\varphi \approx 0,927 \Rightarrow\; z = 5(\cos 0,927 + i\,\sin 0,927)$.

(2) Gegeben ist $z = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6})$. Gesucht ist die algebraische Darstellung von z.

Lösung. $a = 3\cos\frac{\pi}{6} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = 3\sin\frac{\pi}{6} = 3\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$.

Aufgabe 8.8. Wandeln Sie in die jeweils andere Darstellung um:

$$z = -3 + \frac{1}{2}\,i; \quad z = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}).$$

Bei der *Multiplikation* zweier komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung ergibt sich entsprechend der Definition dieser Rechenoperation folgendes:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) \quad \Rightarrow \\ z_1\,z_2 &= r_1\,r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,r_1\,r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) \\ &= r_1\,r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Satz 8.9. *Bei der Multiplikation komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung werden ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.*

Aufgabe 8.10. Berechnen Sie $z = \frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2$.

8.3.1. *Die geometrische Deutung der Multiplikation.* Wir haben folgende geometrische Konstruktion zur Ermittlung vom Produkt $z_1\, z_2$:

(1) Man markiert die zu den Zahlen z_1 bzw. z_2 gehörigen Punkte in der komplexen Zahlenebene und bezeichnet sie entsprechend mit Z_1 bzw. Z_2. Der zur Zahl $z = 1$ gehörende Punkt werde mit E bezeichnet.
(2) Man dreht den Punkt Z_2 im positiven Drehsinn um O mit dem Drehwinkel φ_1. Das Bild von Z_2 sei ${Z_2}'$.
(3) Man zeichnet den Strahl $O{Z_2}'^{\rightarrow}$.
(4) Man trägt im Punkt Z_2 den Winkel OEZ_1 so an die Strecke (OZ_2) an, daß seine Orientierung erhalten bleibt. Der freie Schenkel des angetragenen Winkels schneidet den Strahl $O{Z_2}'^{\rightarrow}$ im Punkt Z.

Behauptung: Für die zu Z gehörende Zahl z gilt $z = z_1\, z_2$.
Hinweise zum Beweis:

a) Vergleichen Sie $\triangle\, OEZ_1$ und $\triangle OZ_2Z$.
b) Wie groß ist das zu z gehörende Argument?

Wird beim Multiplizieren das Argument φ des Produktes gleich 2π oder größer, so daß man es in der Form $\varphi = \varphi_0 + k.2\pi$ (mit $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$) schreiben kann ($k \in \mathbb{N}$), dann verwendet man im Ergebnis in der Regel nur den Wert φ_0, da $\sin(\varphi_0 + k.2\pi) = \sin\varphi_0$ und $\cos(\varphi_0 + k.2\pi) = \cos\varphi_0$ gilt.

Satz 8.11. *Für die Division zweier komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung gilt*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ z_2 \neq 0.$$

Falls $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$ ist, kann man diesen Winkel als durch **Linksdrehung** (mathematisch negativer Drehsinn) entstanden interpretieren oder ihn durch Addition von 2π in einen positiven Winkel mit gleichen Kosinus- bzw. Sinuswerten überführen.

Aufgabe 8.12. Gegeben sind $z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}),\ z_2 = \frac{1}{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\pi}{3})$.
Gesucht ist $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Antwort: $\frac{z_1}{z_2} = 6(\cos\pi + i\,\sin\pi) = -6$.

Ausgehend von der Multiplikation zweier komplexer Zahlen erhalten wir für das Produkt von n komplexen Zahlen $z_s = r_s(\cos\varphi_s + i\,\sin\varphi_s),\ s = 1, 2, ..., n$,

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n)).$$

Ist $z_1 = z_2 = ... = z_n$, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2 = ... = \varphi_n,\ r_1 = r_2 = ... = r_n$, so gilt

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi)).$$

Satz 8.13. Satz von Moivre. *Das Potenzieren der komplexen Zahl* $\cos\varphi + i\,\sin\varphi$ *mit dem Exponenten* $n \in \mathbb{Q}$ *kann durch ein Multiplizieren des Winkels* φ *mit dem Faktor* n *ausgeführt werden.*

Erklärung 8.14. Unter der Wurzel $\sqrt[n]{z}$ ($n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$) verstehen wir im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen jede komplexe Zahl, deren n-te Potenz gleich z ist.

8.3.2. *Rechnerische Ermittlung der Werte* $\sqrt[n]{z}$. Die zu radizierende komplexe Zahl z wird zunächst in der trigonometrischen Form dargestellt, wobei man die Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion berücksichtigt:

$$z = r(\cos(\varphi + k.2\pi) + i\,\sin(\varphi + k.2\pi)),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Nach dem Satz von Moivre ist dann

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + k.2\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi + k.2\pi}{n}).$$

Dabei werde unter $r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}$ der eindeutig bestimmte positive Wurzelwert verstanden. Setzt man für k nacheinander die Zahlen $0, 1, 2, ..., n-1$ ein, so ist für jeden der Werte von k einen Wurzelwert von $\sqrt[n]{z}$ zu erhalten, da $k.\frac{2\pi}{n} < 2\pi$ ausfällt. Setzt man dagegen $k \geq n$, etwa $k = n + k', k' = 0, 1, 2, ...$, so wird wegen

$$\cos(\tfrac{\varphi}{n} + (n+k')\tfrac{2\pi}{n}) = \cos(\tfrac{\varphi}{n} + k'\tfrac{2\pi}{n} + 2\pi) = \cos(\tfrac{\varphi}{n} + k'\tfrac{2\pi}{n}),$$
$$\sin(\tfrac{\varphi}{n} + (n+k')\tfrac{2\pi}{n}) = \sin(\tfrac{\varphi}{n} + k'\tfrac{2\pi}{n} + 2\pi) = \sin(\tfrac{\varphi}{n} + k'\tfrac{2\pi}{n})$$

für jedes k' sich der gleiche Wurzelwert ergeben wie vorher für $k = 0, 1, ..., n-1$.

Satz 8.15. *Für die n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ findet man mit*

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + k.2\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi + k.2\pi}{n}),\ k = 0, 1, ..., n-1,$$

genau n verschiedene komplexe Werte.

Für $k = 0$ erhält man den *Hauptwert* von $\sqrt[n]{z}$, nämlich

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi}{n}).$$

Aufgabe 8.16. (1) Beweisen Sie:

$$z = 1 \iff z = \cos 0 + i\,\sin 0; \quad z = i \iff z = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}.$$

(2) Beweisen Sie:
   a) $z = 1 - i\sqrt{3} \iff z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$;
   b) $z = 3i \iff z = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$;
   c) $z = -1 \iff z = \cos\pi + i\sin\pi$;
   d) $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \iff z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\{\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\}$;
   e) $z = 2(\cos\frac{\pi}{6})^2 + i\sin\frac{\pi}{3} \iff z = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) Dividieren Sie aus: $\dfrac{3+i}{1+i}$; $\dfrac{1}{1-i}$; $\dfrac{2i-3}{1+i}$; $\dfrac{1+i}{1-i}$; $\dfrac{(1+2i)(2-i)}{(1-i)(2-3i)}$; $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

(4) Radizieren Sie aus: $\sqrt{1}$; $\sqrt{-1}$; $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[n]{1}$; $\sqrt[n]{-1}$.

(5) Radizieren Sie aus: $z = \sqrt{i}$; $z = \sqrt{32(-i)}$; $z = \sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; $z = \sqrt[3]{i}$; $z = \sqrt[3]{1-i}$.

(6) Wann und nur wann (d.h. für welche Werte von $n \in \mathbb{N}$) gilt die Gleichung $(1+i)^n = (1-i)^n$?

(7) Welche trigonometrische Darstellung haben folgende Zahlen

$$z = \frac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}; \quad z = \frac{(1+i\sqrt{3})^{21}}{(1+i)^{30}}; \quad z = (1+i\sqrt{3})^3(1-i)^4; \quad z = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}?$$

(8) Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} a)\ \dfrac{x-4+i(y-1)}{1+i} = 2-5i; & b)\ x^2+2x+3=0; \\ c)\ x^2-(3-2i)x+5(1-i)=0; & d)\ (3-i)x^2+(1+i)x+6i=0; \\ e)\ x^4-i=0; & f)\ x^4+16=0; \\ g)\ x^4-1=0; & h)\ x^5-1=0. \end{array}$$

Aufgabe 8.17. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 3x+y=a+2, \\ 9x^2+y^2=5a-2. \end{array} \right.$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, daß das Produkt xy für reelle Lösungspaare (x,y) des Gleichungssystems einen minimalen Wert annimt.

Inhaltsverzeichnis

Sofia, 2012